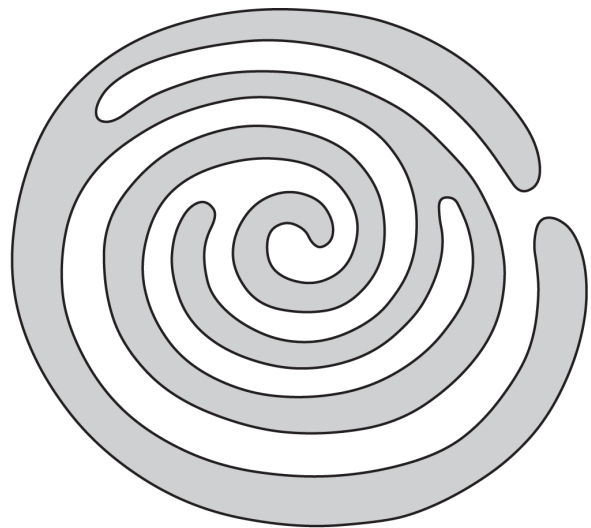
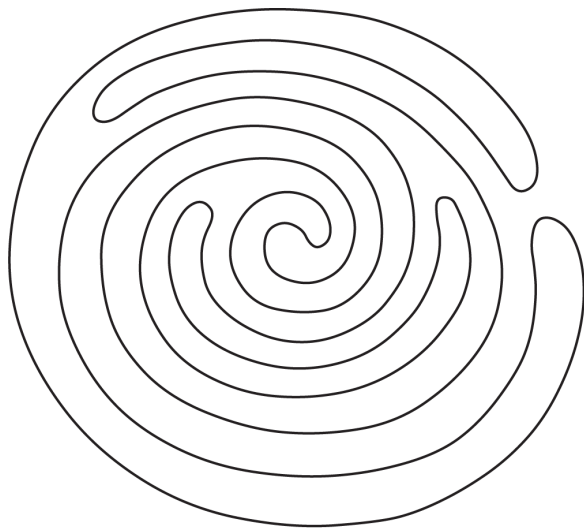




Bulletin

Juni 2012 – Juin 2012

N° 119

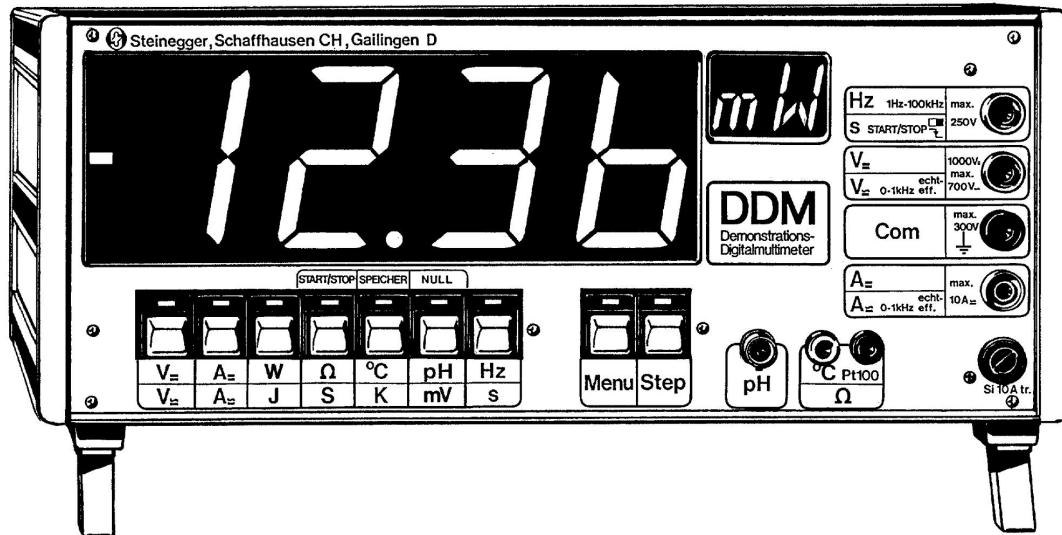


VSMP – SSPMP – SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Demonstrations-Digitalmultimeter DDM

Art. Nr. 26



- **Misst: Spannung, Strom, Wirkleistung, Energie, Widerstand, Temperatur, pH-Wert, Zeitintervall und Frequenz**
- **56mm hohe LED-Ziffern und 9999 Messpunkte**
- **Automatische und manuelle Bereichsumschaltung**
- **Mehr als 20 Zusatzgeräte direkt anschließbar**
- **Einfacher Datenaustausch mit PC/Mac im Multitasking über die bidirektionale Serieschnittstelle**
- **2 freiprogrammierbare Analog-Ausgänge**
- **Ausführliche 75-seitige Bedienungsanleitung**

Preis inkl MWSt. Fr 2'350.-

Die kostenlose Kurzbeschreibung "Demonstrations-Digitalmultimeter DDM Art. Nr. 26" erhalten Sie direkt vom Hersteller:

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
8200 Schaffhausen



Fax : 052-625 58 60

☎ : 052-625 58 90

Internet: www.steinegger.de

In dieser Nummer – *Dans ce numéro*

Hansjürg Stocker
Leitartikel - Editorial 3

Hans Peter Dreyer
Mathematik und Physik aus Sicht von Gymnasiastinnen 4

Deutscheschweizerische Mathematikkommission 7

Beat Jaggi
Über eine ziemlich allgemeine Zahlenfolge und eine
ziemlich allgemeine Funktion 7

Christian Blatter
Drei Sätze über ebene Polygonzüge 12

Raphael Steiner
EGMO – European Girls' Mathematical Olympiad 20



Urs Stambach
Aha! Mathematik! 21

H. R. Schneebeli
"A Short History of Mathematical Population Dynamics"
von Nicolas Bacaër 24

H. R. Schneebeli
Bericht zu Maturaarbeiten: Populationsmodelle 26

Hansjürg Stocker
Mathematikwettbewerbe an Schulen und
vergleichbare Freizeitaktivitäten 28

Deutscheschweizerische Physikkommission 30

DPK

Martin Lieberherr
Duffing-Oszillator 30



Commission Romande de Mathématiques **33**

Paul Jolissaint
L'algorithme PageRank de Google 33

Jean Luc Bovet
Une particularité de quelques réels 37

Kurse

Cours CRP 2012: Epistémologie des sciences physiques 41

Kurse PH Zürich: Weiterbildungsveranstaltung Produktives Üben
im Mathematikunterricht 42

Weiterbildungskurs: Wirtschaftsmathematik im gymnasialen Mathematikun-
terricht 43

Weiterbildung: 23. Schweizerischer Tag über Mathematik
und Unterricht 44

Cours CRM 2012: Sujets d'applications des mathématiques 46

Impressum 48

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>

Page de titre

Eine "schöne" Jordankurve cf. page 12.



LEITARTIKEL

Die folgende Parabel von Hector Herzig (Präsident des Vereins «Jugend+Musik» und Geschäftsführer der IG JugendMUSIKförderung) durfte ich aus der SCHWEIZER MUSIKZEITUNG 4/12, S.25 übernehmen. Sie passt trefflich auch zur aktuellen Situation an den Gymnasien.

Hansjürg Stocker, Vizepräsident des VSMP

Die Geschichte vom Frosch

Es war einmal ein alter Mann, der vor seiner Hütte saß und über das Leben nachdachte. Und während er so da saß, entdeckte er am Ufer des kleinen Sees einen Frosch. Er packte ihn und nahm ihn mit in seine Hütte, wo er ihn in einen großen Topf mit kochendem Wasser gab. Der Frosch machte einen entsetzten Sprung heraus aus dem Topf und war weg, ehe der alte Mann es recht bemerkte. – Wieder saß der alte Mann vor seiner Hütte. Er dachte an den Frosch, der sich sicherlich ordentlich verbrannt hatte, sich aber behertzt der Situation entzogen hatte, um weiterleben zu können. Da bemerkte der alte Mann wiederum einen Frosch am Ufer des Sees und er nahm auch diesen Frosch mit in die Hütte. Da er dieses Mal keinen Topf mit kochendem Wasser auf dem Ofen stehen hatte, setzte er den Frosch in einen Topf mit kaltem Wasser, heizte den Ofen ein und setzte den Topf aufs Feuer. Zu seinem Erstaunen stellte er fest, dass der Frosch im Topf sitzen blieb. Das Wasser wurde wärmer, schließlich heiß, doch der Frosch blieb selbst im kochenden Wasser sitzen und machte keinerlei Anstalten zu entkommen.

Ist es nicht ähnlich bei uns Menschen? Wenn wir jäh in eine gefährliche Lage geraten, reagieren wir schnell. Wenn eine bedrohliche Situation sich langsam aber stetig aufbaut, reagieren wir in der Regel erst, wenn es bereits zu spät ist. Wenn man uns morgen Demokratie und Freiheit rauben würde, gäbe es einen Volksaufstand. So wird das aber nicht geschehen. Demokratie und Freiheit erodieren schleichend, langsam, wie das Wasser, das in der Geschichte immer heißer wird. Demokratie und Freiheit als unser wertvollstes Gut sind zum selbstverständlichen Teil unseres Lebens geworden. Die Möglichkeit, mitbestimmen zu dürfen, wird mehr und mehr zur lästigen Pflicht. Wer geht denn heute noch abstimmen?

ÉDITORIAL

J'ai repris la parabole suivante de la REVUE MUSICALE SUISSE 4/12, p.25, elle est due à Hector Herzig (président de l'association «jeunesse+musique» et secrétaire général du groupe d'intérêt «promotion de la formation MUSICALE des jeunes»). Elle correspond bien à la situation actuelle des gymnases.

Hansjürg Stocker, Vice-président de la SSPMP

L'histoire de la grenouille

Il était une fois un vieil homme, assis devant sa cabane, qui réfléchissait à la vie. Pendant qu'il se tenait là, il découvrit une grenouille au bord d'un étang. Il l'attrapa et la ramena chez lui pour la plonger dans une grande casserole d'eau bouillante. La grenouille fit un bond terrible, et avant même que le vieil homme le réalise, elle était partie. – Le vieil homme se rassit devant sa cabane. Il pensait à la grenouille, qui s'était sans doute cruellement brûlée, mais qui avait résolument pris la fuite pour continuer à vivre. À cet instant, il aperçut une autre grenouille au bord de l'étang, et il l'emporta à nouveau dans sa cabane. N'ayant cette fois pas de casserole d'eau bouillante, il la mit dans une marmite d'eau froide, alluma le fourneau et posa le tout sur le feu. À sa grande surprise, il vit que la grenouille restait tranquillement là. L'eau devenait de plus en plus chaude, et pourtant la grenouille ne bougeait pas, et même lorsque l'eau commença à bouillir, elle ne fit pas mine de vouloir s'échapper.

N'en va-t-il pas de même chez nous les êtres humains? Confrontés à un danger, nous réagissons rapidement. Par contre, lorsqu'une menace grandit de manière larvée, nous réagissons généralement trop tard. Si l'on nous privait demain de la démocratie et de la liberté, il y aurait un soulèvement populaire. Mais ce n'est pas ainsi que cela se passe. Celles-ci subissent une érosion sournoise et lente, comme dans la fable où l'eau se réchauffe peu à peu. La démocratie et la liberté, nos biens les plus précieux, nous paraissent aller de soi, et la possibilité de participation est de plus en plus souvent ressentie comme une obligation ennuyeuse. Qui donc va encore voter aujourd'hui?

Mathematik und Physik aus Sicht von Gymnasiastinnen

Ein einseitiger Bericht über MUPET, einer Befragung im 9. und 10. Schuljahr

Hans Peter Dreyer*, Departement Mathematik, ETH Zürich

Dieser Artikel ist in doppelter Hinsicht einseitig: Er berichtet nur über zwei Fächer und nur aus Schülersicht. Nach einem Rückblick auf vergessene Untersuchungen wird kurz auf eine Befragung hingewiesen, welche die seit langem unveränderte, oft ungünstige und geschlechtsspezifische einseitige Einschätzung unserer Schulfächer bestätigt. Dies wirft Fragen auf.

1995 wurde in TIMSS¹ zum letzten Mal speziell Mathematik und Physik in Schweizer Gymnasien untersucht. Der Vergleich der Leistungen der damaligen Typen A bis E mit anderen Ländern interessierte leider die Erziehungsbehörden nicht – es war noch vor PISA. Doch wurde auch Anderes, insbesondere Interessen untersucht. Eigentlich überraschte es niemanden, dass Mathematik die Gymnasiastinnen nur mässig und Physik sogar wenig interessierte. Dies hatte schon zehn Jahre früher in der Studie von Häuselmann gezeigt, wo die Physik in der Beliebtheitskala am Schluss lag. Wenn man die Originaldaten in eine Skala mit 5 = sehr hoch / 1 = sehr niedrig verschiebt, findet man

Mathematik alle = 3.3

Mathematik Maturandinnen = 3.2

Physik alle = 3.0

Physik Maturandinnen = 2.6

als Referenz: Biologie alle = 4.0

Biologie Maturandinnen = 4.2

Zehn Jahre später untersuchte EVAMAR I² die Zufriedenheit mit der neuen Maturitätsordnung, fragte die Lernenden auch nach den Interessen und erhielt ähnliche Zahlen nicht nur am Schluss des Gymnasiums, sondern bereits zu Beginn, im 10. Schuljahr:

Mathematik alle = 3.6

Mathematik Gymnasiastinnen = 3.2

Physik alle = 3.2

Physik Gymnasiastinnen = 2.7

als Referenz: Englisch alle = 4.1

Englisch Gymnasiastinnen = 4.3

Ist das heute anders? Eine Antwort auf diese Frage gibt die Pilot-Befragung, die ich unter dem Kürzel MUPET im Winter 2011/2012 bei 2500 Gymnasiastinnen und Gymnasiasten des 9. und 10. Schuljahrs aus der ganzen Schweiz durchgeführt habe. In der folgenden Tabelle sind hintereinander die Werte der Deutschschweiz (N=1300), der Romandie (N=500) und des Tessins (N=700) angegeben:

Mathematik alle = 3.5 / 3.6 / 3.8

Mathematik Gymnasiastinnen = 3.2 / 3.5 / 3.6

Physik alle = 3.2 / 3.1 / 3.6

Physik Gymnasiastinnen = 2.8 / 2.8 / 3.3

Englisch alle = 4.0 / 4.2 / 4.3

Englisch Gymnasiastinnen = 4.3 / 4.4 / 4.5

Auch wenn ich Mängel im Untersuchungsdesign eingestehe und beispielsweise nicht sicher bin, ob das bessere Urteil der Tessinerinnen über die Physik signifikant ist, stelle ich fest: In den letzten 30 Jahren hat sich zwar vieles verändert, nicht aber die Einstellung zu Mathematik und Physik!

Ich möchte keine voreiligen Schlüsse aus dem Befund, dass sich die Zahlen nicht verbessern und dass die Gymnasiastinnen Mathematik und besonders Physik ungünstig beurteilen, ziehen. Ich fürchte aber, dass die für 2013 geplante, repräsentative Befragung zu den gleichen Ergebnissen führen wird.

„Signalisieren diese Zahlen überhaupt ein Problem, liegt das nicht in der Natur der Dinge?“ hörte ich schon fragen. – Ich bin überzeugt, dass hier ein begrabener Hund sichtbar wird. Es gibt Leistungsprobleme in der Mathematik: Mehr als 40% erhalten von ihren Lehrerinnen und Lehrern eine ungenügende Note in ihrer schriftlichen Mathematikmatur. Es gibt auch Leistungsprobleme in der Physik: Die Mediziner planen, den schweizerischen Eignungstest durch Naturwissenschaftsfragen zu ergänzen. Man plant den Leistungsdruck, die extrinsische Motivation der Lernenden zu erhöhen, indem man Standards setzt, das Notengewicht erhöht oder ungenügende Noten nicht kompensierbar erklärt. Letztlich setzt aber bessere Leistung mehr und intensiveres Arbeiten voraus – und dies braucht mehr Motivation und ein höheres Interesse bei Schülerinnen und Schülern und zwar schon zu Beginn des Gymnasiums!

Die grosse Veränderung der letzten 30 Jahre im Gymnasium ist der Frauenanteil. Nach der Einführung der Koedukation etwa 1970 stieg er rasch von etwa 20% auf 40% an. Im Jahr 2010 wurden 58% der gymnasialen Maturitätszeugnisse an Frauen ausgestellt, Tendenz wachsend. (Die Fachmittelschulen wären ein zusätzliches Thema.) – Haben Mathematik- und Physikunterricht in den Gymnasien ausreichend auf diese Veränderung reagiert? Oder konzentriert man sich auf diejenigen, die primär aus Interesse in die mathematisch-naturwissenschaftlichen Schwerpunkte PAM und BC gehen? Es freut uns natürlich, dass in PAM

94% / 93% / 95% „hohes“ oder sogar „sehr hohes“ Interesse für Mathematik und

85% / 87% / 91% „hohes“ oder sogar „sehr hohes“ Interesse für Physik angeben.

Auch 93% der 39 antwortenden Deutschschweizer PAM-Schülerinnen finden Mathematik sehr interessant, und immerhin 64% ebenfalls die Physik. Die Zahlen im Schwerpunkt Biologie/Chemie sind zwar tiefer, aber immer noch sehr gut.

Natürlich ist die Schule in eine Gesellschaft eingebettet, die bewusst und unbewusst Einfluss auf die jungen Menschen und deren Präferenzen nimmt. Es ist ein schwacher Trost, dass das Bild ausserhalb des Gymnasiums nicht wesentlich besser ist. Schon in den 60er Jahren schrieb C. P. Snow³ über die „Zwei Kulturen“. Und der wohlwollende, aber trotzdem kritische Beobachter Hans Magnus Enzensberger⁴ diagnostizierte 2002, die Mathematik sei „im Jenseits der Kultur“. – Wirken der aktuelle Mathematik- und Physikunterricht an den Gymnasien der snobistischen, aber verbreiteten Meinung von Dietrich Schwanitz⁵ entgegen, Mathematik und Physik gehörten nicht zu dem, „was man wissen“ müsse? Tragen Mathematik und Physik im Grundlagenfach nicht nur zur Studierfähigkeit, sondern auch zur Allgemeinbildung bei?

MUPET, die Studie zur **Mathematik- Und PhysikEntwicklung** im Gymnasium, soll vertieft werden. Auch die erweiterte Befragung, zu deren Unterstützung ich Sie aufrufe, wird keine einfachen Lösungen aufzeigen. Solche wären längst schon gefunden und genutzt worden. Aber die Lernenden können konkrete Hinweise auf für sie wichtige Elemente im komplexen Unterrichtsgeschehen geben: Zur Stoffauswahl, zum Lehrbuch, zur Binnendifferenzierung usw. Beispielsweise liefert die Deutschschweiz in der Pilotstudie zur Aussage „Ich brauche in Physik immer etwas Ermutigung.“ 58% JA oder eher JA bei den Gymnasiastinnen, hingegen nur 36% JA oder eher JA bei den Gymnasiasten.

Das „T“ in MUPET verweist auf Technik. Diese ist kein eigenes Unterrichtsfach, aber einerseits Motivation für die meisten PAM-Schüler und andererseits wohl ein Hemmnis bei vielen Frauen, die lieber den Menschen im Zentrum sehen. Nur rund 2% der antwortenden Gymnasiastinnen planen „sicher“ ein Studium aus dem Sektor „Mathematik, Physik, Informatik, El.ing. usw.“; nur 29 von 1436 Frauen möchten gerne in einem technischen Beruf tätig sein. Deshalb werden weiterhin einige Fragen auf Beziehungen zur Technik zielen, wo gemäss dem Bericht des Bundesrats zu den MINT-Berufen⁶ Nachwuchsmangel herrscht.

Was immer die Befragungsergebnisse sind, auch in Zukunft werden die Lehrerinnen und Lehrer zentral bleiben, ganz so wie es ein Schüler und eine Schülerin im negativen respektive positiven Sinn bei den freien Kommentaren ausdrücken. Im Originalton:

„Il faudrait changer les professeurs de physique car, en tout cas le mien, ne donne pas une bonne ambiance sympathique de travail.“ (m / BC)

„Ich finde es vor allem in Mathematik sehr sehr wichtig, einen guten Lehrer zu haben. Das Gymnasium sollte nicht einfach alle Mathematiklehrer einstellen die sie bekommen können.“ (w / BC)

*) **Zum Autor:** Hans Peter Dreyer arbeitete von 1972 bis 2010 Physik- und Mathematiklehrer an der KS Wattwil und wirkte zeitweilig als Physikdidaktiker an der ETH und der UNI Zürich. Zu Zeiten von TIMSS amtierte er als Präsident des VSMP, und er präsierte den VSG, als EVAMAR lief.

Quellen:

¹ TIMSS 95 = Third international mathematics and science study

http://timss.bc.edu/timss1995i/t95_study.html und www.vsmf.ch/bulletin/no84/timss.pdf

² EVAMAR I = Evaluation der Schweizer Maturitätsreform im Auftrag von EDK und SBF

www.sbf.admin.ch/evamar/evamar_1/dt/ergebnisse.html

Ramseier, Erich et. al: Evaluation der Maturitätsreform 1995 – Schlussbericht zur Phase 1. Bern 2005

³ Snow, Charles Percy: The Two Cultures and a Second Look, Stuttgart 1967 (Klett)

⁴ Enzensberger, Hans Magnus: Elixiere der Wissenschaft, Frankfurt a. M. 2002 (Suhrkamp), p. 11

⁵ Schwanitz, Dietrich: Bildung – Alles, was man wissen muss, Frankfurt a. M. 1999 (Eichborn)

⁶ Bericht des Bundesrats: Mangel an MINT-Fachkräften in der Schweiz – Ausmass und Ursachen des

Fachkräftemangel in MINT (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik) Bern

www.sbf.admin.ch/htm/dokumentation/publikationen/uni/Bericht_Fachkraeftemangel_de.pdf



Über eine ziemlich allgemeine Zahlenfolge und eine ziemlich allgemeine Funktion

Beat Jaggi, beat.jaggi@phbern.ch

Abstract

Ausgehend von einem verallgemeinerten Mittelwert wird eine Zahlenfolge definiert, die eine Verallgemeinerung von arithmetischen, geometrischen und harmonischen Folgen darstellt. Mit der expliziten Beschreibung dieser Folge kann eine Funktion angegeben werden, die affine Funktionen, Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen, Exponentialfunktionen etc. umfasst.

Einleitung

Zwischen gewissen Folgen reeller Zahlen a_0, a_1, a_2, \dots und Mittelwerten besteht ein enger Zusammenhang: Bei einer arithmetischen Folge ist jedes Folgeglied (mit Ausnahme des ersten) das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder. Analoges gilt für geometrische und harmonische Folgen.

Diese Eigenschaft kann genutzt werden, um rekursive Beschreibungen dieser drei Typen von Folgen zu gewinnen.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \implies a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} ; \quad n \geq 1 \quad (1)$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} \implies a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}} ; \quad n \geq 1 \quad (2)$$

$$a_n = \frac{2a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n-1} + a_{n+1}} \implies a_{n+1} = \frac{a_{n-1}a_n}{2a_{n-1} - a_n} ; \quad n \geq 1 \quad (3)$$

Sind die ersten beiden Zahlen a_0 und a_1 vorgegeben, dann können wir die Folgeglieder sukzessive berechnen.

Es ist leicht zu sehen, dass aus den rekursiven Beschreibungen (1), (2) und (3) die untenstehenden expliziten Darstellungen folgen:

$$a_n = a_0 + n(a_1 - a_0) = na_1 - (n-1)a_0 \quad (4)$$

$$a_n = a_0 \cdot \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n = \frac{a_1^n}{a_0^{n-1}} \quad (5)$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{a_0} + n\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_0}\right)} = \frac{a_0a_1}{na_0 - (n-1)a_1} = \frac{a_0a_1}{a_1 + n(a_0 - a_1)} \quad (6)$$

Setzt man in (4) $a_1 - a_0 = d$ oder in (5) $\frac{a_1}{a_0} = q$, so erhält man die wohlbekannten expliziten Beschreibungen von arithmetischen und geometrischen Zahlenfolgen. (6) ist die explizite Beschreibung einer allgemeinen harmonischen Zahlenfolge. a_0 und a_1 sind dabei so zu wählen, dass der Nenner $a_1 + n(a_0 - a_1)$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$ ungleich Null bleibt.

Verallgemeinerter Mittelwert

Die oben beschriebenen Mittelwerte lassen sich zu einem allgemeinen Mittelwert zusammenfassen. (siehe z.B. [1])

Definition: Für zwei positive reelle Zahlen a und b und eine reelle Zahl r definieren wir

$$m_r = \left(\frac{a^r + b^r}{2} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (7)$$

Bemerkung: Definition (7) kann auf n Zahlen verallgemeinert werden (siehe [1]).

Eine einfache Rechnung zeigt, dass m_1 das arithmetische und m_{-1} das harmonische Mittel von a und b ist.

Der Fall $r = 0$ verdient besondere Beachtung.

Es gilt:

$$\left(\frac{a^r + b^r}{2} \right)^{\frac{1}{r}} = e^{\ln\left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}} = e^{\frac{\ln\left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)}{r}}$$

Auf den Quotienten

$$\frac{f(r)}{g(r)} = \frac{\ln\left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)}{r}$$

lässt sich die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital anwenden, also gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r)}{g(r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f'(r)}{g'(r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{a^r \cdot \ln a + b^r \cdot \ln b}{a^r + b^r}}{1} = \frac{\ln a + \ln b}{2} = \frac{1}{2} \ln(ab) = \ln(ab)^{\frac{1}{2}} = \ln \sqrt{ab}$$

und somit

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{a^r + b^r}{2} \right)^{\frac{1}{r}} = \sqrt{ab}$$

Wir können m_0 mit dem geometrischen Mittel identifizieren und m_r ist tatsächlich für jede reelle Zahl r definiert.

Bemerkungen: 1. Man kann zeigen, dass m_r , aufgefasst als Funktion von r , streng monoton steigt ($a \neq b$). Aus dieser Monotonie von m_r folgen dann die bekannten Ungleichungen $m_{-1} < m_0 < m_1$ zwischen harmonischem, geometrischem und arithmetischem Mittel zweier Zahlen a und b .

2. Es gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m_r = \text{Max}\{a, b\} \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow -\infty} m_r = \text{Min}\{a, b\}$$

Allgemeine Mittelwert-Folge

Mit dem im vorherigen Abschnitt definierten verallgemeinerten Mittelwert m_r lässt sich nun für jede reelle Zahl r eine allgemeine Folge definieren: Jedes Folgeglied (mit Ausnahme des ersten) soll der verallgemeinerte Mittelwert seiner Nachbarglieder sein.

$$a_n = \left(\frac{a_{n-1}^r + a_{n+1}^r}{2} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (8)$$

Obwohl die Folgeglieder nun von r abhängen, verzichten wir auf eine entsprechende Anpassung der Bezeichnungen.

Rekursive Beschreibung der verallgemeinerten Mittelwert-Folge:

Auflösen von (8) nach a_{n+1} ergibt eine rekursive Darstellung

$$a_{n+1} = \left(2a_n^r - a_{n-1}^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad (9)$$

Nach Vorgabe von zwei Zahlen a_0 und a_1 liefert die obige Formel im Prinzip für jede reelle Zahl r eine Zahlenfolge, die wir als verallgemeinerte Mittelwert-Folge $(a_r)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen.

Explizite Beschreibung der verallgemeinerten Mittelwert-Folge

Behauptung: Aus der rekursiven Beschreibung (9) der verallgemeinerten Mittelwert-Folge ergibt sich die folgende explizite Darstellung:

$$a_n = [na_1^r - (n-1)a_0^r]^{\frac{1}{r}} = [a_0^r + n(a_1^r - a_0^r)]^{\frac{1}{r}} \quad (10)$$

Beweis: Mit Induktion: Für $n = 0$ und für $n = 1$ ergibt der Term in (10) gerade a_0 resp. a_1 .

(9) kann in der Form $a_{n+1}^r = 2a_n^r - a_{n-1}^r$,

(10) in der Form $a_n^r = a_0^r + n(a_1^r - a_0^r)$ geschrieben werden.

Die Formel (10) sei richtig für n . Dann gilt:

$$\begin{aligned} 2a_n^r - a_{n-1}^r &= 2[a_0^r + n(a_1^r - a_0^r)] - [a_0^r + (n-1)(a_1^r - a_0^r)] \\ &= 2a_0^r + 2n(a_1^r - a_0^r) - a_0^r - (n-1)(a_1^r - a_0^r) \\ &= a_0^r + (2n - (n-1))(a_1^r - a_0^r) \\ &= a_0^r + (n+1)(a_1^r - a_0^r) = a_{n+1}^r \quad \text{wzzw.} \end{aligned}$$

Behauptung: Die Zahlenfolge

$$a_n = [na_1^r - (n-1)a_0^r]^{\frac{1}{r}} = [a_0^r + n(a_1^r - a_0^r)]^{\frac{1}{r}}$$

beschreibt für $r = 1$ eine arithmetische, für $r = 0$ eine geometrische und für $r = -1$ eine harmonische Folge mit den Anfangsgliedern $a_0 > 0$ und $a_1 > 0$.

Beweis: Die Fälle $r = 1$ und $r = -1$ sind trivial.

$r = 0$:

$$[na_1^r - (n-1)a_0^r]^{\frac{1}{r}} = e^{\ln[na_1^r - (n-1)a_0^r]^{\frac{1}{r}}} = e^{\frac{\ln[na_1^r - (n-1)a_0^r]}{r}}$$

Der Quotient

$$\frac{f(r)}{g(r)} = \frac{\ln[na_1^r - (n-1)a_0^r]}{r}$$

erfüllt wiederum die Voraussetzungen für die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital.

$$\frac{f'(r)}{g'(r)} = f'(r) = \frac{na_1^r \cdot \ln a_1 - (n-1)a_0^r \cdot \ln a_0}{na_1^r - (n-1)a_0^r}.$$

Somit wird

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{na_1^r \cdot \ln a_1 - (n-1)a_0^r \cdot \ln a_0}{na_1^r - (n-1)a_0^r} &= \frac{n \cdot \ln a_1 - (n-1) \cdot \ln a_0}{n - (n-1)} = \frac{\ln(a_1)^n - \ln(a_0)^{n-1}}{1} \\ &= \ln\left(\frac{a_1^n}{a_0^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

und schliesslich folgt

$$\lim_{r \rightarrow 0} [na_1^r - (n-1)a_0^r]^{\frac{1}{r}} = \frac{a_1^n}{a_0^{n-1}} = a_0 \cdot \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n$$

Wir erhalten die explizite Beschreibung einer geometrischen Folge mit den Anfangsgliedern a_0 und a_1 (siehe (5)). wzzw.

Die Folge

$$a_n = [na_1^r - (n-1)a_0^r]^{\frac{1}{r}} = [a_0^r + n(a_1^r - a_0^r)]^{\frac{1}{r}}$$

ist also tatsächlich eine Verallgemeinerung von arithmetischen, geometrischen und harmonischen Folgen. Die bekannteste harmonische Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ erhält man mit $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$ und $r = -1$.

Im nächsten Abschnitt ersetzen wir die Zahl $n \in \mathbf{N}_0$ durch $x \in \mathbf{R}$ und untersuchen die so entstehende Funktion.

Verallgemeinerte Funktion

Da jede Zahlenfolge als Funktion mit Definitionsmenge \mathbf{N}_0 aufgefasst werden kann, wird die oben beschriebene Folge durch Erweitern der Definitionsmenge zu einer reellen Funktion.

Definition Zu zwei (positiven) reellen Zahlen a_0 und a_1 setzen wir

$$f_r(x) = [a_0^r + x(a_1^r - a_0^r)]^{\frac{1}{r}} ; \quad r \in \mathbf{R} \tag{11}$$

Bemerkung: Die Definitionsmenge der Funktion f_r hängt von r und von der Wahl von a_0 und a_1 ab.

Durch besondere Wahl von a_0 , a_1 und r erhält man mit (11) zahlreiche elementare Funktionen:

Funktion(styp)	r	a_0	a_1	Funktionsgleichung
Potenzfunktionen	> 0	0	1	$f_{1/r}(x) = x^r$
Wurzelfunktionen	$n \in \mathbf{N}$	0	1	$f_n(x) = \sqrt[n]{x}$
Quadratwurzelfunktion	2	0	1	$f_2(x) = \sqrt{x}$
Exponentialfunktionen	0	A	$A \cdot b$	$f_0(x) = A \cdot b^x$
Affine Funktionen	1	q	$m + q$	$f_1(x) = mx + q$
Besondere rationale Funktion	-1	$\frac{1}{q}$	$\frac{1}{m+q}$	$f_{-1}(x) = \frac{1}{mx+q}$

So ist

$$f_r(x) = [a_0^r + x(a_1^r - a_0^r)]^{\frac{1}{r}} ; \quad r \in \mathbf{R}$$

eine Verallgemeinerung aller Funktionen, die in der obigen Liste aufgeführt sind.

Bemerkung: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kann nicht direkt erzeugt werden.

Mit $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$ gilt aber $f_{-1}(x - 1) = \frac{1}{x}$.

Schlussbemerkung: Die oben vorgestellte Zahlenfolge a_n und die Funktion f_r müssten eigentlich bekannt und schon untersucht worden sein. Hinweise nimmt der Autor dankbar entgegen.

Literatur:

[1] G. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polyá, Inequalities, Second edition, Cambridge Mathematical Library, 1952

Drei Sätze über ebene Polygonzüge

Christian Blatter

1. Einleitung. Von den drei angesagten Polygonsätzen handeln die ersten beiden – der Jordansche Kurvensatz und der Umlaufsatz von Hopf – im Grunde genommen von “beliebigen” Kurven; nur der nachgeschobene Satz von Pick über den Flächeninhalt von Gitterpolygonen ist strikt ein Satz über Polygone. Der Jordansche Kurvensatz ist ein zentraler Satz der ebenen Geometrie; aber sein Beweis ist so aufwändig, dass sich nur die wenigsten Studenten je damit befassen müssen. Der Umlaufsatz von Hopf ist an sich einfacher; aber ein schlanker Beweis verlangt begriffliche Hilfsmittel, die an der Schule nicht zur Verfügung stehen. Indem wir diese Sätze auf Polygonniveau herunterbrechen, können wir viele Schwierigkeiten eliminieren, ohne an “globaler Geometrie” einzubüßen. Gleichzeitig steht uns damit das starke Werkzeug der vollständigen Induktion zur Verfügung, das erlaubt, geometrisch noch so komplexe Situationen in der Induktionsannahme abzulegen und in einem übersichtlichen Induktionsschritt weiterzuentwickeln. Unser Argumentieren wird sich auf einem Level bewegen, das Gymnasiasten zugänglich ist und ihnen ein mathematisches Erlebnis vermittelt, das über den Alltagstrott hinausweist.

2. Der Jordansche Kurvensatz. Eine *einfach geschlossene Kurve*, kurz: *Jordankurve*, ist das injektive und stetige Bild γ einer Kreislinie in der euklidischen Ebene E . Man stelle sich eine zur Endlosschleife verknotete Schnur vor, die ohne Überkreuzungen auf dem Tisch liegt. Der *Jordansche Kurvensatz* besagt, dass eine derartige Kurve die Ebene in genau zwei Gebiete zerlegt: ein *Innengebiet*, das beschränkt ist und topologisch äquivalent zu einer Kreisscheibe, und ein *Außengebiet*. Dies entspricht unserer Alltagserfahrung, und wir machen uns etwa beim Argumentieren über planare Graphen keinen zweiten Gedanken darüber. Jordan war der erste, der festgestellt hat, dass der beschriebene Sachverhalt nicht selbstverständlich ist, sondern ein *Satz*. Treffen dessen Voraussetzungen nicht zu, so sind andere Situationen möglich: Ist die Abbildung $f: S^1 \rightarrow E$, die γ erzeugt, nicht injektiv, so entstehen mehr als zwei Gebiete (siehe die Fig. 2, rechts). Eine Kurve, die einmal um einen Torus herumgeht, zerlegt die Torusfläche nicht, und auch ein Möbiusband zerfällt nicht in zwei Teile, wenn man es längs der Mittellinie zerschneidet. Jordans Beweis (1887) war allerdings nicht ganz wasserdicht, und heute wird Veblen (1905) die Priorität für einen korrekten Beweis zugeschrieben. Ein Beweis aus neuerer Zeit ist der von Twerberg [4], er beginnt ebenfalls mit Polygonen ...

Jeder Beweis des Kurvensatzes in seiner allgemeinen Form muss mit zwei ganz verschiedenen Schwierigkeiten fertig werden: Erstens mit der komplizierten Gestalt, die auch eine “schöne” Jordankurve haben kann (siehe die Fig. 1), und zweitens mit der unter Umständen sehr gekräuselten Mikrostruktur einer nur als stetig vorausgesetzten Kurve – man denke an die Kochsche Schneeflockenkurve oder an immer kleinere Spiralen und Gegenspiralen, die iterativ auf eine einfache Ausgangskurve aufgesetzt werden. Viele Beweise, zum Beispiel der in [1], setzen daher γ von Anfang an als stetig differenzierbar voraus. Dann ist jederzeit klar, ob man die Kurve tatsächlich überschritten hat oder nicht. Wir schränken uns hier sogar auf Polygonzüge ein. Auch mit Polygonzügen lassen sich beliebig vertrackte geometrische Situationen produzieren, eine “fraktale Kräuselung” allerdings nicht.

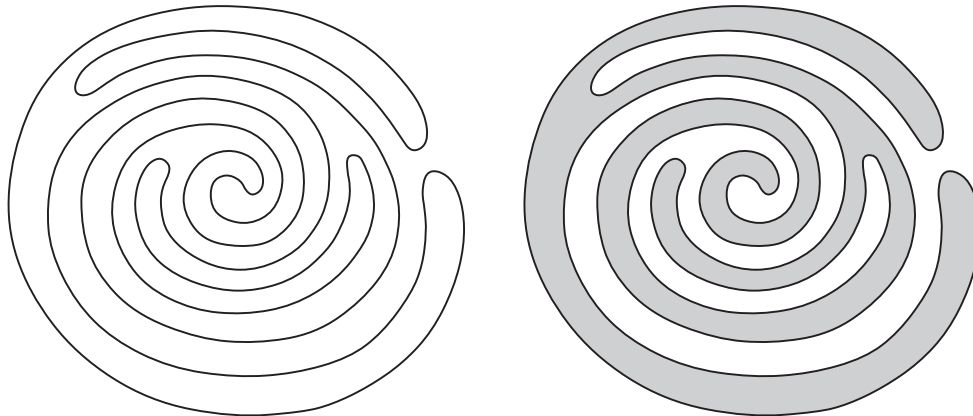


Fig. 1

Das Folgende spielt sich in der euklidischen Ebene E ab, wenn nötig mit einem rechtwinkligen (x, y) -Koordinatensystem versehen. Ein $(n + 1)$ -Tupel (z_0, \dots, z_n) von Punkten $z_k \in E$ definiert durch Aneinanderhängen der Streckenwege $\sigma_k := [z_{k-1}, z_k]$ ($1 \leq k \leq n$) einen Streckenzug γ von z_0 nach z_n . Ein derartiges γ besitzt eine stetige und stückweise lineare Parameterdarstellung $t \mapsto z(t)$ mit $z(k) = z_k$ ($0 \leq k \leq n$). Die Vereinigung der Teilstrecken σ_k , eine kompakte Teilmenge von E , bezeichnen wir ebenfalls mit γ . Eine offene Menge $\Omega \subset E$ ist *zusammenhängend*, wenn es für je zwei Punkte $a, b \in \Omega$ einen Streckenzug γ von a nach b gibt, der ganz in Ω liegt. Im Allgemeinen zerfällt aber eine offene Menge Ω in disjunkte *Zusammenhangskomponenten*, kurz: *Komponenten*. Zwei Punkte $a, b \in \Omega$ gehören genau dann zur gleichen Komponente, wenn sie sich durch einen ganz in Ω liegenden Streckenzug miteinander verbinden lassen.

Ist $\gamma = (z_0, \dots, z_n)$, $n \geq 3$, ein Streckenzug mit $z_0 = z_n$ und $z(t) \neq z(t')$ ($t < t'$), ausser wenn $(t, t') = (0, n)$, so heisst γ ein *einfach geschlossener Polygonzug* oder ein *n -Jordanzug*. Für derartige Polygonzüge nimmt der Jordansche Kurvensatz die folgende Form an:

Satz 1. (a) *Es sei γ ein n -Jordanzug in der Ebene E . Dann zerfällt die Menge $E \setminus \gamma$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten Ω_i und Ω_a . Bei einmaligem Überschreiten von γ wechselt man von der einen in die andere Komponente.*

(b) *Das sogenannte Innengebiet Ω_i lässt sich durch Diagonalen triangulieren und ist topologisch äquivalent zu einem konvexen n -Eck.*

(c) *Das Aussengebiet Ω_a ist unbeschränkt und enthält alle Punkte $z \in E$, die hinreichend weit von γ entfernt sind.*

Wir beweisen den Satz 1 in Abschnitt 5.

3. Der Umlaufsatz von Hopf. Ein Wanderer unternimmt eine je nachdem verschlungene, aber stückweise glatte Rundwanderung

$$\gamma: t \mapsto z(t) \in E \quad (0 \leq t \leq T), \quad z(0) = z(T).$$

Längs der glatten Wegstücke hat sein Fortschreiten in jedem Moment ein ganz bestimmtes Azimut, *vulgo*: eine bestimmte Himmelsrichtung $\theta(t)$, und diese Richtung ändert sich kontinuierlich längs

gebogenen Wegstücken. In den Knickpunkten $z_k := z(t_k)$ von γ ändert sich $\theta(t)$ abrupt um den Winkel $\phi_k := \theta(t_k+) - \theta(t_k-)$, dabei gilt $-\pi < \phi_k < \pi$. Wir können die infinitesimalen und die abrupten Richtungsänderungen unter Berücksichtigung des Vorzeichens laufend aufaddieren: Ein 45° -Schwenk nach links schlägt mit $+\frac{\pi}{4}$ zu Buche (siehe die Fig. 2, links), ein Viertelkreis rechtsherum ändert θ um 90° und liefert den Beitrag $\phi = -\frac{\pi}{2}$, undsoweiter. Kommt der Wanderer mit anderem Azimut am Ausgangspunkt an, als er gestartet war, so ist natürlich ein entsprechender Schwenk mitzuzählen. Was lässt sich über die algebraische Summe Σ_γ dieser Richtungsänderungen sagen? Es ist klar, dass Σ_γ ein Vielfaches von 2π ist; das heisst, es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$\Sigma_\gamma = n \cdot 2\pi .$$

Die Fig. 2, rechts, zeigt, dass für die Zahl n beliebige ganzzahlige Werte möglich sind.

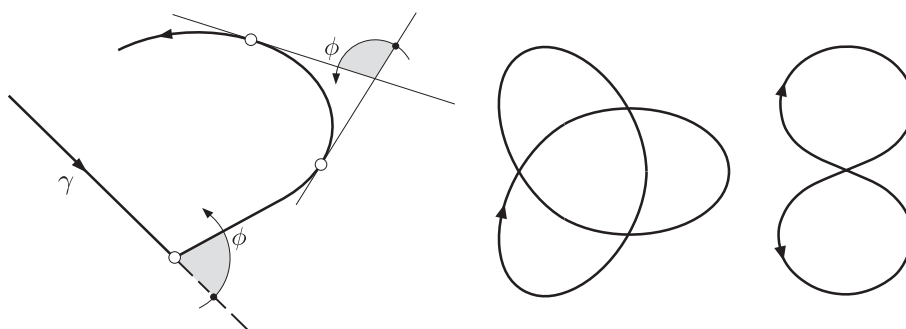


Fig. 2

Wenn wir nun annehmen, dass unser Wanderer an keinem Ort mehr als einmal vorbeikommt, so ist γ eine geschlossene Jordankurve. Hopf hat 1935 bewiesen [3], dass in diesem Fall $n = 1$ oder $n = -1$ sein muss. Bei einem konvexen Rundweg scheint das selbstverständlich; bei der Jordankurve von Fig. 1 müsste man es zur Sicherheit nachprüfen! Dieser “wohl auf Riemann zurückgehende” (so Hopf), aber heute nach ihm benannte *Umlaufsatz* ist gültig für beliebige stückweise stetig differenzierbare Jordankurven. Wir beweisen ihn in Abschnitt 6 für Jordanzüge:

Satz 2. (a) *Es sei γ ein Jordanzug in der Ebene E . Dann ist die algebraische Summe Σ_γ der Richtungsänderungen längs γ gleich 2π oder gleich -2π .*

Bei Satz 1 hat der Umlaufsinn von γ um Ω_i keine Rolle gespielt; dieses Mal müssen wir uns aber darum kümmern. Der Jordanzug γ hat nämlich nicht nur eine Innen- und eine Aussenseite, sondern auch eine linke und eine rechte Seite, die an die Fortschrittrichtung geknüpft sind: Wird im Mittelpunkt jeder Teilstrecke $[z_{k-1}, z_k] \subset \gamma$ ihr Richtungsvektor $u_k := (\cos \theta_k, \sin \theta_k)$ angeheftet und dreht man diese Vektoren an Ort und Stelle um 90° im Gegenuhrzeigersinn, so weisen die gedrehten Vektoren u_k^* entweder alle ins Innengebiet oder alle ins Aussengebiet von γ . Im ersten Fall sagen wir, das Innengebiet Ω_i befinde sich *zur Linken* von γ . Wir können damit die Aussage des Satzes wie folgt präzisieren:

(b) *Befindet sich Ω_i zur Linken von γ , so ist $\Sigma_\gamma = 2\pi$, andernfalls ist $\Sigma_\gamma = -2\pi$.*

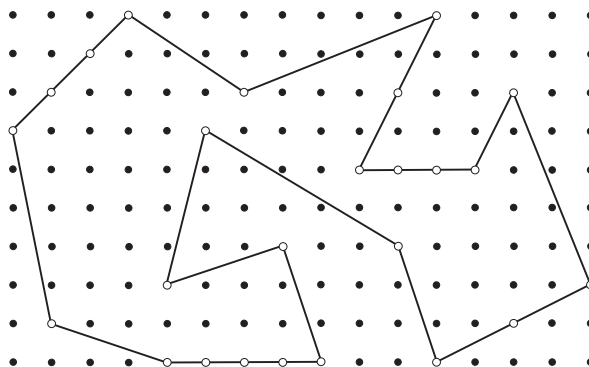


Fig. 3

4. Der Satz von Pick über den Flächeninhalt von Gitterpolygonen. Der Satz von Pick handelt von Jordanzügen $\gamma = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_0)$, deren Teilpunkte z_k ganzzahlige Koordinaten besitzen. Es geht also um das Gitter $\mathbb{Z}^2 \subset E$. Ausser den gegebenen z_k können noch weitere Gitterpunkte “zufällig” auf γ liegen und sollen an entsprechender Stelle in die Liste der z_k aufgenommen werden, siehe die Fig. 3. Das Polygon $P := \overline{\Omega_i}$ besitze also insgesamt n_r Randgitterpunkte; ferner gibt es $n_i \geq 0$ innere Gitterpunkte. Unter diesen Annahmen gilt folgende *Formel von Pick* für den Flächeninhalt $A(P)$:

Satz 3.

$$A(P) = n_i + \frac{n_r}{2} - 1 .$$

Von diesem Satz gibt es unzählige Beweise. Die meisten operieren mit einer Triangulation von P durch Diagonalen und der nachfolgenden Analyse einzelner Dreiecke. Im Anschluss an den Beweis der Sätze 1 und 2 könnten wir mit dem vorhandenen Apparat auch für den Satz von Pick einen derartigen Induktionsbeweis anstrengen, argumentieren aber lieber mit Hilfe eines physikalischen Gedankenexperiments [2].

Beweis von Satz 3. Es gibt nur endlich viele Gitterpunkte, die nicht auf γ liegen, aber einen Abstand ≤ 1 von γ haben. Unter den auftretenden Abständen gibt es einen kleinsten; es sei $d > 0$ dieser kleinste Abstand.

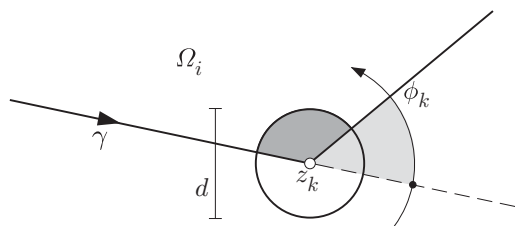


Fig. 4

Wir stellen nun auf jeden Gitterpunkt der Ebene eine Kerze mit Durchmesser d und Volumen 1. Die Grundfläche jeder Kerze enthält zwei Teilstücke von γ der Gesamtlänge d , aber keine weiteren Punkte von γ (siehe die Fig. 4). Werden diese Kerzen simultan zum Schmelzen gebracht,

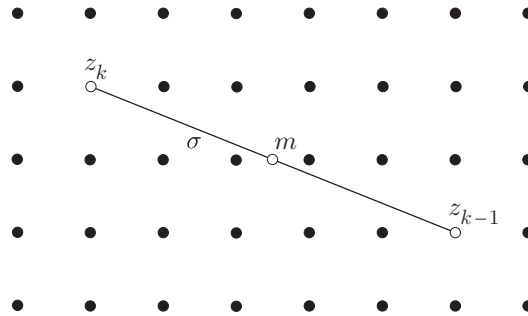


Fig. 5

so entsteht ein See aus flüssigem Wachs, der die ganze Ebene mit der konstanten Höhe 1 bedeckt. Das Wachsvolumen V über dem Polygon P beträgt daher genau $A(P)$.

Woher kommt dieses Wachs? Es sei $\sigma := [z_{k-1}, z_k]$ eine Teilstrecke von γ und m deren Mittelpunkt. Wie man der Figur 5 entnimmt, ist der ganze unendliche Kerzenwald zentralsymmetrisch bezüglich m . Per saldo ist also kein Wachs über die Strecke σ geflossen, und das gilt für jede Teilstrecke von γ . Somit ist das Wachsvolumen V über dem Polygon P am Ende des Prozesses dasselbe wie am Anfang und ist bestimmt durch die Kerzen auf den inneren Gitterpunkten und den Randgitterpunkten von P . Die inneren Kerzen liefern zusammen das Volumen n_i . Liegt Ω_i zur Linken von γ , so liefert die Kerze im Randgitterpunkt z_k den Volumenbeitrag

$$\frac{1}{2} - \frac{\phi_k}{2\pi},$$

wobei $\phi_k \in]-\pi, \pi[$ die Schwenkung von γ an der Stelle z_k darstellt (Fig. 4). Auf Grund von Satz 2 haben wir daher

$$A(P) = V = n_i + \sum_{k=1}^{n_r} \left(\frac{1}{2} - \frac{\phi_k}{2\pi} \right) = n_i + \frac{n_r}{2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^r \phi_k = n_i + \frac{n_r}{2} - 1.$$

□

5. Beweis von Satz 1. Die Aussagen des Satzes treffen offensichtlich zu, falls $n = 3$. (Hier wurde schon benutzt, dass wir uns in der Ebene befinden!). Im Weiteren sei daher $n \geq 4$ und der Satz richtig für beliebige m -Jordanzüge mit $3 \leq m < n$.

Als erstes verschaffen wir uns eine Ecke von γ , bei der klar ist, was innen ist und was aussen: Unter den z_k mit maximaler x -Koordinate gibt es eines mit maximaler y -Koordinate; nach zyklischer Ummummerierung dürfen wir annehmen, das sei z_0 . In der Umgebung von z_0 haben wir dann die Situation von Fig. 6, (i)–(ii), wobei γ auch rechtsherum gehen könnte. Das würde aber an den folgenden Überlegungen nichts ändern.

Es bezeichne Δ das abgeschlossene Dreieck $[z_{n-1}, z_0, z_1]$ und γ^* den nach Entfernung des Teilstücks (z_{n-1}, z_0, z_1) verbleibenden Hauptteil $(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ von γ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

- (i) Hat γ^* nur die Punkte z_1 und z_{n-1} mit Δ gemein, so sind sowohl $\gamma' := (z_0, z_1, z_{n-1}, z_0)$ wie $\gamma'' := (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_1)$ Jordanzüge mit weniger als n Teilstrecken, darunter die gemeinsame Teilstrecke $\delta := [z_{n-1}, z_1]$.

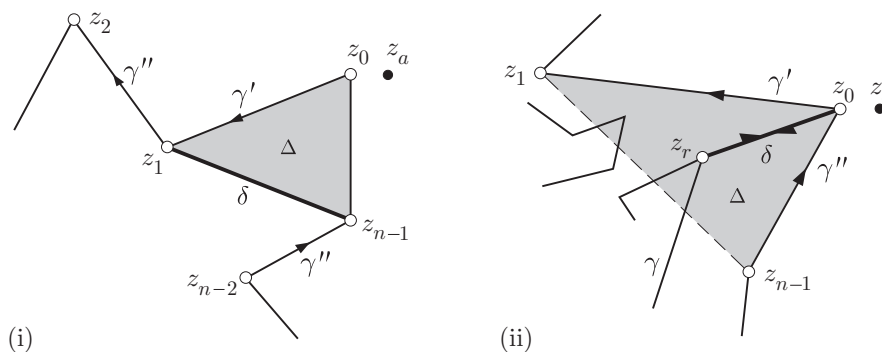


Fig. 6

- (ii) Trifft (i) nicht zu, so gibt es in Δ Punkte von γ^* mit maximalem Abstand von $[z_{n-1}, z_1]$, darunter wenigstens ein z_r mit $1 < r < n - 1$. Die Strecke $\delta := [z_0, z_r]$ hat nur die Punkte z_0 und z_r mit γ gemein, folglich sind $\gamma' := (z_0, z_1, \dots, z_r, z_0)$ und $\gamma'' := (z_0, z_r, z_{r+1}, \dots, z_{n-1}, z_0)$ zwei Jordanzüge mit weniger als n Teilstrecken, darunter die gemeinsame Teilstrecke δ .

In beiden Fällen können wir auf γ' und γ'' die Induktionsvoraussetzung anwenden: Die Menge γ' zerlegt E in zwei Gebiete Ω'_i und Ω'_a , so dass die Aussagen (a)–(c), bezogen auf γ' , gelten, und das Analoge trifft zu für γ'' . Da man von z_0 aus beliebig weit nach rechts gehen kann, ohne wieder auf γ' oder γ'' zu treffen, gehören die Punkte unmittelbar rechts von z_0 sowohl zu Ω'_a wie zu Ω''_a . Ein derartiger Punkt werde markiert und mit z_a bezeichnet.

Im Fall (i) ist Ω'_i das Innere des Dreiecks Δ . Von z_a aus gelangt man durch Überschreiten von $[z_1, z_2] \subset \gamma''$ ins Innengebiet Ω''_i . Die beiden Gebiete Ω'_i und Ω''_i stossen also längs δ aneinander. Im Fall (ii) gehören die nahe bei z_0 gelegenen Punkte des Sektors $\sphericalangle(z_r, z_0, z_1)$ dem Gebiet Ω'_i und die nahe bei z_0 gelegenen Punkte des Sektors $\sphericalangle(z_{n-1}, z_0, z_r)$ dem Gebiet Ω''_i an. Auch in diesem Fall stossen die beiden Gebiete Ω'_i und Ω''_i längs δ aneinander.

Dies legt nahe, das zu γ gehörende Innengebiet Ω_i wie folgt zu definieren:

$$\Omega_i := \Omega'_i \cup \Omega''_i \cup \delta^\circ ;$$

dabei bezeichnet δ° die jeweilige Strecke δ ohne deren Endpunkte. Die Menge Ω_i ist offensichtlich zusammenhängend.

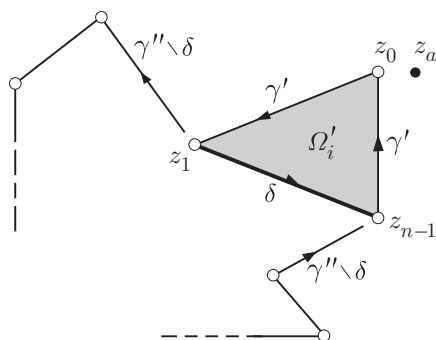


Fig. 7

Der Jordanzug γ'' hat nur die Strecke δ mit γ' gemein; folglich gehören alle Punkte von $\gamma'' \setminus \delta$ zur gleichen Komponente von $E \setminus \gamma'$, und ein Blick auf z_a in der Fig. 7 zeigt, dass das die Komponente Ω'_a sein muss. Somit hat γ'' keine Punkte mit Ω'_i gemein. Folglich liegen alle Punkte von Ω'_i in der gleichen Komponente von $E \setminus \gamma''$, und ein Blick auf z_a zeigt, dass das die Komponente Ω''_a sein muss. Somit gilt $\Omega'_i \subset \Omega''_a$; und daraus folgt weiter, dass die beiden Teilgebiete Ω'_i und Ω''_i disjunkt sind.

Nach Induktionsvoraussetzung besitzen sowohl Ω'_i wie Ω''_i eine Triangulation durch Diagonalen. Ergänzt man diese Triangulationen durch die Diagonale δ , so erhält man eine Triangulation von Ω_i durch Diagonalen. Es sei jetzt $P = (w_0, w_1, \dots, w_r, \dots, w_{n-1}, w_0)$ ein beliebiges konvexes n -Eck, und für jede Diagonale $[z_j, z_k]$ von Ω_i werde die entsprechende Diagonale $[w_j, w_k]$ in P gezeichnet. Jedes Dreieck $[z_j, z_k, z_l]$ der Triangulation von Ω_i lässt sich affin auf das entsprechende Dreieck $[w_j, w_k, w_l]$ von P abbilden. Da die Teilverhältnisse auf den Dreiecksseiten erhalten bleiben, entsteht dabei insgesamt eine bijektive, stetige und stückweise lineare Abbildung von Ω_i auf P .

Inspiziert von der Figur definieren wir nun das zu γ gehörende Aussengebiet Ω_a durch

$$\Omega_a := \Omega'_a \cap \Omega''_a .$$

Man überzeugt sich anhand der Regeln für \cup und \cap leicht davon, dass die drei Mengen γ , Ω_i und Ω_a eine disjunkte Zerlegung der Ebene E bilden. Die folgenden zwei Dinge sind jedoch nicht selbstverständlich: (i) Beim Überschreiten von γ wechselt man von Ω_i nach Ω_a oder umgekehrt, und (ii) Ω_a ist zusammenhängend.

Ad (i): Bei einmaligem Überschreiten von γ überschreitet man γ' oder γ'' , aber nicht beide. Man wechselt also z.B. von $\Omega'_i \subset \Omega''_a \cap \Omega_i$ nach Ω'_a (oder umgekehrt), bleibt aber in Ω''_a . Folglich wechselt man von Ω_i nach Ω_a .

Ad (ii): Es sei z ein beliebiger Punkt von Ω_a , und es sei z_* der z am nächsten gelegene Punkt von γ . Man kann dann von z aus zunächst bis kurz vor z_* gehen und anschliessend in sehr kleinem Abstand dem "Zaun" γ entlang bis zum Punkt z_a , ohne γ je zu überschreiten. Somit lässt sich jeder Punkt $z \in \Omega_a$ durch einen in Ω_a verlaufenden Streckenzug mit z_a verbinden. \square

6. Beweis von Satz 2. Für Dreieckszüge $\gamma := (z_0, z_1, z_2, z_0) \subset E$ trifft das Behauptete zu: Befindet sich Ω_i zur Linken von γ , so ist Σ_γ gleich der Summe der drei Aussenwinkel und damit gleich der doppelten Summe der Innenwinkel des Dreiecks $\Delta := [z_0, z_1, z_2]$, also gleich 2π . Im Weiteren sei daher $n \geq 4$ und der Satz richtig für beliebige m -Jordanzüge mit $m < n$.

Wir benützen weiterhin die Beweisordnung von Satz 1 und nehmen zusätzlich an, Ω_i befinde sich zur Linken von γ . Dann befindet sich Ω'_i zur Linken von γ' und Ω''_i zur Linken von γ'' . Es bezeichne Φ (resp. Φ' , Φ'') die Summe der Schwenkungen von γ (resp. γ' , γ'') in den Endpunkten der Diagonale δ . Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\Sigma_\gamma = (\Sigma_{\gamma'} - \Phi') + (\Sigma_{\gamma''} - \Phi'') + \Phi = 4\pi + \Phi - \Phi' - \Phi'' .$$

Wir müssen uns also mit der Diagonale δ beschäftigen. Hierzu dient die Figur 8. Nach Konstruktion sind die eingezeichneten Winkel α' , α'' , β' , β'' alle > 0 . Die Schwenkung von γ' an der Stelle z_r beträgt dann $\pi - \alpha'$. Insgesamt hat man

$$\Phi' = (\pi - \alpha') + (\pi - \beta') , \quad \Phi'' = (\pi - \alpha'') + (\pi - \beta'') .$$

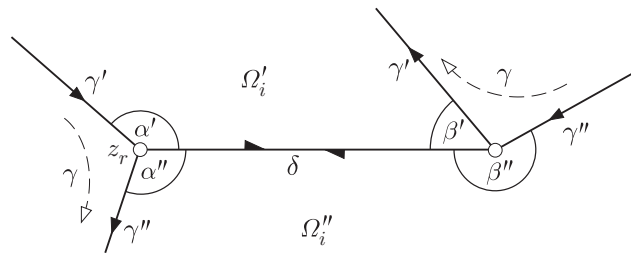


Fig. 8

Bezüglich Φ kann man folgendermassen überlegen: Der auf γ' daherkommende Wanderer schwenkt im Punkt z_r zunächst in die Richtung von δ , besinnt sich dann aber und macht zusätzlich einen Rechtsschwenk der Grösse α'' ; und analog im anderen Endpunkt von δ . Zusammen ergibt sich

$$\Phi = (\pi - \alpha' - \alpha'') + (\pi - \beta'' - \beta')$$

und folglich

$$\Phi - \Phi' - \Phi'' = -2\pi,$$

was zu beweisen war. □

Literatur

- [1] Marcel Berger & Bernard Gostiaux: *Géométrie différentielle: Variétés, courbes et surfaces*. 2e éd., Paris 2005.
- [2] Christian Blatter: *Another proof of Pick's area theorem*. Math. Mag. 70 (1997), 200. – <http://www.math.ethz.ch/~blatter/Pick.pdf>
- [3] Heinz Hopf: *Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven*. Compositio Math. 2 (1935), 50–62. – <http://www.math.harvard.edu/~knill/graphgeometry/hopf/>
- [4] Helge Tverberg: *A proof of the Jordan curve theorem*. Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 34–38 – <http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/jordan/tverberg.pdf>

E-mail-Adresse des Autors: christian.blatter@math.ethz.ch

EGMO – European Girls‘ Mathematical Olympiad

Im April 2012 fand zum ersten Mal ein neuer internationaler Mathematikwettbewerb statt, aber nicht irgendeiner, sondern einer spezifisch für Mädchen im gymnasialen Alter. Die Idee für den Wettbewerb kam aus China, denn dort gibt es schon seit dem Jahr 2002 die China Girls Mathematical Olympiad, welche ins Leben gerufen wurde, um mehr junge Mädchen für Mathematik zu begeistern. Schliesslich sprang der Funke auch nach Europa über und es entstand die European Girls‘ Mathematical Olympiad, welche nun zum ersten Mal im Murray Edwards College in Cambridge durchgeführt wurde.

Auch die Schweiz nahm teil und entsandte die vier begabten Mädchen Laura Gremion, Viviane Kehl, Charlotte Junod und Jana Cslovjecsek als Teilnehmerinnen inklusive Le Thanh Tu Nguyen als Leader und Raphael Steiner als Deputy Leader. Am Tag nach der Ankunft fand am Morgen die Opening Ceremony mit Musik, Reden und dem Vorstellen der Teams statt. Am Nachmittag waren diverse sportliche Aktivitäten angesagt, unter anderem Fussball, Frisbee, Boules und Krocket. Tags darauf wurde es ernst, denn es waren Prüfungen angesagt und die Aufgaben waren, wie zu erwarten, auf einem hohen Niveau. Nach der harten Arbeit für den Geist war am Abend der zweiten Prüfung Spass für den Körper bei traditioneller Musik und Tanzen angesagt. Am folgenden Tag mussten die Leaders und Deputy Leaders die Punkte für ihre Teilnehmerinnen aushandeln, währenddessen für die Teilnehmerinnen selbst ein Ausflug auf dem Plan stand. – Dieser hinterliess folgenden Eindruck bei Viviane Kehl:

„Am Nachmittag nach der zweiten Prüfung stand auf dem Programm ‚punting‘. Deshalb waren wir schon etwas überrascht, als wir zuerst ins Touristeninformationszentrum gingen und einen Film über Cambridge anschauten. Lustig war, dass der Film auf alt gemacht war und er deshalb immer wieder stockte, und zwar regelmässig. Ansonsten war er nicht so spannend. Danach durften wir dann endlich unser punt in Beschlag nehmen und die Sicht auf verschiedenste Colleges geniessen. Der Tour Guide erzählte uns viele interessante Geschichten. Schliesslich nahm Laura die Gelegenheit wahr, auch selbst einmal das Boot zu fahren und dies erstaunlich gerade. Dann kamen wir leider schon bald wieder am Ausgangsort an und mussten wieder aussteigen. Die gemütliche Flussfahrt hat sich jedenfalls gelohnt!“

Spät am Abend standen dann die Resultate fest und die Schweiz konnte sich über zwei Bronzemedailles für Laura Gremion und Viviane Kehl freuen. Am letzten Tag gab es noch einen gemeinsamen Ausflug in den Bletchley Park, in welchem während des Zweiten Weltkriegs die deutsche Enigma decodiert wurde. Später durften auch wir versuchen, einfachere Texte zu dechiffrieren und dies mit Erfolg. Am Abend standen dann die Medaillenverleihung und ein Galadinner inklusive Unterhaltung an. – Lassen wir nochmals Viviane Kehl zu Wort kommen:

„An der EGMO gefiel mir besonders gut, dass wir viele neue Leute kennen lernten und diese uns lustige Spiele zeigten. Ebenfalls toll war, dass die Guides Studentinnen von Cambridge waren und wir dank diesen in den Colleges die ‚closed to visitors‘ – Schilder problemlos überschreiten konnten. Somit bekamen wir einen spannenden Einblick in die Colleges.“

Die nächste EGMO findet 2013 in Luxemburg statt. Weitere Informationen zur EGMO sind hier zu finden: <http://www.egmo2012.org.uk>

Raphael Steiner
Mitglied des Vereins Imosuisse
<http://www.imosuisse.ch>

Aha! Mathematik!

Urs Stambach

Mit dem Beitrag *Die mathematische Geschichte von Romeo und Julia* beginnt in dieser Ausgabe eine kurze Reihe von kleinen mathematischen Geschichten. Dazu sind einige einleitende Bemerkungen notwendig. Wohl alle Mathematik-Lehrer und -Lehrerinnen und auch viele Schüler und Schülerinnen stimmen darin überein, dass im mathematischen Lernprozess Aha-Erlebnisse eine wichtige Rolle spielen: In solchen Momenten wird ein bisher unvollständig verstandener Sachverhalt plötzlich einfach und völlig klar; was vorher nur unscharf und vielleicht sogar falsch im Gedächtnis abgespeichert war, wird auf einen Schlag selbstverständlich und durchsichtig. Hinzu kommt die Erfahrung, dass die so gewonnenen Erkenntnisse besonders fest im Gedächtnis haften bleiben. *Derartige Aha-Erlebnisse liegen den folgenden kleinen Geschichten zugrunde.* Jede dieser Geschichten hat einen autobiographischen Kern, denn die angesprochenen mathematischen Punkte waren – wie ich mich erinnere – in der einen oder anderen Form seinerzeit bei mir selbst Auslöser von Aha-ähnlichen Erlebnissen. Die zugehörigen Rahmengeschichten allerdings habe ich mit erheblicher dichterischer Freiheit gestaltet, – und auch mit etwas Humor, denn ich bin der Meinung, dass Humor der Sache nur dienen kann: Mathematik braucht nicht immer todernst daherzukommen.

Die Texte dieser Reihe sind nicht nur für Mathematiklehrer und -lehrerinnen gedacht, sondern ebenso sehr für die Schüler und Schülerinnen. Ich bin überzeugt, dass sie zum richtigen Unterrichtszeitpunkt zu einem fruchtbaren Nachdenken anregen können. Ich hoffe sogar, dass deren Lektüre zu engagierten Diskussionen führt und zu Überlegungen über die Grenzen der einzelnen Geschichten hinaus. Und klar wird den Schüler und Schülerinnen hoffentlich auch folgendes: Wenn man Formeln unkritisch verwendet und unvollständig verstandene Regeln befolgt, so kann das dumme, manchmal sogar katastrophale Konsequenzen haben. Ein falsches Resultat zu einer Übungsaufgabe kann man ja noch verschmerzen, aber in echten Anwendungen können die Folgen weit gravierender sein: Der Absturz einer amerikanischen Mars-Sonde im Jahre 1999 ist darauf zurückzuführen, dass auf naive Art Formeln verwendet wurden, die amerikanische statt metrische Masseneinheiten voraussetzten. Und der Grund für die Finanzkrise von 2007 lag nicht zuletzt darin, dass sich viele Stellen auf Aussagen der Finanzmathematik abstützten, ohne eingehend zu prüfen, ob die Voraussetzungen dafür auch wirklich erfüllt waren.

Aha, so ist das! – Und nun zu Romeo und Julia!

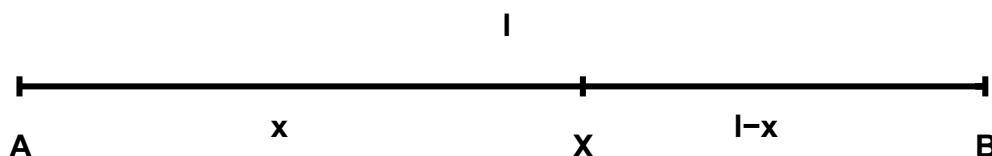
Aha! Mathematik! – Teil I.**Die mathematische Geschichte von Romeo und Julia.**

Urs Stammbach

Das Shakespeare'sche Liebespaar Romeo und Julia ist gut bekannt, das mathematische kennt kaum jemand. Romeo wohnte damals in der Stadt A und Julia in der Stadt B . Wie es sich für ein Liebespaar gehört, wollten sich die beiden periodisch treffen. Das war an sich kein Problem, da Romeo ein Auto fuhr, natürlich ein Auto der Marke Alfa. Auch Julia war motorisiert, sie verfügte über ein Motorrad, dessen Marke ich leider vergessen habe, es mag ein Motorrad der Marke Beta gewesen sein. Die beiden, besonders Julia, waren – damals schon – sehr umweltbewusst, und so bestand Julia darauf, den Treffpunkt zwischen den Städten A und B so auszuwählen, dass der Energieverbrauch für die Fahrten minimal war.

“Kein Problem”, meinte Romeo, “das ist ein klassisches Extremalproblem, das sich mathematisch behandeln lässt. Das habe ich im Mathematikunterricht am Gymnasium gelernt, und ich habe es damals – im Gegensatz zu einigen anderen – auch gut verstanden!”

Romeo witterte offenbar eine Chance, Julia zu imponieren, und er ging die Rechnung deshalb gleich ganz allgemein an.



“Mein Alfa braucht pro Kilometer a Liter Benzin, während dein Beta-Motorrad nur die Hälfte, $a/2$ Liter verbraucht. Die Entfernung unserer Städte A und B beträgt l Kilometer. Wir wollen uns irgendwo dazwischen, sagen wir in X treffen. Die Distanz AX sei x Kilometer; dann ist die Distanz XB natürlich $l - x$ Kilometer. Bist du einverstanden, Julia?”

Julia nickte, und Romeo fuhr fort:

“Jetzt kommt die geniale Rechnung! Der Benzingesamtverbrauch $G = G(x)$ unserer Fahrten hängt natürlich vom Ort X ab, an dem wir uns treffen wollen. Also:

$$G(x) = 2 \cdot a \cdot x + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot (l - x) .$$

Romeo fühlte sich auf der Höhe seines erworbenen Wissens!

“Um das Minimum des Benzinverbrauchs, also der Funktion $G(x)$ zu bestimmen, muss man etwas Differentialrechnung beherrschen; man muss die Funktion nach der Variablen x ableiten und die Ableitung gleich Null setzen. Das ist in diesem Fall *sehr* einfach; nämlich

$$G'(x) = 2 \cdot a - a \stackrel{!}{=} 0 .$$

Nach kurzer Überlegung wurde Romeo nachdenklich. Er hatte bemerkt, dass sich seine Gleichung offenbar auf $a = 0$ reduzierte. Das war offenbar ein Unsinn, denn a ist die Konstante, die den Benzinverbrauch der Fahrzeuge bestimmt. Romeo fasst sich aber sofort wieder:

“Julia, es tut mir leid, unser Problem hat mathematisch keine Lösung, wir können uns deshalb in Zukunft nicht mehr treffen!”

Julia wollte ein solches Verdikt nicht akzeptieren, auch wenn Romeo es wissenschaftlich untermauert hatte. Sie überlegte kurz und meinte:

“Schau Romeo, Du magst mathematisch begabt sein, aber ich kann unser Problem auch ohne Mathematik lösen, einfach mit gesundem Menschenverstand. Da ich mit meinem Motorrad pro Kilometer nur die Hälfte Benzin verbrauche, wie Du mit deinem Superauto, ist doch klar, dass *ich* die ganze Fahrt von B nach A und zurück machen muss. Du kannst dein Auto in A stehen lassen und einfach zu Hause bleiben; ich besuche dich dort. Der Benzingesamtverbrauch ist dann $2 \cdot \frac{a}{2} \cdot l = a \cdot l$ und das ist – soweit ich sehe – wirklich das Minimum von $G(x)$.”

Romeo schaute etwas zerknirscht in die Welt. Nach kurzer Überlegung musste er aber Julia recht geben, und in der Folge trafen sich die beiden oft in A , zu Hause bei Romeo!

Trotzdem, die Sache war Romeo etwas peinlich, und er machte sich deshalb weiterhin Gedanken darüber, was denn bei seiner Rechnung schief gelaufen war. Jedenfalls war klar, einen Rechenfehler hatte er nicht gemacht. Aber weshalb findet man hier das Minimum der Funktion $G(x)$ nicht dort, wo die Ableitung $G'(x)$ Null wird? So hatte er es doch in der Schule gelernt! Hatte er etwa damals nicht gut aufgepasst? War damals im Mathematikunterricht eventuell noch die Rede davon gewesen, dass die Extrema manchmal auch an den *Grenzen des Definitionsbereiches* der Funktion angenommen werden?

Bacaër, Nicolas, A Short History of Mathematical Population Dynamics, 168 Seiten, 36.00 CHF, Springer Verlag London Ltd, 2011, ISBN 978-0-85729-114-1

Leonardo di Pisa (Fibonacci) hat im Liber Abaci von 1202 eine Aufgabe gestellt, die das Wachstum einer Kaninchenpopulation betrifft. Die heutigen Aufgaben der Populationsdynamik betreffen zum Beispiel die Struktur überalterter Bevölkerungen mit Folgen für die Sozialversicherungen, Kontrolle des Bevölkerungswachstums als Kampf gegen die Armut und den Hunger, die Ausbreitung gefährlicher Krankheiten, Resistenzbildung bei Bakterien, die Folgen genetischer Manipulationen oder einen rationalen Umgang mit beschränkten erneuerbaren Ressourcen etwa bei Fischbeständen oder beim Tropenholz. Antworten auf offene Fragen in diesen Bereichen sind von politischer und praktischer Relevanz. Mathematische Modellbildung und Computersimulationen sollen als Entscheidungshilfen dienen.

Wigner hat ‘the unreasonable effectiveness of mathematics’ als Schlagwort im Zusammenhang mit Anwendungen in der Physik zum geflügelten Wort gemacht. Bacaër ist realistisch, bescheidener und ehrlich, was die Rolle mathematischer Modelle in der Populationsdynamik betrifft: Die heute verfügbaren Modelle erfassen die hohe Komplexität der Populationsdynamik insgesamt nur mangelhaft. Naive Schlussfolgerungen verbieten sich. Gerade darum ist die Beschäftigung mit der Thematik in historischer Perspektive besonders attraktiv. Trotz allen Grenzen gibt es Fortschritte, die wir der Weiterentwicklung der Mathematik und dem Einsatz von Computern bei der Modellbildung verdanken.

Das kleine Buch schafft es, vordergründig in 26 chronologisch organisierten Kapiteln Biographien und historisch relevante Themen zur Populationsdynamik gut lesbar darzustellen. Dabei werden verschiedene Grundthemen angesprochen und teils mehrfach im jeweiligen historischen Zusammenhang erneut aufgenommen, wie beispielsweise

- Bevölkerungsentwicklung vom exponentiellen Wachstum zum Matrixmodell von Leslie und von Jäger-Beute-Systemen über chaotische Dynamik bis zur chinesischen Ein-Kind-Politik.
- Das Aussterben der Familiennamen, das Aussterben der Arten und natürliche Selektion.
- Modelle zu Risiko und Nutzen bei der Pockenimpfung und Modelle zur Ausbreitung von ansteckenden Krankheiten bis zu Perkolationssimulationen.
- Die Gesetze von Mendel, Genetik, das Gesetz von Hardy-Weinberg und Ausbreitung der Gene.

Im Hintergrund wird immer massvoll dosiert die Mathematik kurz erklärt, die zum Kern des Modelles gehört.

Mathematiklastige Textstellen sind besonders gekennzeichnet, damit sie von jenen überlesen werden können, welche sich in erster Linie für die Geschichte und die Biografien der Schlüsselpersonen interessieren. Für mathematisch Interessierte ist die Einbettung in einen historisch-biografischen Kontext eine erhellende Ergänzung zur formalen Darstellung der Mathematik.

Wer sich für die mathematische Ideengeschichte interessiert, kommt nicht darum herum, auch die entsprechenden Textstellen oder weitere Literatur zu studieren. Dazu bietet der Autor zahlreiche Hinweise auf Originalarbeiten, Links im Internet oder Vertiefungen.

Es gelingt ihm, auf engem Raum wesentliche mathematische Ideen zu motivieren und in der jeweils einfachsten Ausprägung darzustellen. Damit qualifiziert sich dieser Text als relevant zur Bereicherung des Mathematikunterrichts im Gymnasium. Einzelne Kapitel können als Ausgangspunkte für Unterrichtsprojekte oder für selbständige Schülerarbeiten dienen, in denen Programmierung und Computeranwendungen die mathematische Modellbildung vervollständigen oder noch nicht vorhandene mathematische Fertigkeiten (z.B. Lösen von Differentialgleichungen) im Sinne der Gerüstdidaktik überbrücken helfen.

Auszüge aus diesem Buch sind unbedingt nutzbar für *Anwendungen der Mathematik*. Es lohnt sich, an diesem Fallbeispiel zu studieren, wie ein Minimum an Fachkenntnissen aus dem Anwendungsgebiet zu vermitteln wäre, um mathematische Modellbildung zu lancieren. In dieser Hinsicht ist das Buch weit über die angesprochene Thematik vorbildlich.

Eine erste Version des Buches ist 2008 bei Cassini auf Französisch erschienen als *Histoires de Mathématiques et de Populations*

Ich kann das Buch vorbehaltlos und wärmstens empfehlen.

H.R. Schneebeli, Wettingen

POPULATIONSMODELLE

H.R. SCHNEEBELI, WETTINGEN

1. BEOBACHTUNGEN UND FRAGEN

1.1. **Raben.** In der Nähe meines Wohnortes versammeln sich am Abend jeweils zwischen 2000 und 3000 Raben. Es sind die unverpaarten ‘singles’ einer Population, die Nichtbrüter. Sie stellen die grosse Mehrheit der lokalen Rabenpopulation. Eine wichtige und kleine Minderheit sind die Brüter. Das sind Rabenpaare, die ein Territorium in Besitz genommen haben und es verteidigen. Die Rabenpaare leben bis zum Tod eines Partners in stabilen Partnerschaften und versuchen jedes Jahr, Nachwuchs aufzuziehen und auf ein Rabenleben vorzubereiten. Es lohnt sich, Raben genau zu beobachten. Sie sind beeindruckend intelligent und sie sind in der Lage, über Artgrenzen hinweg Beziehungen einzugehen. Raben, die in der Verteidigung gegen Raubvögel mit Elstern zusammenarbeiten, sind keine Seltenheit. Die ‘Freundschaft’ wird auch hier mit gemeinsamen Mahlzeiten gefestigt. Die Langzeitbeobachtung der Raben bringt unerwartete, ja unglaubliche Begebenheiten ans Licht.

Meine Faszination für Raben begründet sich auf einer zwanzigjährigen Erfahrung und Beziehung zum Rabenpaar, in dessen Territorium ich wohne. Sie hat mich motiviert, mich mit einem Populationsmodell für Raben zu befassen. Kann es mit Mitteln der gymnasialen Mathematik gelingen, die Entwicklung der Rabenpopulation nachzubilden? Wie müsste man es anstellen, dass zu dieser Frage eine sinnvolle Maturaarbeit gemacht werden könnte?

1.2. **Forellen.** Ich kann mich stundenlang beim Beobachten an einem Bergsee vergnügen. Beobachten führt mich auf ungewöhnliche Fragen. Stimmt es, dass sich die jungen Forellen bevorzugt im warmen Wasser ganz nahe am Ufer aufhalten? Ist es da nicht zu gefährlich? Gilt die RGT-Regel auch für die Entwicklung der Forellen? Entwickeln sie sich schneller im warmen Wasser, müssen sie vielleicht sogar das gefährvolle lichtdurchflutete Ufergebiet aufsuchen, um in der kurzen Sommerperiode genug zu wachsen, damit sie den Winter überstehen? Ganz unerwartet wurde ich bei solchen Gedanken von einem Angriff einer grösseren Forelle auf Jungtiere der eigenen Art überrascht. Nachdem ich das unerwartete Ereignis zweifelsfrei gesehen hatte, bemerkte ich, dass es sich öfter ereignet. Es ist nicht einfach eine Freveltat einer fehlgeleiteten einzelnen Forelle, es scheint sich um ein systematisches Verhalten zu handeln. Ist vielleicht Kannibalismus eine lohnende Überlebensstrategie für Forellen im Bergsee? Ist die Population der Forellen im Bergsee insgesamt als Superorganismus zu verstehen, bei dem die einzelnen Tiere nur ‘Körperteile’ darstellen? Wie würde ein Populationsmodell aussehen, das einen Fischschwarm als Organismus auffasst und bei dem

Date: 23. Januar 2012.

Kannibalismus ein Mittel ist, um die in Überzahl wachsenden Jungfische so abzuernten, dass die Biomasse der eigenen Art zugute kommt, statt dass sie andere Räuber stärkt? Wir können diese Frage durch Beobachten nicht schlüssig beantworten, aber vielleicht könnte uns ein plausibles mathematisches Modell weiterhelfen.

2. MODELLE

Populationsmodelle lassen sich mit Kenntnissen aus der elementaren Analysis und linearen Algebra schon im Gymnasium angemessen entwickeln. Biologie ist in der Schule weit weniger formalisierbar als Physik. Die meisten Experimente, auf denen Populationsmodelle beruhen, sind qualitativ beschreibend oder quantitativ auf Zählung abgestützt. Daher reichen Kenntnisse und Methoden aus der diskreten Mathematik und elementare Statistik. Die vorbereitende Einarbeitung in Populationsdynamik lässt sich auf lineares, exponentielles und logistisches Wachstum beschränken. Die Beschreibung einer durch Klassen strukturierten Population mit Leslie-Matrizen passt ins Schwerpunktfach PAM.

Wer beabsichtigt, Populationsmodelle als Thema für *Maturarbeiten* vorzuschlagen, muss diese Absicht durch gut geplante Vorbereitung im Mathematikunterricht unterstützen. Im Vergleich zur Physik ist die Einarbeitung in Differential- und Integralrechnung aber nicht zwingend, also können entsprechende Schritte im 10. oder 11. Schuljahr zum Beispiel im Zusammenhang mit diskreter Mathematik eingeflochten werden, also *bevor* die Maturarbeiten in der Regel beginnen. Auch dazu gibt es umfangreiches Übungsmaterial auf www.swisseduc.ch/mathematik, Wachstum und Zerfall (Schülerversion).

Das Forellenthema ist meines Wissens noch unbearbeitet.

Quellen Es gibt zwei verschiedene Populationsmodelle auf swisseduc.ch/mathematik.

- Das *Kormoranmodell* simuliert Fortpflanzung und Einwanderung mit affinen Abbildungen und zeigt, dass man mit Jagen die Kormoranpopulation stabilisieren könnte.
- Das Modell der *Rabenpopulation* mit linearen oder quadratischen Funktionen und Matrizen. Es kommt zum Schluss, dass Jagen die Raben nicht fernhalten kann.

Es ist nur fair, diese Texte Schülern nicht abzugeben, schon gar nicht als ‘Muster’. Sonst werden sie der Unbefangenheit und Narrenfreiheit beraubt, die Anfänger dringend zum Sammeln von Erfahrungen und zum Lernen benötigen.

Methodik und Werkzeuge Die Bearbeitung der Beispiele wird enorm erleichtert, wenn technische Teilaufgaben (zB Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren, Aufzeichnen der Graphen) an eine geeignete Software delegiert werden können. Dabei genügen schon bescheidene Hilfsmittel: ein CAS-Taschenrechner oder die entsprechende Software für den Laptop oder PC, zum Beispiel TI-voyage, TI-Nspire oder die Freeware wxMaxima oder Octave. Der Einsatz solcher Hilfsmittel ohne gute begriffliche Vorbereitung ist natürlich zwecklos. Er ist für die Verwirklichung der skizzierten Vorhaben aber unumgänglich, weil sonst die oft wiederholte Beschäftigung mit automatisierbaren Rechnungen bei der Diskussion der Modelle viele Kräfte binden und von der Hauptsache nur ablenken würde.

Mathematikwettbewerbe an Schulen und vergleichbare Freizeitaktivitäten

Hansjürg Stocker, Wädenswil

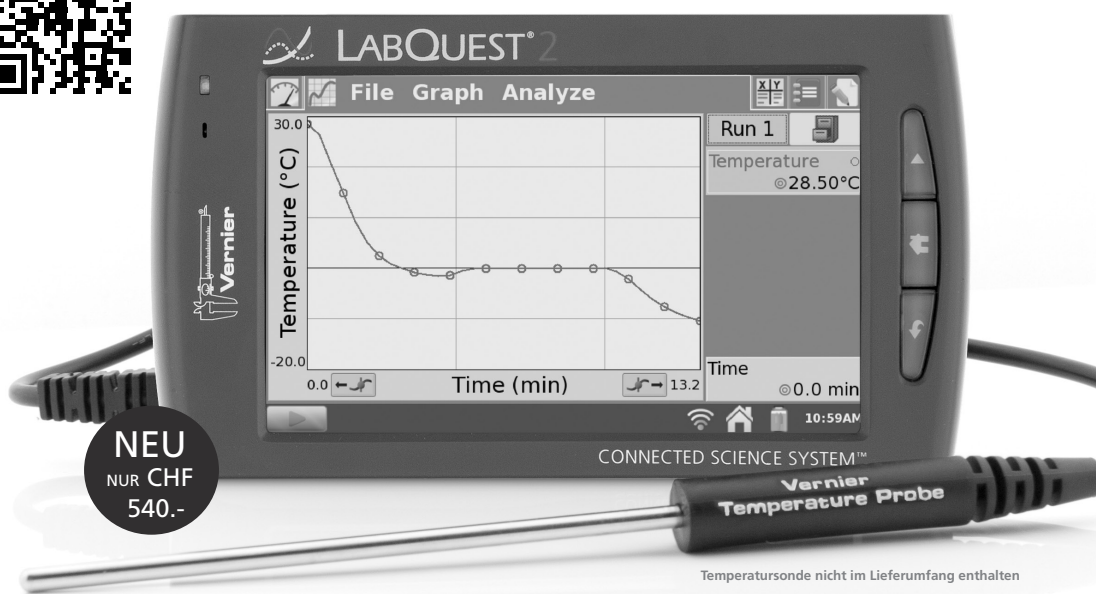
Schweizweit gibt es an diversen Gymnasien Monatsaufgaben, Aufgabenecken, gelegentlich auch Wettbewerbe, die von den Mathematikfachschaften oder einzelnen Kolleginnen und Kollegen initiiert und gepflegt werden. In einer größeren Öffentlichkeit ausgetragen wurde ab Mitte der 60er-Jahre des letzten Jahrhunderts ein mathematischer Problemwettbewerb im Kanton Bern, der verschiedene Male an den Gymnasien, Techniken und Seminarien durchgeführt wurde. Berichte dazu gibt es von Jany C. Binz und Peter Wilker (Uni Bern); siehe EIMath23-1-1968 (18-20); EIMath25-2-1970 (39-43) sowie EIMath26-4-1971 (93-95). Unter dem spleenigen Namen «Freak» erlebte der wiederum von der Uni Bern lancierte Wettbewerb vor ein paar Jahren in einer etwas anderen Form eine leider nur kurze Renaissance. Die vielfältigen Aufgabenstellungen samt Lösungen sind zum Glück heute noch im Internet abrufbar: www.math.unibe.ch/content/schueler/e8276/e8277/index_ger.html

Roland Kamber / 37 Mathematikwettbewerbe / Kantonsschule Olten

Seit 1974 führt die KS Olten Mathematikwettbewerbe durch, die auf eine Initiative von Peter Hohler zurückgehen. In diesem Frühjahr ist nun eine überaus gefällige Schrift von dessen Fachkollegen Roland Kamber herausgekommen, die alle bis 2011 durchgeführten Wettbewerbe präsentiert. Nebst den Aufgabenstellungen der einzelnen Wettbewerbe samt ausführlichen Lösungen sind am Schluss auch alle Gewinnerinnen und Gewinner namentlich aufgeführt. Die einzelnen Teile werden von farbigen Seiten getrennt, die je mit einem philosophisch trafen Aperçu bedruckt sind. Da steht etwa "Die Mathematik ist das einzige Reich der wahrhaft exakten Phantasie" von Hans Saner. Und eben diese Phantasie ist fürs Lösen nötig und kommt voll zum Zuge; denn die unterschiedlich schwierigen Aufgabenstellungen der beiden Kollegen Hohler und Kamber sind thematisch ungemein vielfältig, sehr anregend, gelegentlich herausfordernd und trotzdem stufengerecht. Kurz und gut: Ich kann diese A4-Broschüre vorbehaltlos empfehlen! – Bestellungen können etwa über diesen 'link' getätigt werden: www.kantiolten.ch/cms/fileadmin/aktuell_downloads/Diverses/37_Mathematikwettbewerbe.pdf

Armin P. Barth / «Die Rechnung, bitte!» / orell füssli

Die Freizeit für findige Köpfe kann auch unter Zuhilfenahme anregender Texte über Mathematik mit Denksportaufgaben herausfordernd gestaltet werden. Was mit der Zeitungskolumne CAFÉ MATHE begann, liegt heute in einer Auswahl als Buch vor. Die bibliografischen und vielfältig inhaltlichen Angaben können dem Flyer entnommen werden, der diesem Bulletin beiliegt – Im Gegensatz zu Günter M. Zieglers Buch «Darf ich Zahlen?» mit seinen vielfältigen Geschichten aus der Mathematik, enden die 30 bebilderten Texte Barths stets mit einer "fordernden" Frage. Die angeschnittenen Themen sind in alltägliche Geschichten verpackt, die meist einen wissenschaftshistorischen Kontext aufweisen. Gelegentlich wünschte ich mir allerdings, etwas zügiger zum mathematischen Kern vorzustoßen. Rund ein Drittel des Buches ist den Lösungen und Ergänzungen vorbehalten. Den Schluss bildet eine Art Glossar zu den behandelten Themen und Begriffen; präzise Literaturangaben hingegen fehlen. – Das für ein breiteres Lesepublikum bestimmte Taschenbuch eignet sich ausgesprochen für unsere aufgeweckten Schülerinnen und Schüler. Auch darum finde ich's schade, wenn im einen oder anderen Fall nach einem so genannten 'Trick' gefragt wird; hat dies die Mathematik tatsächlich nötig?!



- Hochauflösender Touch-screen
- Integrierte, leistungsfähige software für die Erfassung und Auswertung von Messdaten.
- Perfekt bedienerfreundlich
 - selbstständige Erkennung der Sensoren
 - automatische Grundkonfiguration
 - weitgehend intuitiv benutzbar
- beinhaltet 5 Sensoren
 - GPS
 - Beschleunigung in 3-Achsen
 - Beleuchtungsstärke
 - Mikrofon
 - Temperatur
- 100.000 Messungen pro Sekunde
- über 70 kompatible Sensoren
- WiFi und Bluetooth integriert
- Eingebauter Webserver
 - Volle Kontrolle im kompatiblen Browser von jedem Gerät - PC, Handy oder Tablet.
- Projizierbar
 - Die Software LabQuest Viewer ermöglicht die Projektion des LabQuest2-Bildschirmes. (separat erhältlich)
- iPad® Connected
 - Das App Graphical Analysis for iPad ermöglicht den simultanen Datenzugriff für alle Mitglieder einer Laborgruppe. (separat erhältlich)

Wir stellen vor:



LABQUEST® 2
CONNECTED SCIENCE SYSTEM™

Die leistungsfähigste, bedienerfreundlichste und kommunikationsfreudigste Messwerterfassung aller Zeiten

Das neue LabQuest2 Interface ist ihr Schweizer Taschenmesser für den MINT-Unterricht.

Mit modernster Technologie gibt es Studierenden ein intuitiv bedienbares, wissenschaftliches Gerät an die Hand, das motiviert und Erfolge garantiert.

LabQuest2 ist kompatibel mit Ihren vorhandenen Vernier-Sensoren und taugt für das wissenschaftliche Arbeiten im Labor ebenso wie für GPS-gestützte Forschungen im Freien.

Seine zahlreichen Kommunikationsschnittstellen ermöglichen Gruppenarbeiten ebenso wie Präsentationen in einer nie gekannten Einfachheit.

Lesen Sie mehr unter

www.educatec.ch/labquest2

und informieren Sie sich über kostenlose Workshops in Ihrer Nähe.

educaTEC

Vernier
MEASURE. ANALYZE. LEARN.™

EducaTec AG - Kanzleigasse 2 | CH-5312 Döttingen | T: +41 (0) 56 245 8161 | F: +41 (0) 56 245 8163 | contact@educatec.ch

DPK

Duffing-Oszillator

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung



Abbildung 1: *Mein Sohn auf dem ‘Flugsimulator’. Wie bewegt er sich bei grösserer Amplitude?*

Ab und zu werde ich mit den Kleinen auf den Spielplatz geschickt. Und da ich nicht anders kann, stosse ich natürlich auch dort immer wieder auf physikalische Aufgaben. Mein Sohn auf dem ‘Flugsimulator’, siehe Abbildung 1, kann in nullter Näherung als angetriebenes Federpendel modelliert werden. Falls die Federkraft dem Hookeschen Gesetz folgt, ist die Theorie der erzwungenen Schwingung sogar (möglicher) Mittel-schulstoff. Es tritt Resonanz auf, wie man sie auch im Normalunterricht darstellt, siehe Abbildung 2. Aber wie bewegt sich das Pendel, wenn die Feder bei grosser Auslenkung nicht mehr linear reagiert? Ein solches

Problem ist vom deutschen Ingenieur Georg Duffing (1861-1944) behandelt worden (‘Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung’, F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1918).

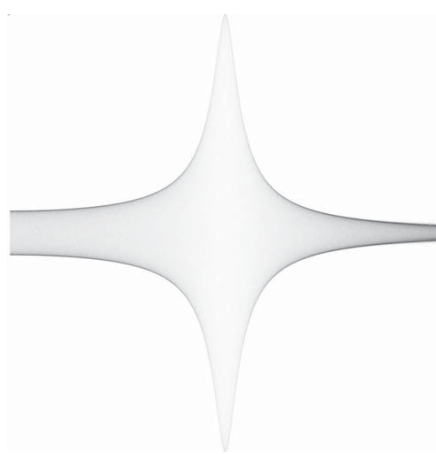


Abbildung 2: *Die Resonanz eines linearen Oszillators wie sie auf einem Oszilloskop zu sehen wäre. Die Bildbreite umfasst $0 \leq \omega \leq 2$, die Höhe $-2 \leq y \leq 2$. Die Parameterwerte sind $\delta = 0.1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$ und $\gamma = 0.2$ (in den gewählten Einheiten).*

Theorie

Die Duffing-Gleichung wird heute üblicherweise so dargestellt:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + \alpha y + \beta y^3 = \gamma \cos \omega t \quad (1)$$

Der Parameter δ beschreibt die Stärke der Dämpfung, $\alpha = \omega_0^2$ ist das Quadrat der Eigen-Kreisfrequenz des ungedämpften, linearen Oszillators, β ist ein Mass für die



Abbildung 3: Antwort des nichtlinearen Duffing-Oszillators ($\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$ und $\delta = 0.1$) Die Bildbreite umfasst $0 \leq \omega \leq 3$, die Höhe $-3 \leq y \leq 3$.

Nichtlinearität des Pendels, γ beschreibt die Stärke der anregenden Kraft pro Masse und ω ist die Kreisfrequenz der harmonisch anregenden Kraft.

Was wird aus der gewohnten Resonanzkurve bei einem nichtlinearen Pendel? Wie Abbildung 3 zeigt, liegen die Dinge nicht mehr so einfach. Es treten zusätzliche Resonanzen, Bistabilitäten, Symmetriebrüche und bei geeigneter Parameterwahl auch Chaos auf. An eine geschlossene Lösung der Duffing-Gleichung ist nicht zu denken. Man ist auf numerische Simulationen angewiesen. Das Studium dieser Simulationen erlaubt dann manchmal Näherungslösungen für spezielle Fälle. Ein solcher Fall ist im Folgenden dargestellt.

Betrachten wir die freie Schwingung ($\gamma = 0$) bei schwacher Dämpfung ($\delta \approx 0$):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha y + \beta y^3 = 0 \quad (2)$$

Die Lösung $y(t)$ setzen wir als rudimentäre Fourierreihe an. Die numerische Simulation zeigt, dass diese Näherung nicht schlecht ist.

$$\text{Ansatz: } y(t) = A \cos \omega t + \dots \quad (3)$$

Bei fehlender Dämpfung tritt keine Phasenverschiebung zwischen Anregung und Ant-

wort auf, d.h. wir können den Term $B \sin \omega t$ in der Fourierreihe (3) weglassen. Wir setzen (3) in Gleichung (2) ein:

$$-\omega^2 A \cos \omega t + \alpha A \cos \omega t + \beta A^3 \left(\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \right) = 0 \quad (4)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert für die Grundfrequenz ω :

$$-\omega^2 A + \alpha A + \frac{3}{4} \beta A^3 = 0 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{4(\omega^2 - \alpha)}{3\beta}} \quad (5)$$

Die Eigenfrequenz ist veränderlich – wie G. Duffing geschrieben hat – d.h. sie hängt von der Amplitude ab.

Experiment

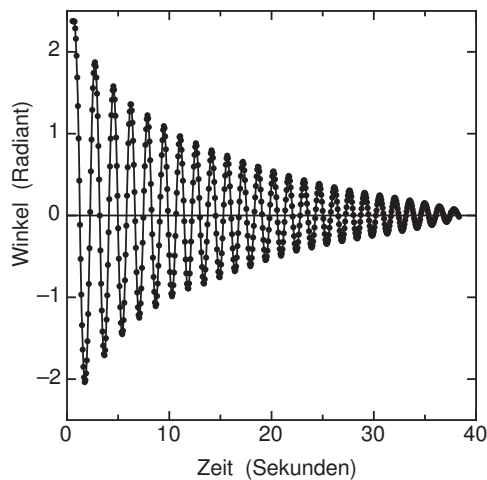


Abbildung 4: Momentanwerte (Winkel) eines freien Stangenpendels als Funktion der Zeit

Kann man den in Gleichung (5) beschriebenen Zusammenhang auch beobachten? Ein bekannter, nichtlinearer Oszillator ist das physikalische (mathematische) Pendel. Ich hängte einen schlanken Stab an einem Ende auf und liess ihn mit grosser Amplitude schwingen. Die Bewegung habe ich mit

einer einfachen Kamera videographiert und anschliessen mit Logger Pro analysiert. Die Momentanwerte y (Winkel φ) sind in Abbildung 4 abgetragen. Eine schwache Dämpfung lässt die Amplitude mit der Zeit abnehmen. Für jede ‘Periode’ bestimmte ich die am besten passende Sinuskurve durch eine Regression. So konnte ich die Amplitude und die zugehörige Kreisfrequenz bestimmen. Das Resultat ist in Abbildung 5 dargestellt. Passt man Gleichung (5) an die Daten, so erhält man eine befriedigende Übereinstimmung.

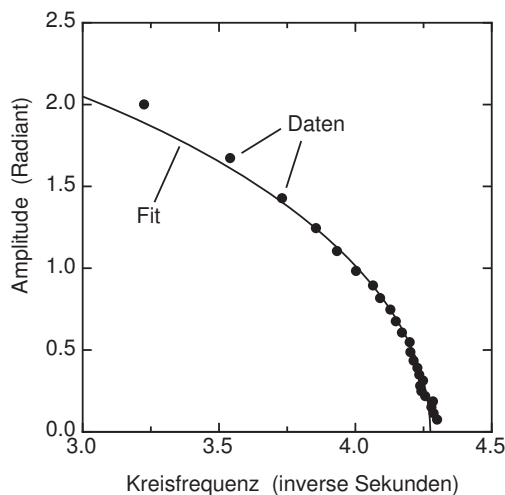


Abbildung 5: Amplitude der freien Stangenpendel-Schwingung als Funktion der Kreisfrequenz. Der Fit entspricht Gleichung (5) mit den Parametern $\alpha = 18.27 \text{ s}^{-2}$ und $\beta = -2.94 \text{ s}^{-2} \text{ rad}^{-2}$

Das physikalische Pendel hat bekanntlich eine exakte Lösung. Wie passt dessen Differentialgleichung (6) mit der Duffingschen Gleichung (1) zusammen? Entwickelt man den Sinus in (6) um $\varphi = 0$ herum bis zum kubischen Term, siehe Gleichung (7), so erhält man gerade die Duffingsche Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha \sin \varphi = 0 \Rightarrow \quad (6)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha\varphi - \frac{\alpha}{6}\varphi^3 + \dots = 0 \quad (7)$$

Aus dieser Näherung folgt $\beta = \alpha/6$. Und tatsächlich liefert die Kurvenanpassung, siehe Abbildung 5, gerade $\alpha \approx 6\beta$. Für grosse Amplituden sind Abweichungen zu erwarten und für sehr kleine Amplituden wird die Videoanalyse ungenau.

Schluss

Soll man den Duffing-Oszillator im Regelunterricht zeigen? Die Zeit reicht wohl eher nicht. Als Minimalfassung könnte man, falls Resonanz überhaupt vertieft behandelt wird, neben Abbildung 2 auch eine Folie mit Abbildung 3 zeigen und kurz besprechen. Auf diese Weise erfahren die Schülerinnen und Schüler wieder einmal, dass die klassische Mechanik noch manche Überraschung bereit hält. Steht mehr Zeit zur Verfügung, so könnte man die Differentialgleichung numerisch untersuchen.



L'algorithme PageRank de Google

Paul Jolissaint

Un moteur de recherche tel que Google doit faire trois choses :

1. Naviguer sur le web et localiser (si possible) toutes les pages ayant un accès public.
2. Indexer les données ci-dessus pour qu'elles puissent être retrouvées efficacement par mots-clés ou groupes de mots significatifs.
3. Classer l'importance de chaque page dans la base de données de sorte que lorsqu'un internaute fait une recherche et que le sous-ensemble des pages correspondantes dans la base de données a été trouvé, **les pages les plus importantes soient présentées en premier.**

Le but de l'algorithme PageRank est de résoudre le troisième problème ci-dessus, et nous allons expliquer comment on procède pour élaborer le classement des pages web avec cet algorithme.

L'ensemble des pages web peut être modélisé par un **graphe orienté** : chaque page est représentée par un point (appelé **sommet** du graphe) et on dessine une flèche d'un sommet A vers un sommet B si et seulement si la page A contient un lien hypertexte *vers* la page B . Une telle flèche s'appelle une **arête** (orientée).

Notons que le nombre de pages dans le web est estimé à plus de 60 milliards, et Google en répertorie environ 35 milliards. Aussi, si la partie du web indexée par Google contient n pages, on convient de représenter chaque page par un numéro i compris entre 1 et n , et on désignera par x_i le **score** de la page i . Il s'agit d'un nombre compris entre 0 et 1 qui doit indiquer l'importance de la page i au sens du point 3 ci-dessus : plus x_i est élevé, plus l'URL de la page i apparaît tôt dans la liste que propose le moteur de recherche lorsque la page i contient les mots-clés demandés. Comme première condition, on doit avoir $x_i > x_j$ si la page i est plus importante que la page j . Une approche simple consisterait à définir x_i de la façon suivante : notons m_i le nombre de liens vers la page i , alors x_i pourrait être défini par le rapport m_i/n .

Cette formule ignore toutefois un point crucial : *une page est importante si d'autres pages importantes pointent vers elle*. Ainsi, si la page j est importante (c'est-à-dire si x_j est grand) et s'il existe un lien de la page j vers la page i , cela donne d'autant plus d'importance à la page i , donc l'établissement d'un tel lien devrait augmenter x_i davantage que si on établit un lien d'une page sans importance vers la page i . Toutefois, on veut éviter que des pages sans grande importance obtiennent un grand score par des moyens artificiels comme par exemple la création d'un grand nombre de pages fictives contenant chacune un lien vers la page en question. Ainsi, si la page j contient n_j liens vers d'autres pages, dont la page i , on veut que la contribution de la page j au score x_i de la page i soit égal à x_j/n_j et non pas égal à x_j .

Les concepteurs de Google, Larry Page et Sergey Brin, alors étudiants en informatique à Stanford, ont adopté en 1998 la définition suivante de la suite des scores x_1, x_2, \dots, x_n : rappelons que n_j désigne le nombre de liens contenus dans la page j pour tout j (donc issus de la page j vers d'autres pages, et on convient qu'un lien d'une page vers elle-même est ignoré), et soit $L_i \subset \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des pages qui ont un lien vers la page i . On demande alors que pour tout i ,

$$x_i = \sum_{j \in L_i} \frac{x_j}{n_j}$$

et que les composantes de $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: (x_1, \dots, x_n)^T$ soient normalisées de sorte que $\sum_i x_i = 1$.

(Si M est une matrice quelconque, on note M^T sa transposée.)

Le problème avec la définition ci-dessus est que le calcul de x_i fait intervenir les autres x_j qui sont a priori eux aussi inconnus. On peut par exemple calculer des valeurs approximatives des x_i en utilisant une méthode itérative : notons $x_i^{(k)}$ la valeur de x_i après la k -ième itération. On initialise le processus en posant par exemple $x_i^{(0)} = 1/n$ pour tout i (ce qui s'interprète en stipulant qu'au départ toutes les pages possèdent le même score), puis en définissant $x_i^{(k+1)} = \sum_{j \in L_i} \frac{x_j^{(k)}}{n_j}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $k \geq 0$. On simplifie les notations en introduisant la matrice A qui est définie comme suit : pour $1 \leq j \leq n$, on remplit la colonne j en posant $\frac{1}{n_j}$ dans la ligne i si $j \in L_i$ (c'est-à-dire s'il y a un lien de j vers i) et 0 sinon, et on note comme ci-dessus $\vec{x}^{(k)}$ le vecteur dont les composantes sont les $x_i^{(k)}$.

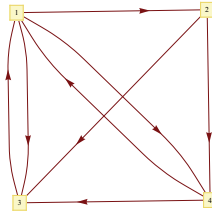
De la sorte, on a

$$A\vec{x} = \vec{x} \quad \text{et} \quad A\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k+1)} \quad \forall k \geq 0.$$

Il semble que Google recalcule les scores une fois par semaine, en itérant un processus proche de celui décrit ci-dessus car ce dernier pose quelques problèmes que nous allons décrire plus loin.

En attendant, voici un exemple simple qui permet de se faire une idée de la situation :

Exemple. Considérons le web donné par le graphe suivant :



Cela conduit au système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 = x_3/1 + x_4/2 \\ x_2 = x_1/3 \\ x_3 = x_1/3 + x_2/2 + x_4/2 \\ x_4 = x_1/3 + x_2/2. \end{cases}$$

On pose $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ et la matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $A\vec{x} = \vec{x}$.

En résumé, on cherche un vecteur \vec{x} comme ci-dessus dont les composantes x_j sont positives, de somme 1, et qui satisfait l'équation $A\vec{x} = \vec{x}$. Elle admet une solution : c'est un multiple du vecteur $\vec{v} = (12, 4, 9, 6)^T$, donc $\vec{x} = (\frac{12}{31}, \frac{4}{31}, \frac{9}{31}, \frac{6}{31})^T \approx (0.387, 0.129, 0.290, 0.194)^T$.

Remarque importante. Dans la description ci-dessus, on n'a pas tenu compte des "pages cul-de-sac" (en anglais : "dangling nodes") : ce sont les pages qui n'ont aucun lien vers une autre page, donc ce sont les pages j pour lesquelles $n_j = 0$. Brin et Page ont résolu le problème en remplaçant chaque colonne correspondant à une page cul-de-sac par la colonne $(1/n, \dots, 1/n)^T$. On interprète cette modification ainsi : lorsqu'un internaute visite une page cul-de-sac, la probabilité de visiter les autres pages du web en quittant celle-ci est uniforme.

Les équations ci-dessus posent un certain nombre de questions :

- l'équation $A\vec{x} = \vec{x}$ avec $\sum_i x_i = 1$ admet-elle une solution avec $x_i > 0$ pour tout i ?
- si une solution à l'équation ci-dessus existe, est-elle unique ?
- dans le calcul de la suite $(\vec{x}^{(k)})$ qui est censée approcher \vec{x} , le processus converge-t-il ? et sous quelles conditions ?

Afin de garantir l'existence et l'unicité de \vec{x} , et la convergence du processus, Brin et Page ont modifié l'équation ci-dessus : le vecteur de score \vec{x} est la solution de l'équation

$$\vec{x} = ((1 - m)A + mS)\vec{x}$$

où $0 < m < 1$ est un paramètre et S est la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à $1/n$. On démontrera que cette équation admet toujours une unique solution \vec{x} telle que $\sum_i x_i = 1$ et que tous les x_i sont strictement positifs. En 2005, Google utilisait la valeur $m = 0.15$. Nous ignorons si c'est encore la valeur utilisée aujourd'hui ; de plus, les diverses valeurs des x_i ne sont pas publiques.

Afin de simplifier les notations, posons $(1 - m)A + mS =: M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}$. Elle possède deux

propriétés cruciales : elle est stochastique par rapport à ses colonnes, *i.e.* la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1, et tous les coefficients $m_{i,j} > 0$. On désigne par $V_1(M) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | M\vec{x} = \vec{x}\}$ le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 de M . Remarquons que $V_1(M)$ n'est pas réduit à $\vec{0}$: en effet, les valeurs propres de M sont exactement les mêmes que celle de sa transposée M^T , et cette dernière admet 1 comme valeur propre avec le vecteur propre constant $(1, \dots, 1)^T$, puisque M est stochastique. La positivité stricte de M admet la conséquence importante suivante :

Proposition 1 Soit M comme ci-dessus. Alors tout vecteur propre dans $V_1(M)$ a ses composantes soit toutes positives, soit toutes négatives.

Preuve. Observons d'abord que si \vec{y} est un vecteur à n composantes y_1, y_2, \dots, y_n , alors $|\sum_i y_i| \leq \sum_i |y_i|$ et que l'inégalité est stricte si et seulement si certains y_i sont positifs et d'autres négatifs. Supposons alors par l'absurde qu'il existe $\vec{x} \in V_1(M)$ dont les composantes ont des signes mélangés (certaines positives et d'autres négatives). De l'équation $\vec{x} = M\vec{x}$, on déduit que $x_i = \sum_j m_{i,j}x_j$ pour tout i , et comme $m_{i,j} > 0$ pour tous i et j , on a :

$$|x_i| = \left| \sum_{j=1}^n m_{i,j}x_j \right| < \sum_j m_{i,j}|x_j|.$$

En sommant ces inégalités sur i de 1 à n , puis en intervertissant les sommes sur i et sur j on obtient

$$\sum_{i=1}^n |x_i| < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}|x_j| = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_{i,j} \right) |x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

qui donne une contradiction. □

Proposition 2 Soient \vec{v} et \vec{w} deux vecteurs linéairement indépendants dans \mathbb{R}^n . Alors il existe une valeur réelle s telle que le vecteur $\vec{x} = \vec{v} + s\vec{w}$ ou le vecteur $\vec{x} = s\vec{v} + \vec{w}$ admet des composantes positives et des composantes négatives.

Preuve. Comme \vec{v} et \vec{w} sont linéairement indépendants, ils sont tous deux non nuls. Posons $d = \sum_i v_i$. Si $d = 0$, alors \vec{v} possède des composantes de chaque signe, et il suffit de prendre $s = 0$ et donc de poser $\vec{x} = \vec{v}$. Si $d \neq 0$, posons $s = -\frac{\sum_i w_i}{d}$ et $\vec{x} = s\vec{v} + \vec{w}$, de sorte que $\sum_i x_i = 0$ et $\vec{x} \neq \vec{0}$. Par suite, \vec{x} a nécessairement des composantes positives et des composantes négatives. □

Corollaire 3 Si M est une matrice stochastique et positive, alors $V_1(M)$ est de dimension 1 et formé des multiples d'un vecteur \vec{x} dont les composantes $x_i > 0$ pour tout i et telles que $\sum_i x_i = 1$.

Preuve. Supposons par l'absurde que $\dim(V_1(M)) \geq 2$, et soient \vec{v} et \vec{w} deux vecteurs linéairement indépendants dans $V_1(M)$. Alors le vecteur \vec{x} construit dans la proposition 2 fournit une contradiction à la proposition 1. □

Enfin, il reste à montrer comment on procède pratiquement pour trouver le vecteur \vec{x} .

Soit M la matrice ci-dessus. L'idée pour calculer le vecteur \vec{x} tel que $\sum_i x_i = 1$ et $M\vec{x} = \vec{x}$ consiste à choisir un vecteur initial arbitraire $\vec{x}^{(0)}$ à composantes positives et de somme 1, puis à définir la suite de vecteurs $\vec{x}^{(k)} = M\vec{x}^{(k-1)}$ et de démontrer que cette suite converge vers le vecteur cherché.

Notons V le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n formé des vecteurs \vec{w} dont la somme des composantes $\sum_i w_i = 0$. C'est, pour le produit scalaire standard, l'orthogonal du vecteur $\vec{e} = (1, \dots, 1)^T$. On munit également \mathbb{R}^n de sa **1-norme** : $\|\vec{v}\|_1 := \sum_{i=1}^n |v_i|$.

Proposition 4 Posons $c = \max_{1 \leq j \leq n} |1 - 2 \cdot \min_{1 \leq i \leq n} m_{i,j}|$. Alors $0 < c < 1$, et on a $M\vec{v} \in V$ et $\|M\vec{v}\|_1 \leq c\|\vec{v}\|_1$ pour tout $\vec{v} \in V$.

Preuve. Pour $\vec{v} \in V$ fixé, posons $\vec{w} = M\vec{v}$, de sorte que $w_i = \sum_j m_{i,j}v_j$. Alors

$$\sum_i w_i = \sum_i \sum_j m_{i,j}v_j = \sum_j v_j \left(\sum_i m_{i,j} \right) = \sum_j v_j = 0$$

puisque la matrice M est stochastique et que $\sum_j v_j = 0$. Ainsi, $\vec{w} = M\vec{v} \in V$. Pour prouver l'inégalité, notons $e_i = \text{sgn}(w_i) = \pm 1$ le signe de w_i , de sorte que

$$\|\vec{w}\|_1 = \sum_i e_i w_i = \sum_i e_i \left(\sum_j m_{i,j}v_j \right).$$

Observons que les e_i n'ont pas tous le même signe car $\vec{w} \in V$ (sauf bien sûr au cas où $\vec{w} = \vec{0}$, mais alors l'inégalité est trivialement vraie). Posons encore $a_j = \sum_i e_i m_{i,j}$ et intervertissons la double somme ci-dessus pour obtenir

$$\|\vec{w}\|_1 = \sum_j v_j \left(\sum_i e_i m_{i,j} \right) = \sum_j a_j v_j.$$

Puisque les signes des $e_i = \pm 1$ varient, que $e_i + 1 = 0$ ou 2 et que $\sum_i m_{i,j} = 1$, avec $0 < m_{i,j} < 1$, on obtient d'une part

$$a_j + 1 = \sum_i (e_i + 1)m_{i,j} \geq 2 \cdot \min_i m_{i,j}$$

et d'autre part, puisque $e_k - 1 = -2$ ou 0 et que $m_{k,j} \geq \min_i m_{i,j}$, on a

$$a_j - 1 = \sum_k (e_k - 1)m_{k,j} \leq -2 \cdot \min_i m_{i,j}.$$

Cela implique immédiatement que

$$-1 < -1 + 2 \cdot \min_i m_{i,j} \leq a_j \leq 1 - 2 \cdot \min_i m_{i,j} < 1.$$

Ainsi, $|a_j| \leq |1 - 2 \cdot \min_i m_{i,j}| \leq c < 1$. On a finalement

$$\|\vec{w}\|_1 = \sum_j a_j v_j \leq \left| \sum_j a_j v_j \right| \leq \sum_j |a_j| |v_j| \leq c \sum_j |v_j| = c \|\vec{v}\|_1,$$

ce qui prouve la proposition. □

Voici enfin le résultat qui garantit la convergence de la suite des $\vec{x}^{(k)}$:

Théorème 5 Soit M une matrice comme ci-dessus. Alors elle admet un unique vecteur $\vec{q} \in V_1(M)$ à composantes toutes positives et tel que $\|\vec{q}\|_1 = 1$. Il peut être calculé par

$$\vec{q} = \lim_{k \rightarrow \infty} M^k \vec{x}^{(0)}$$

à partir de n'importe quel vecteur initial $\vec{x}^{(0)}$ à composantes positives et tel que $\|\vec{x}^{(0)}\|_1 = 1$. La convergence de $M^k \vec{x}^{(0)}$ vers \vec{q} a lieu par rapport à la 1-norme.

Preuve. On sait déjà que \vec{q} existe et est unique. Une fois le vecteur initial $\vec{x}^{(0)}$ choisi tel que $x_j^{(0)} > 0$ pour tout j et $\|\vec{x}^{(0)}\|_1 = 1$, posons $\vec{v} = \vec{x}^{(0)} - \vec{q}$ de sorte que $\vec{x}^{(0)} = \vec{q} + \vec{v}$ et \vec{v} appartient à V , c'est-à-dire que la somme des composantes de \vec{v} vaut 0. On a alors pour tout k :

$$M^k \vec{x}^{(0)} = M^k \vec{q} + M^k \vec{v} = \vec{q} + M^k \vec{v}$$

car $M\vec{q} = \vec{q}$ donc $M^k \vec{q} = \vec{q}$ pour tout $k > 0$ et

$$M^k \vec{x}^{(0)} - \vec{q} = M^k \vec{v}.$$

Par une récurrence évidente, on obtient, par la proposition 4 : $\|M^k \vec{v}\|_1 \leq c^k \|\vec{v}\|_1$ pour tout k , et comme $0 < c < 1$, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|M^k \vec{v}\|_1 = 0$$

ce qui permet de conclure que

$$\vec{q} = \lim_{k \rightarrow \infty} M^k \vec{x}^{(0)}.$$

□

Remarque finale. Dans le cas de la matrice de Google, le calcul direct de la suite $(\vec{x}^{(k)})_{k \geq 1}$ par récurrence comme présenté ci-dessus serait malgré tout très fastidieux puisque chaque coefficient de $\vec{x}^{(k)}$ nécessiterait des milliards de multiplications et d'additions. En fait, le calcul est raisonnable et efficace grâce à la forme spéciale de la matrice M ; comme on l'a vu, $M = (1 - m)A + mS$ et A est une matrice creuse, c'est-à-dire qu'elle contient beaucoup de 0. On observe alors la particularité suivante de S : Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur dont la somme des composantes vaut 1. Alors $S\vec{v} = (\frac{v_1 + \dots + v_n}{n}, \dots, \frac{v_1 + \dots + v_n}{n})^T = (1/n, \dots, 1/n)^T =: \vec{u}$.

Par suite, quel que soit k , on a $mS\vec{v}^{(k)} = m\vec{u}$ qui est *indépendant* de k et ainsi la récurrence est en réalité :

$$\vec{x}^{(k+1)} = (1 - m)A\vec{x}^{(k)} + m\vec{u}$$

qui peut se calculer plus facilement puisque le calcul de chaque composante de $\vec{x}^{(k+1)}$ ne fait intervenir que quelques dizaines de composantes de $\vec{x}^{(k)}$. On peut démontrer qu'une cinquantaine d'itérations suffisent pour obtenir un vecteur de score satisfaisant.

Lycée cantonal de Porrentruy
pajolissaint@sunrise.ch

UNE PARTICULARITÉ DE QUELQUES RÉELS

Jean Luc Bovet, Auvernier

J'ai éprouvé une certaine stupéfaction après avoir calculé quelques puissances successives du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Deux propriétés apparaissent.

- 1) Plus n est grand, plus φ^n est proche de son arrondi, c'est-à-dire de l'entier le plus proche.
- 2) Au premier terme près, la suite des arrondis (2, 3, 4, 7, 11, 18 ...) est la suite dite de Lucas (1, 3, 4, 7, 11, 18 ...), la suite qui commence par $t_1 = 1, t_2 = 3$ et de terme général $t_n = t_{n-2} + t_{n-1}$. Nous dirons que φ^n est asymptotiquement égal à t_n ($\varphi^n \simeq t_n$) et que φ est un **PE** (Presque Entier, ou plus précisément un nombre dont la différence des nièmes puissances avec leurs arrondis tend vers 0 quand n tend vers l'infini). Nous dirons aussi que la suite des φ^n une suite **TE** de constante φ (dont les Termes se rapprochent de nombres Entiers).

n	φ^n
1	1.61803399
2	2.61803399
3	4.23606798
4	6.85410197
5	11.0901699
6	17.9442719
7	29.0344419
8	46.9787138
9	76.0131556
10	122.991869
11	199.005025
12	321.996894
13	521.001919

Bien sûr la contemplation des 13 résultats ci-contre suggère ces affirmations mais ne démontre rien.

Démonstration.

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$

$\theta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est l'autre solution.

On a donc $\varphi^2 = \varphi + 1$, $\varphi + \theta = 1$, $\varphi \cdot \theta = -1$ et $\theta^2 = \theta + 1$.

On a aussi $2\varphi - 1 = \sqrt{5}$ et $2\theta - 1 = -\sqrt{5}$.

φ	$\theta = 1 - \varphi$	$\varphi + \theta = 1 = t_1$
$\varphi^2 = \varphi + 1$	$\theta^2 = 1 - 2\varphi + \varphi^2 = 2 - \varphi$	$\varphi^2 + \theta^2 = 3 = t_2$
$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1$	$\theta^3 = 2 - 3\varphi + \varphi^2 = 3 - 2\varphi$	$\varphi^3 + \theta^3 = 4 = t_3$
$\varphi^4 = 2\varphi^2 + \varphi = 3\varphi + 2$	$\theta^4 = 3 - 5\varphi + 2\varphi^2 = 5 - 3\varphi$	$\varphi^4 + \theta^4 = 7 = t_4$

On est conduit à penser que $\varphi^n + \theta^n = t_n$. Montrons-le par récurrence.

Hypothèse : $\varphi^{n-2} + \theta^{n-2} = t_{n-2}$
 $\varphi^{n-1} + \theta^{n-1} = t_{n-1}$

Additionnons : $\varphi^{n-2}(1 + \varphi) + \theta^{n-2}(1 + \theta) = t_{n-2} + t_{n-1}$

Utilisant $\varphi + 1 = \varphi^2$, $\theta^2 = \theta + 1$ et $t_{n-2} + t_{n-1} = t_n$,

On aura $\varphi^n + \theta^n = t_n$, cqfd2.

Enfin, $|\theta|$ étant < 1 , $\theta^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, $\varphi^n \rightarrow t_n$
 c'est-à-dire φ est un PE, cqfd1.

La suite des arrondis de φ^n étant la suite de Lucas on serait intéressé à obtenir celle de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$, où $f_1 = 1, f_2 = 1, f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$.

Partons de

$$\mathbf{1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots} \quad \varphi^n + \theta^n, \dots$$

$$\mathbf{3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots} \quad \varphi^{n+1} + \theta^{n+1}, \dots$$

Trouvons deux nombres a et b tels que $a \cdot 1 + b \cdot 3 = 1$ et $a \cdot 3 + b \cdot 4 = 1$.

Réponse : $a = -\frac{1}{5}, b = \frac{2}{5}$.

Multiplions la première suite par a , la deuxième par b et additionnons; il vient

$$1, 1, 2, 3, 5, \dots, -\frac{1}{5} \cdot \varphi^n + \frac{2}{5} \varphi^{n+1} - \frac{1}{5} \theta^n + \frac{2}{5} \theta^{n+1}, \dots$$

Ce terme général, f_n vaut $\frac{1}{5} \cdot (\varphi^n(-1 + 2\varphi) + \theta^n(-1 + 2\theta))$.

Puisque $2\varphi - 1 = \sqrt{5}$ et que $2\theta - 1 = -\sqrt{5}$,

on aura $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \theta^n)$

Asymptotiquement, $f_n \simeq \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ et $f_n \simeq \frac{\theta^n}{\sqrt{5}}$ ou bien « Fibonacci $\simeq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot$ Lucas »

Autre stupéfaction donc : si la suite des φ^n est une TE, celle des $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \varphi^n$ aussi. Nous l'appellerons suite unitaire (commençant par 1, 1) de φ^n .

Nous pouvons maintenant obtenir n'importe quelle suite s telle que $s_1 = a, s_2 = b, s_n = s_{n-2} + s_{n-1}$. On utilisera le même procédé qu'avant.

On aura : $s_n = (2a - b)f_n + (b - a)f_{n+1}$ et asymptotiquement $s_n \simeq \frac{c+d \cdot \varphi}{\sqrt{5}} \cdot \varphi^n$.

Cela entraîne que tous les nombres de la forme $\frac{(2a-b)+(b-a) \cdot \varphi}{\sqrt{5}} \cdot \varphi^n$ sont des PE.

On aurait pu s'en aviser plus tôt en observant que

- 1 Si S_1 et S_2 sont des TE, leur somme terme à terme est une TE
- 2 Si S est une TE, si a est entier, la suite $a \cdot S$ est une TE
- 3 Si S est une TE de constante φ , la suite $\varphi \cdot S$ est une TE

Sont-ils les seuls ?

Le fait que φ a des puissances quasi entières nous a conduits aux suites de Fibonacci et apparentées. Essayons d'aller dans l'autre sens.

Envisageons les suites (x, y, a, b) c'est-à-dire les suites telles que $s_1 = a, s_2 = b$ et $s_n = x \cdot s_{n-2} + y \cdot s_{n-1}$.

Par exemple la suite $(2,3,1,4)$ est $1, 4, 14, 50, 178 \dots$

Comme les précédentes cette suite se comporte asymptotiquement comme une suite géométrique. La raison, $\psi = 3,56155281$, devrait être la solution positive de l'équation $t^2 = x + y \cdot t$, soit $t^2 - 3t - 2 = 0$.

ψ va jouer le rôle de φ . Dans le cas particulier,

$\psi = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$. Les calculs vérifient que ψ est encore un PE.

n	$s(n)$	$s(n)/s(n-1)$
1	1	
2	4	4
3	14	3.5
4	50	3.57142857
5	178	3.56
6	634	3.56179775
7	2258	3.5615142
8	8042	3.5615589
9	28642	3.56155185
10	102010	3.56155296
11	363314	3.56155279
12	1293962	3.56155282
13	4608514	3.56155281
14	16413466	3.56155281
15	58457426	3.56155281
16	208199210	3.56155281

La suite obtenue n'est pas la suite (2,3,1,4) mais (2,3,3,13). Il convient donc de trouver le bon facteur. Mêmes calculs que pour passer de Lucas à Fibonacci. On trouve $c = \frac{7+\psi}{34}$. La suite des $c \cdot \psi^n$ est donc de nouveau une TE.

n	ψ^n	arrondi	Arr corrigé	$c \cdot \psi^n$	arrondi
1	3.56155281	4	3	1.10633906	1
2	12.6846584	13	13	3.94028500	4
3	45.1770809	45	45	14.0335331	14
4	160.900560	161	161	49.9811694	50
5	573.055841	573	573	178.010574	178
6	2040.96864	2041	2041	633.994062	634
7	7269.01761	7269	7269	2258.00333	2258
8	25888.9901	25889	25889	8041.99813	8042
9	92205.0056	92205	92205	28642.0011	28642
10	328392.997	328393	328393	102009.999	102010
11	1169589.00	1169589	1169589	363314.000	363314
12	4165553.00	4165553	4165553	1293962.00	1293962
13	14835837.0	14835837	14835837	4608514.00	4608514

Voyons enfin les choses d'une manière générale : suite (x, y, s_1, s_2) .

Soit ψ la solution positive de l'équation $t^2 = x + y \cdot t$, $\psi = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4x}}{2}$.

Soit θ l'autre solution : $\theta = \frac{y - \sqrt{y^2 + 4x}}{2}$.

Somme des solutions : $\Sigma = y$, produit des solutions : $\Pi = -x$.

On a $\psi + \theta = y$, $\psi^2 + \theta^2 = \Sigma^2 - 2\Pi = y^2 + 2x$.

ψ et θ étant des solutions de l'équation, on a $x + y \cdot \psi = \psi^2$ et $x + y \cdot \theta = \theta^2$.

On définit la suite $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ où $m_n = \psi^n + \theta^n$.

Elle obéit à la règle de récurrence. En effet

$$x \cdot (\psi^{n-2} + \theta^{n-2}) + y \cdot (\psi^{n-1} + \theta^{n-1}) = \psi^{n-2}(x + y \cdot \psi) + \theta^{n-2}(x + y \cdot \theta) = \psi^n + \theta^n$$

Prenons les suites m_1, m_2, m_3, \dots et m_2, m_3, m_4, \dots . Multiplions la première par a , la deuxième par b et additionnons-les terme à terme.

On obtient la suite $a \cdot m_1 + b \cdot m_2, a \cdot m_2 + b \cdot m_3, \dots$.

Choisissons a et b pour obtenir la suite s_1, s_2, \dots

$$\text{Tous calculs faits, } a = \frac{s_1 \cdot m_3 - s_2 \cdot m_2}{m_1 \cdot m_3 - m_2^2} \text{ et } b = \frac{s_1 \cdot m_2 - s_2 \cdot m_1}{m_1 \cdot m_3 - m_2^2}$$

Le terme général s_n vaut $a \cdot m_n + b \cdot m_{n+1} = a \cdot (\psi^n + \theta^n) + b \cdot (\psi^{n+1} + \theta^{n+1})$, c'est-à-dire $s_n = (a + b \cdot \psi) \cdot \psi^n + (a + b \cdot \theta) \cdot \theta^n$

Enfin si $|\theta| < 1$, $s_n \simeq (a + b \cdot \psi) \cdot \psi^n$, et la suite des $(a + b \cdot \psi) \cdot \psi^n$ est donc une TE.

Pour illustrer ce qui précède, vous trouverez un tableau Excel à l'adresse

www.sspmp.ch/crm/telecharger/PE.xlsx.

Il vous permet de choisir x, y, s_1, s_2 . En rouge, il donne les suites m_1, m_2, \dots et s_1, s_2, \dots calculées selon la règle de récurrence et, en noir, ces mêmes suites calculées selon la méthode ci-dessus.

On peut encore essayer de voir, parmi les nombres de la forme $a + \sqrt{b}$ lesquels sont des PE.

Les suites (x, y, s_1, s_2) sont régies par le nombre ψ solution de $\psi^n = x \cdot \psi^{n-2} + y \cdot \psi^{n-1}$ ou $\psi^2 - y \cdot \psi - x = 0$.

$$\psi = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4x}}{2} = a + \sqrt{b}, \text{ donc } a = \frac{y}{2} \text{ et } b = \frac{y^2}{4} + x.$$

y étant entier, a est entier ou demi-entier.

- 1) Si a est entier, y est pair, donc $\frac{y^2}{4}$ est entier, donc b est entier (mais pas carré).
Pour que $a + \sqrt{b}$ soit un PE il faut que $|a - \sqrt{b}| < 1$ donc a doit être un des deux entiers qui encadrent \sqrt{b} .
Par exemple si $b = 29$, $\sqrt{b} \cong 5,38$ donc a doit valoir 5 ou 6.
- 2) Si a est un demi-entier, y est impair donc $b = \frac{t}{4}$ où $t \equiv 1 \pmod{4}$. En écriture habituelle $b = \text{qqch},25$ (mais pas le carré d'un demi-entier : pas 2,25, 6,25, 12,25 ...).
Alors a doit être un des deux demi-entiers qui encadrent \sqrt{b} .
Par exemple si $b = 7,25$, $\sqrt{b} \cong 2,69$, donc a doit valoir 2,5 ou 3,5.

La deuxième feuille du tableau Excel permet de vérifier la chose.

Ce petit tour chez les PE explique quelques bizarreries. On peut vivre sans ça, c'est vrai, mais j'espère vous avoir amusé. Merci pour votre attention.

Cours CRP 2012

Epistémologie des sciences physiques :

Des grands bouleversements aux perspectives pédagogiques

Informations générales

Objectifs :

- Présenter le contexte et l'histoire des grands bouleversements que représente l'avènement de la relativité et de la physique quantique en perspective des révolutions futures qui nous attendent
- Sensibiliser les professeurs de lycées - collèges – gymnases à la problématique que pose le décalage de plus en plus important entre la physique enseignée et celle utilisée pour réaliser les objets technologiques du quotidien de nos élèves

Dates :

Les 19, 20 et 21 septembre 2012

Lieu :

Champéry, Suisse

Description du cours :

L'an passé nous avons abordé le thème de la physique quantique et de sa place dans l'enseignement au gymnase. Nous avons pris conscience de la portée de cette nouvelle physique aussi bien sur le plan théorique : dépassement de nos représentations classiques de localité, de causalité et l'arrivée de l'intrication et de la superposition d'états, que sur le plan des applications : interférométrie, cryptage, téléportation.

Il est temps de voir en quoi nos concepts classiques suffisent pour rendre le monde technologique dans lequel nous baignons, peuplé d'écrans, de lasers, de clés USB, de smartphones, et bien d'autres, accessible à la compréhension de nos élèves.

Si ce n'est pas le cas, on doit recourir à des concepts non classiques : lesquels ? et jusqu'à quel point ?

Intervenants :

- Marc Lachièze-Rey (Paris)
- Pierre Léna (Paris)
- Bernard Maitte (Lille)
- Philippe-André Martin (EPFL)
- Christian Gruber (EPFL)
- Jürgen Brugger (EPFL)
- Frédéric Chaberlot (Morges)

Inscription :

<http://www.webpalette.ch/fr/catalogue-des-cours/secontaire-ii/wbz-cps/05-physique/?newsId=1182>

Weiterbildungsveranstaltung Produktives Üben im Mathematikunterricht

Die Pädagogische Hochschule Zürich und die ETH Zürich laden Sie herzlich zu dieser Weiterbildungsveranstaltung ein.

Kursdaten

Ort: ETH Zürich

Datum: 5. November (Kick-off) und 3. Dezember (Follow-up) 2012, jeweils am Nachmittag, 13:30 bis 17:00 Uhr

Organisation: René Schelldorfer, Lars Holzäpfel, Norbert Hungerbühler

Referent: Prof. Dr. Lars Holzäpfel (Pädagogische Hochschule Freiburg im Breisgau)

Inhalt

Übungsstunden im Mathematikunterricht sind oftmals dadurch gekennzeichnet, dass Schülerinnen und Schüler möglichst viele Aufgaben abarbeiten. Während sich die schnellen und guten Schüler dabei langweilen, fällt es den schwächeren Schülerinnen und Schülern oft schon bei der ersten Aufgabe schwer, überhaupt erst anzufangen. Differenzierung erfolgt dann meist dadurch, dass einfachere oder schwierigere Aufgaben bereit gestellt werden bzw. der Rest als Hausaufgabe nachgearbeitet werden muss. Mit dem Einsatz produktiver Übungsaufgaben soll dieses Szenario durchbrochen werden.

Es stellt sich also die Frage, wie Übungsphasen interessant, motivierend und herausfordernd für alle gestaltet werden können. Produktive Übungsaufgaben können einen Beitrag dazu leisten, Übungsphasen effizienter und interessanter zu gestalten. Im Idealfall sind diese selbstdifferenzierend, entdeckungsorientiert und daher motivierend für alle. Dies bedeutet, dass die Schülerinnen und Schüler beim Üben Entdeckungen machen können und gleichzeitig beim Entdecken üben.

Der selbstdifferenzierende Charakter ist ein zentraler Aspekt produktiver Übungsaufgaben: Alle Schülerinnen und Schüler sollen nach ihren Möglichkeiten gefördert werden und dies bedeutet, dass die Stärkeren herausgefordert und gleichzeitig die Schwächeren nicht abgehängt werden.

Woher bekommt man nun solche Aufgaben? Sicherlich finden sich diese zunehmend in neueren Schulbüchern, doch es ist auch mit recht wenig Aufwand möglich, diese selbst zu gestalten. In der Fortbildungsveranstaltung werden zunächst einige solcher Aufgaben vorgestellt. Anschliessend werden Techniken gezeigt, wie man selbst solche Aufgaben entwickeln bzw. auf die eigene Situation anpassen kann.

Anmeldung: bitte bis 14. Oktober (Teilnehmerzahl begrenzt) auf

math.ch/WB2012

Mathematik \cap Wirtschaft

*Die Schnittmenge zwischen Wirtschaft und Mathematik wird zunehmend grösser.
Praxisorientierter Unterricht wird zunehmend wichtiger.*

Die DMK lädt Sie ein zum Weiterbildungskurs:

„Wirtschaftsmathematik im gymnasialen Mathematikunterricht“

Der Kurs wendet sich an Lehrpersonen der Sekundarstufe II.

Wirtschaftsmathematik umfasst verschiedenste Themen, die in der Schulmathematik nicht fehlen dürfen und dort ihren Platz haben sollten: Finanzmathematik, Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, deskriptive und induktive Statistik...

In diesem Weiterbildungskurs soll die Verknüpfung zwischen Schulmathematik und den verschiedenen Themenbereichen der Wirtschaftsmathematik deutlich gemacht werden. Die Teilnehmer werden anhand ausgewählter Fragestellungen in die Thematik eingeführt und lernen anschauliche Beispiele aus der ökonomischen Praxis kennen.

Wann: Mittwoch, den 31 Oktober 2012

Wo: Gymnasium Münchenstein, Basel

Kursbeitrag: 120 SFr.

Die Kursleitung übernimmt Dr. Carmen Brosche

Seit dem Abschluss ihrer Promotion in Wirtschaftsmathematik an der Technischen Universität in Jena lebt und arbeitet Frau Dr. Brosche in Dresden. Sie ist dort im Risikomanagement der ENSO Energie Sachsen Ost AG tätig.

Anmeldungen über www.math.ch/DMK2012/

Weiterbildung: 23. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht

Die SMG, die DMK und die ETH Zürich laden Sie herzlich zu dieser Weiterbildungsveranstaltung ein.

Kursdaten:

Thema: Das moderne Leben der Geometrie

Ort: MNG Rämibühl, Zürich

Datum: Mittwoch, 12. September, 2012

Organisation: Meike Akveld (ETH), Marco Bettinaglio (MNG), Norbert Hungerbühler (ETH)

Programm:

09:30 Uhr	Check-in in der Aula
10:00 Uhr	Begrüssung
10:30 Uhr	Vortrag: Robert Geretschläger <i>Origami und Geometrie – Papier kann mehr als man denkt</i>
11:30 Uhr	Pause
12:00 Uhr	Vortrag: Urs Lang <i>Tight Spans – spannende metrische Räume</i>
13:00 Uhr	Mittagessen
14:30 Uhr	Workshop I
15:15 Uhr	Kaffeepause
15:45 Uhr	Workshop II
16:30 Uhr	Offizielles Ende der Veranstaltung

Die hier angekündigten 8 Workshops finden je zweimal parallel an den im Programm aufgeführten Zeiten statt:

- Invarianten in der Mathematik – an Beispielen von Graphen, Flächen und Knoten (Anna Beliakova)
- Perspektive im Unterricht – CAD / CAM und Computergrafik (Marco Bettinaglio)
- Designerkurven – Bézierkurven im Unterricht (Baoswan Dzung Wong)
- Matrizen im 9. Schuljahr – ein induktiver Zugang (Eric Fitze)
- Geometrie in der Analysis (Peter Gallin)
- Origami und Geometrie – Papier kann mehr als man denkt: praktisches Erleben geometrischer Figuren im Papier (Robert Geretschläger)
- Differentialgleichungen – ein visueller Zugang (Markus Kriener)
- Beispiele aus der linearen Algebra ab 1930 – Wie geht das im Gymnasium von heute? (Hansruedi Schneebeili)

Bitte melden Sie sich bis spätestens 31.08.2012 auf der folgenden Webseite an:

www.math.ch/TMU2012

Dort finden Sie weitere Informationen zu den Workshops und der Anreise.

Cours CRM 2012

Sujets d'applications des mathématiques

Ce cours est organisé en collaboration avec le WBZ CPS de Berne.

La diversité des contenus de la partie « applications de mathématiques » des cours de l'OS Physique-Applications des mathématiques offre aux enseignants la possibilité d'une certaine créativité et diversité, et permet aux étudiants d'accéder à un contenu riche et varié. Ce cours de formation continue, loin de vouloir unifier ces enseignements, souhaite présenter aux participants divers sujets enseignés au secondaire II. Nous avons ainsi voulu donner la parole à des collègues qui ont été d'accord de présenter l'un ou l'autre des sujets qu'ils enseignent en classe et nous tenons ici déjà à les remercier pour leur investissement. Des intervenant extérieurs apporteront des compléments utiles à ce qui peut se faire dans nos cours. Sera présenté cette semaine un aperçu de la théorie des graphes (nouveau cahier de la CRM). Il sera également question de transformations d'images, de cryptographie, de codes binaires, de programmation linéaire, de valeur d'une option (cahier « Call & Put » de la DMK), de géométrie avec Cabri-Géomètre, ainsi que de statistiques et de méthodes d'échantillonnage. Nous présenterons en début du cours le résultat d'une enquête réalisée par la CRM et qui dresse la liste des sujets abordés dans notre OS et montre la diversité des sujets traités.

Pour la CRM, Jean-Marc Ledermann et Patrick Turttschy

Renseignements et inscriptions	
Dates :	du 11 au 14 septembre 2012
Programme :	voir le site de la CRM : http://www.sspmp.ch/crm/cours.htm
Prix du cours :	350.- francs
Inscription :	Cours CPS 12_04_01 www.webpalette.ch
Délai d'inscription :	13 juillet 2012
Lieu :	Leysin, hôtel Central-Résidence
Logement :	Hôtel Central-Résidence centralresidence@bonellihotels.ch Chaque participant réserve lui-même sa chambre
Prix logement :	115.- francs en chambre individuelle, demi-pension (midi) 80.- francs par personne en chambre double, demi-pension (midi)

Ja - Oui - Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prenom/Nome:

Adresse/Indirizzo (privat/privato):

Plz-Ort/NP-Ville/CAP -Luogo:

(Land/Pays/Paese):

Email: (Tel):

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita):

Sprache/Langue/Lingua: D F I.

Schule/école/scuola: Kanton/canton/cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo passive/passif/passivo

Student/in, étudiant(e), studente/ssa.

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG -SSPES -SSISS, Sekretariat (Frau Doris Lazzeri), 3000 Bern

oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber – *Éditeur*

VSMP / SSPMP / SSIMF

Korrespondenz – *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
 Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
 6005 Luzern

Layout – *Mise en page*

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
 Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
 1870 Monthey

Inserateverwaltung – *Publicité*

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
 Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
 8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

– *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

Ganzseitige Fr. 500.–
 Halbseitige Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
 über 20 g Nach Vereinbarung

Adressänderung – *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder – Membres de la SSPMP :

VSG – SSPES – SSISS

Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)

3000 Bern
 Tel. 056 443 14 54 / Fax 056 443 06 04

Abonnenten, die nicht Mitglieder des VSG sind:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
 Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
 6005 Luzern

Auflage – *Tirage*

900. Erscheint dreimal jährlich.

Vizepräsident VSMP – SSPMP – SSIMF

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
 Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
 8820 Wädenswil

Deutscheschweizerische Mathematikkommission

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
 Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
 8820 Wädenswil bis 31. Juli 2012

Daniela Grawehr grawehr@kfanet.ch
 Schützenstrasse 36 Tel. 041 810 49 88
 6430 Schwyz ab 1. August 2012

Deutscheschweizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
 Marienstrasse 21 Tel. 031 534 66 74
 3005 Bern

Commission Romande de Mathématique

José Luis Zuleta joseluis.zuletastrugo@epfl.ch
 Avenue de Rumine 42 Tél. 021 624 25 46
 1005 Lausanne

Commission Romande de Physique

Philippe Lo Bello ph.lobello@bluewin.ch
 Avenue Général-Guisan 38 Tél. 021 826 02 49
 1180 Rolle

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
 Via Vincenzo d'Alberti 13
 6600 Locarno Tél. 091 751 14 47

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

– *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 120 31.07.2012 (20.09.2012)
 Nr. 121 30.11.2012 (20.01.2013)
 Nr. 122 31.03.2013 (20.05.2013)

Internet-Adressen – Adresses Internet

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>