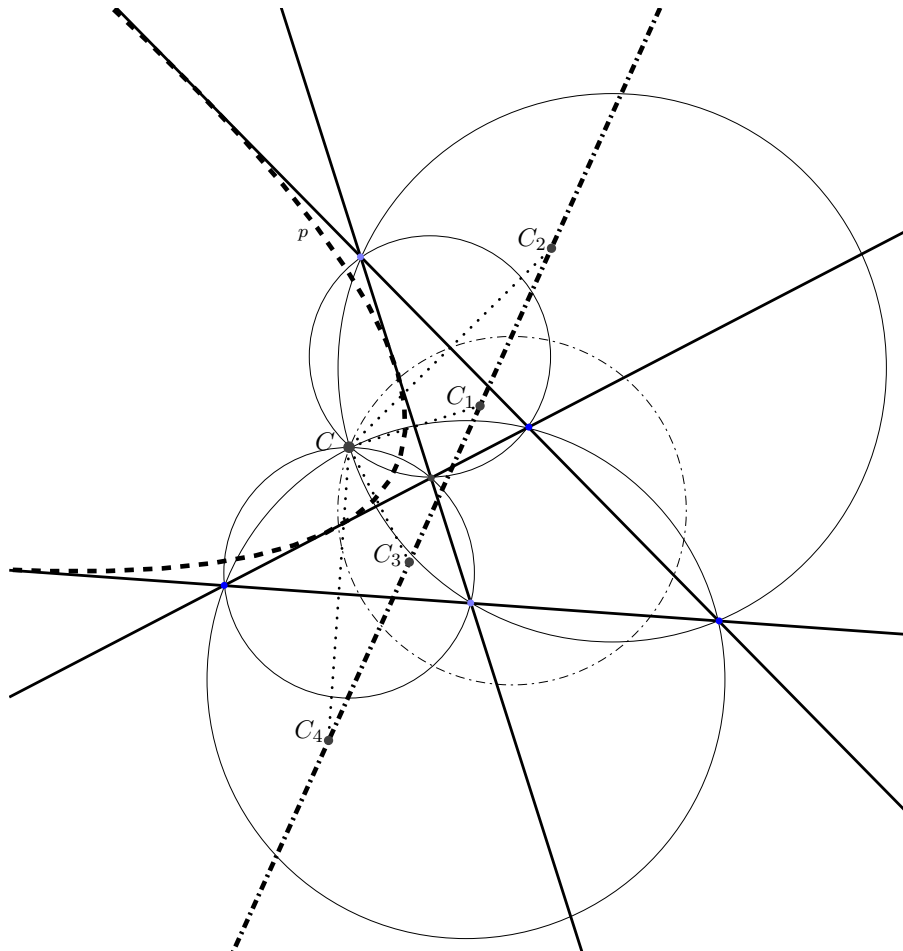




Bulletin

Januar 2016 — Janvier 2016

N° 130

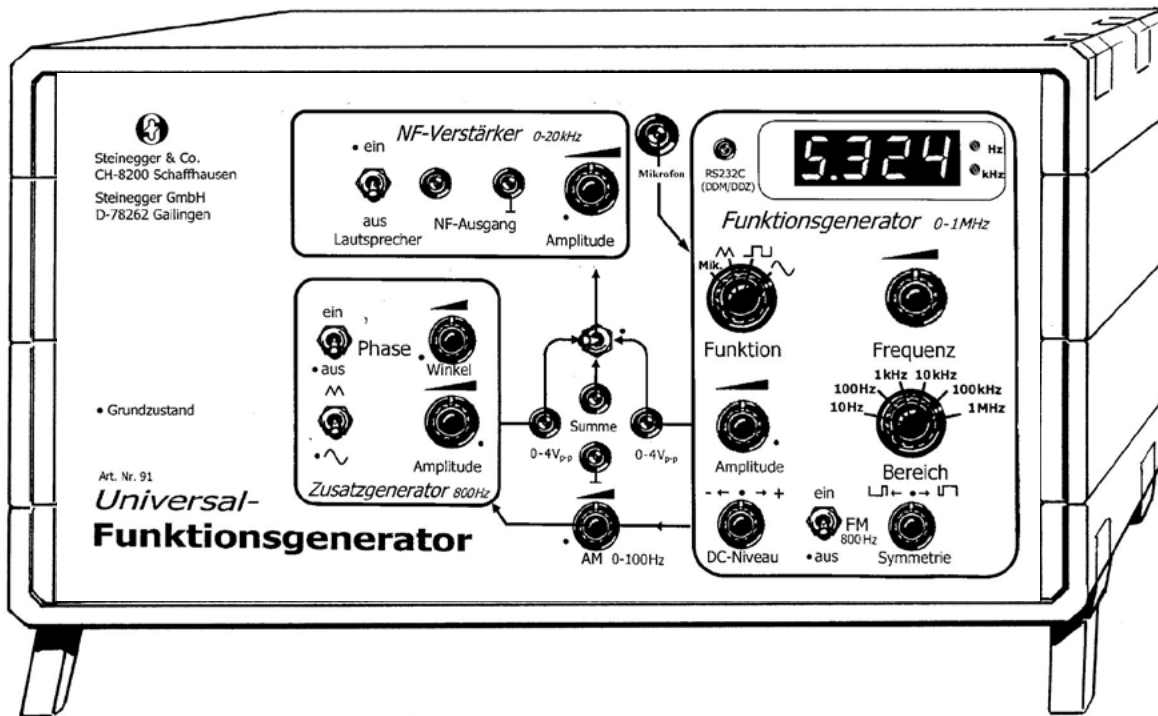


VSMP — SSPMP — SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Universal- Funktionsgenerator

Kompaktversion Art.Nr. 91



Das vielseitige Demonstrationsgerät für die Akustik, Schwingungs- und Wellenlehre sowie die Elektrik.

- **Funktionen: Sinus, Rechteck, Dreieck, Sägezahn**
- **Zwei Oszillatoren mit Synchronisationsmöglichkeit in beliebiger Phasenlage (für Interferenzversuche)**
- **Mikrofoneingang, NF-Verstärker, eingebauter Lautsprecher**
- **Frequenz- und Amplitudenmodulation**
- **Direkter Anschluss ans DDM und an den DDZ**
- **Ausführliche Bedienungsanleitung mit vielen Anwendungen**
- **Preis inkl. MWSt.: SFr. 1288.-**

Gerne senden wir Ihnen kostenlos die Kurzbeschreibung "Universal-Funktionsgeneratoren Nr. 91" zu.

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
8200 Schaffhausen



☎ : 052-625 58 90
Fax : 052-625 58 60
Internet: www.steinegger.de

In dieser Ausgabe — *Dans ce numéro*
Commission Romande de Mathématiques **2**

- Shaula Fiorelli Vilmart*
Empilement de cercles (II) 2
- Jean Daniel Voelke*
Compte rendu: Introduction à la logique et théorèmes de Gödel (Cours CRM 2015) 6


Deutschschweizerische Mathematikkommission **8**

- Diana Davis*
Billard und ebene Flächen 8
- Carla Cederbaum*
Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach 15
- Herbert Bruderer*
Der kleinste mechanische Parallelrechner der Welt 17
- Kurs: Potenzreihen, der Schlüssel zur Analysis* 22
- Urs Kirchgraber*
Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 1 24
- Peter Thurnheer*
Morley: „Kreisketten“ und komplexe Zahlen 32
- Roman Meier*
Wider die Hast. Ein Plädoyer für mehr Zeit und Musse und Gelassenheit im Mathematikunterricht. 38
- Matura Awards der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft 41


Commission Romande de Physique **42**

- Stéphane Davet*
Résumé: La physique des phénomènes atmosphériques 42
- Cours: Swiss Teacher Programme 2016 at CERN* 43
- CERN: S’CoolLab 44


Deutschschweizerische Physikkommission **45**

- Aegidius Plüss*
Computing im Physikunterricht 45
- Martin Lieberherr*
Zeichnen mit dem Gartenschlauch 46
- Unterrichtsmaterialien: Quantum Spin-Off Projekt* 48

Internet-Adressen — *Adresses Internet*

www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — *Page de Titre*

Cliffordpunkt als Brennpunkt einer Parabel (Peter Thurnheer, Artikel S. 32 in dieser Ausgabe)

Empilement de cercles (II)



Shaula Fiorelli Vilmart, Université de Genève, shaula.fiorelli@unige.ch

Suite de l'article *Empilement de cercles (I)* paru dans le numéro précédent du bulletin de la SSPMP

Résumé : En 1611, Johannes Kepler, écrit un petit livre intitulé *Strena, seu De nive sexangula*, comme cadeau de Noël à un ami. Kepler se demande pourquoi les flocons de neige sont de forme hexagonale [2]. C'est dans ces réflexions qu'est évoquée pour la première fois de l'histoire la question des arrangements de cercles. Comme Kepler ne donne aucune démonstration du fait que l'arrangement en hexagones est le plus dense possible, les historiens appelleront plus tard cette affirmation la *conjecture de Kepler* [1] en dimension 2. En 1773 Joseph-Louis Lagrange publie ses *Recherches d'arithmétique* [3] ayant pour objet l'étude des formes binaires quadratiques. En 1831 Karl Friedrich Gauss introduit la notion de réseaux [4]. Gauss remarque qu'on peut associer une forme binaire quadratique à un réseau ce qui lui permet de démontrer que l'arrangement *régulier* le plus dense est l'arrangement hexagonal.

Lien entre les réseaux et nos arrangements de cercles

Tracez des cercles de même rayon centrés sur les points du réseau. Si le rayon que vous avez choisi est assez grand, vos cercles se superposent et vous obtenez un *recouvrement régulier du plan*. Si le rayon est suffisamment petit, les cercles ne se superposent pas et vous obtenez un arrangement de cercles. Il s'agit maintenant de déterminer quelles sont les conditions sur les points du réseau pour que l'arrangement soit le plus dense possible. Comme l'arrangement est régulier, il suffit de regarder une petite partie du réseau. L'idée est d'observer le parallélogramme défini par l'origine et les deux vecteurs de base. Mais comme il y a une infinité de vecteurs de base pour un réseau donné, quel parallélogramme va-t-on donc étudier ? On va s'intéresser au parallélogramme engendré par la forme réduite, on l'appellera le *domaine fondamental*. Legendre avait montré d'une part, que dans une forme réduite, le coefficient C est plus petit que les deux autres ; ceci implique que le plus petit angle du domaine fondamental sera compris entre 60° et 90° . D'autre part, il a montré que le discriminant Δ sera toujours supérieur ou égal à $3B^2$. Par conséquent, l'aire du domaine fondamental sera toujours supérieure ou égale à $\frac{\sqrt{3}B}{2}$. Et quel est le domaine fondamental qui correspond à cette aire minimale ? En supposant que $B=1$, l'angle entre ses vecteurs est 60° et son aire vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (voir Figure 1).

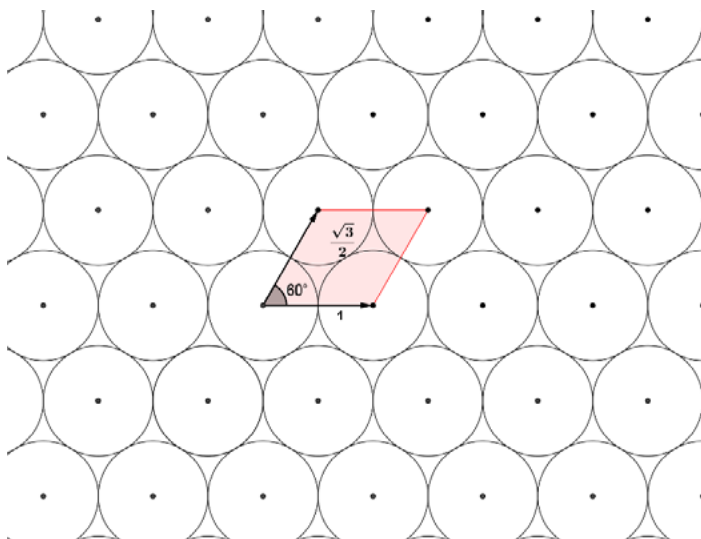


Figure 1 - Le réseau associé à la forme réduite minimale et l'arrangement de cercles associé. On retrouve bien l'arrangement hexagonal !

Ce domaine fondamental contient exactement un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ (en fait deux secteurs d'angle 60° et deux secteurs d'angle 120°). Vous aurez reconnu l'arrangement hexagonal ! En faisant le lien entre les formes binaires quadratiques et les réseaux, Gauss a donné tous les éléments permettant de démontrer que, dans le cas d'un arrangement régulier, l'arrangement le plus dense est l'arrangement hexagonal. Il a fallu 220 ans pour démontrer la conjecture de Kepler en dimension 2 dans le cas régulier. Reste le cas d'une configuration quelconque, pas nécessairement régulière.

les éléments permettant de démontrer que, dans le cas d'un arrangement régulier, l'arrangement le plus dense est l'arrangement hexagonal. Il a fallu 220 ans pour démontrer la conjecture de Kepler en dimension 2 dans le cas régulier. Reste le cas d'une configuration quelconque, pas nécessairement régulière.

Cas d'une configuration quelconque

En 1892, Axel Thue, un mathématicien norvégien, propose une première tentative de preuve du cas quelconque. Malheureusement, son article s'avère être plus un plan de travail qu'une véritable démonstration. Dix-huit ans plus tard, il fournit une nouvelle preuve [5], qui contient toujours trop d'affirmations non démontrées. La conjecture résiste.

Finalement, en 1940, László Fejes Tóth, un mathématicien hongrois, publie un article de deux pages et demi contenant la première démonstration rigoureuse de la conjecture de Kepler en dimension deux [6].

L'idée de Fejes Tóth est de ne plus s'attacher aux cercles mais uniquement à leurs centres. Pratiquement, il démontre que la manière la plus dense de distribuer des points à l'intérieur d'une surface (de façon que la distance entre chaque point soit supérieure ou égale à une distance minimale donnée) est de les disposer selon le réseau hexagonal. Voyons son raisonnement.

Fejes Tóth commence son article en posant l'assertion suivante qu'il se propose de démontrer. C'est de cette assertion que découlera naturellement le résultat tant recherché.

Assertion

Soient n points tirés au hasard à l'intérieur d'une surface d'aire T et d la plus petite distance entre deux points. Pour tout point, on construit un carré de côté d centré en ce point (voir Figure 2). Alors la surface couverte par les carrés est majorée par $\frac{2\sqrt{3}}{3}T$, autrement dit¹ : $nd^2 \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}T$.

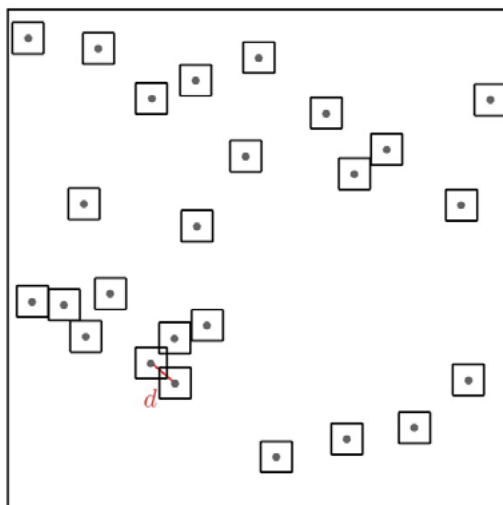


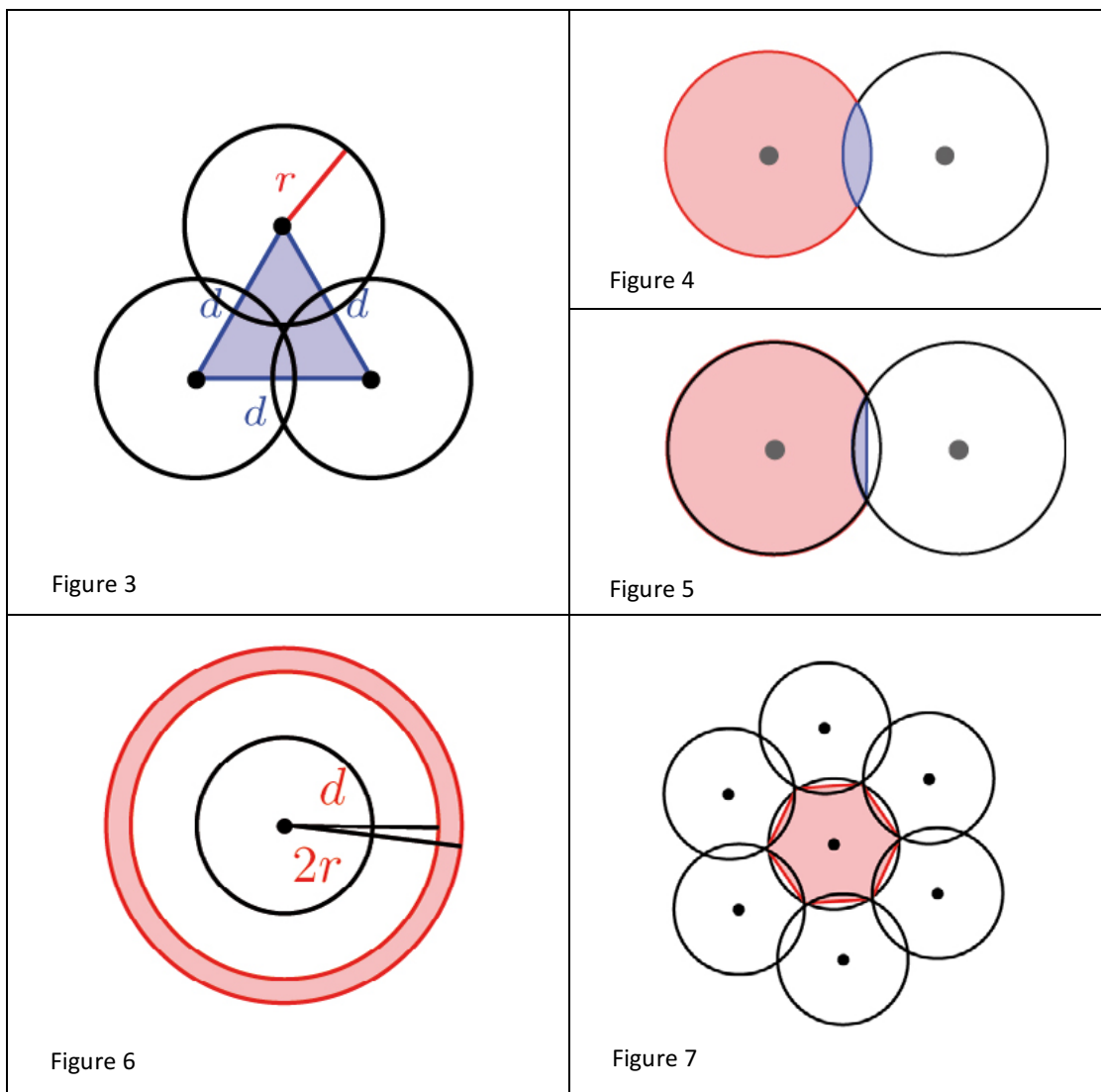
Figure 2 - Illustration de l'assertion de Fejes Tóth

Preuve

La démonstration repose sur la construction d'une famille de disques telle que chaque point du plan est recouvert par au plus deux disques.

Pour chacun des n points donnés, on construit un disque centré en ce point de rayon $r = \frac{\sqrt{3}}{3}d$. Ce rayon correspond au rayon du cercle circonscrit à un triangle équilatéral de côté d . Ce choix garantit que trois cercles centrés sur chacun des sommets d'un triangle équilatéral s'intersectent en un unique point et que les trois disques n'ont pas d'intersection commune (voir Figure 3).

¹ En réalité, Fejes Tóth majore la limite de l'aire couverte par les carrés lorsque le nombre de points tend vers l'infini. Mais l'assertion plus faible présentée ici convient parfaitement à notre exposé.



Avec ce choix de rayon, un point quelconque de la surface T peut être couvert par au plus deux disques.

Quelle est la surface couverte par ces disques ?

Puisque les disques peuvent se superposer, on ne peut pas simplement additionner les aires des n disques. Mais comme chaque point de la surface T peut être couvert par au plus deux disques, Fejes Tóth considère l'aire $D_i = t_i^1 + \frac{1}{2}t_i^2$ où t_i^1 est la surface du disque i recouverte par le seul disque i (partie ombrée de la Figure 4, intersection exclue) et t_i^2 est la surface du disque i recouverte par le disque i et un autre disque (l'intersection des deux disques de la Figure 4). On peut se représenter cette idée comme sur la Figure 5, chaque disque qui coupe le disque i « grignote » la moitié de la surface d'intersection. Ainsi, l'aire couverte par les disques est exactement la somme des D_i .

Fejes Tóth remarque alors que pour chaque i , l'aire D_i peut être minorée par $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$, c'est-à-dire par l'aire d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle de rayon r . Observons en effet comment réduire l'aire D_i .

Soit le disque i . Pour qu'un disque le coupe, son centre doit être à une distance d au plus $2r$ du centre du disque i . Mais on a imposé que la distance minimale entre deux points est d . Ainsi, le centre du disque doit se trouver dans la couronne de la Figure 6. Avec les contraintes que l'on s'est imposées, de 1 à 7 centres de disques peuvent prendre place dans cette couronne. Cependant, c'est avec 6 disques que l'on « grignote » le

plus de surface au disque i ; et c'est en les plaçant sur les sommets d'un hexagone régulier centré au point i (voir Figure 7). On établit que :

$$T \geq \sum_{i=1}^n D_i \geq \sum_{i=1}^n \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2 = n \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2 = n \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} d \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} n d^2.$$

On a ainsi démontré l'assertion.

Il s'ensuit que la seule manière d'atteindre la borne inférieure donnée par l'assertion est de disposer les points selon le réseau hexagonal ! Ce qui implique que l'arrangement hexagonal est bien l'arrangement de cercles le plus dense possible.

Conclusion

La *conjecture de Kepler*, question d'apparence anodine, cache 329 ans d'histoire des mathématiques. Toute la difficulté réside dans la démonstration. Nous avons présenté les outils mathématiques nécessaires pour aboutir à une démonstration du cas général. Cette démarche révèle des liens cachés entre des théories mathématiques développées dans des contextes différents et qui, mises en relation, permettent de dénouer le problème, comme c'est souvent le cas en mathématiques.

Remerciements

Un grand merci à Mireille Schumacher pour ses relectures attentives, ses conseils et son aide dans la finalisation de cet article.

Bibliographie

- [1] G. Szpiro, *Kepler's Conjecture*, Wiley, John & Sons Inc, 2003
- [2] K. G. Libbrecht, *The physics of snow crystals*, Reports on Progress in Physics, vol. 68 (14), 2005
- [3] J.-L. Lagrange, *Recherches d'arithmétique*, Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et des belles-lettres de Berlin, pp. 695-795, 1773 et 1775
- [4] K. F. Gauss, Besprechung des Buchs von L.A. Seeber : *Untersuchungen über die Eigenschaften der positive ternären quadratischen Formen*, Göttingische Gelehrte Anzeigen, 1831
- [5] A. Thue, *Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene*, Christinia Vid. Selsk. Skr. 1, pp. 1-9, 1910
- [6] L. Fejes Tóth, *Über einen geometrischen Satz*, Mathematische Zeitschrift 46, 1940.

Cours de formation continue de la CRM

Introduction à la logique et théorèmes de Gödel

Le cours a eu lieu à Leysin du mardi 15 au vendredi 18 septembre 2015 et était organisé par MM. Patrick Turtschy et Jean-Daniel Voelke. Il a réuni 45 participants. Onze exposés de 90 minutes chacun ont été donnés par 3 conférenciers.

L'enseignement du mardi comprenait trois modules et a été entièrement assuré par M. Jacques Duparc, professeur à la Faculté des HEC de l'Université de Lausanne et chargé de cours à l'EPFL. Les deux premiers modules ont permis de mettre en place les notions fondamentales de la logique du 1^{er} ordre. M. Duparc a commencé par traiter l'aspect syntaxique en définissant la notion de langage. Il a ensuite traité l'aspect sémantique en introduisant la notion de modèle d'un langage. Il a donné comme exemples différents modèles du langage de l'arithmétique. La notion d'évaluation d'une formule dans un modèle a été expliquée d'abord de manière classique puis à l'aide de la notion de jeu fini à deux joueurs et à information parfaite. M. Duparc a poursuivi en abordant la théorie de la démonstration à partir de la méthode de démonstration naturelle de Gentzen. Il a donné plusieurs exemples de démonstrations de formules et a mis en évidence la différence entre logique classique et logique intuitionniste. Il a conclu avec le théorème de complétude de la logique du 1^{er} ordre, dont il a expliqué la signification.

Le troisième module était indépendant des précédents et avait comme titre «Le Paradis de Cantor». M. Duparc a commencé par redémontrer deux résultats bien connus : il n'y a pas de bijection entre un ensemble A et l'ensemble de ses parties $P(A)$ et il n'y a pas de bijection entre \mathbb{N} et \mathbb{R} . Les preuves sont fondées sur un raisonnement «diagonal». Il a ensuite établi le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein¹ en s'aidant d'une comparaison avec des spectateurs cherchant leur place dans un théâtre. La seconde partie du module était consacrée aux notions d'ensemble bien ordonné et d'ordinal. M. Duparc a en particulier montré comment définir une arithmétique des nombres ordinaux au moyen d'une récurrence transfinie. Il a aussi défini la notion de cardinal d'un ensemble et expliqué la signification de l'hypothèse du continu.

Le conférencier du mercredi (deux modules) était M. Amirouche Moktefi, historien de la logique et enseignant à la Tallinn University of technology. Le titre de son exposé était «La mathématisation de la logique». Après une introduction sur la méthode en histoire des sciences, il a rappelé les caractéristiques principales de la syllogistique. Il a ensuite montré comment Euler avait utilisé des diagrammes pour résoudre des problèmes faisant intervenir des syllogismes. Ces diagrammes sont ceux que nous utilisons encore aujourd'hui dans notre enseignement. Leur usage peut dans certains cas poser des difficultés. M. Moktefi a expliqué comment Boole avait au milieu du 19^e siècle développé une algèbre de la logique permettant de transcrire les propositions en équations. A la suite de Boole, d'autres mathématiciens ont développé des systèmes allant dans le même sens. Il a aussi été question de la représentation diagrammatique inventée par Venn ; celle-ci permet de résoudre des problèmes logiques plus simplement que celle d'Euler. M. Moktefi a conclu en montrant comment Peano a effectué à la fin du 19^e siècle une synthèse des différentes méthodes algébriques en logique.

La journée du jeudi comprenait quatre modules. Les deux premiers, intitulés «Machines de Turing et récursivité», ont été donnés par M. Jérémie Cabessa, enseignant chercheur à l'Université de Paris 2. Il a commencé par définir une machine de Turing. Quelques vidéos ont permis de mieux comprendre le fonctionnement d'une telle machine. Lorsqu'un input u est soumis à une machine de Turing M , trois situations peuvent se produire : M peut accepter u , le rejeter ou tourner en boucle. Ces différentes situations amènent à introduire les concepts de langage Turing-

¹ Ce théorème s'énonce comme suit : soient A et B deux ensembles ; s'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A , il existe alors une bijection de A dans B .

reconnaissable (récursivement énumérable) et de langage Turing-décidable (récursif). M. Cabessa a poursuivi en expliquant la différence entre machines déterministes et non-déterministes. Ces deux types de machines peuvent résoudre les mêmes problèmes, mais on ne sait actuellement toujours pas si les temps de résolution sont comparables ou non. Le reste de l'exposé était consacré au «problème de l'arrêt» : existe-t-il une machine de Turing H qui, étant donné le code d'une machine M de Turing et le code d'un input u , permette de décider si M s'arrête sur u ou non ? Ce problème est Turing-reconnaissable mais n'est pas Turing-décidable. Il est lié à un autre problème énoncé par Hilbert et Ackermann en 1928 et appelé «Entscheidungsproblem» : étant donné un ensemble d'hypothèses Γ et une formule φ de la logique du 1^{er} ordre, existe-t-il une procédure effective permettant de déterminer en un temps fini si φ est prouvable à partir de Γ ? M. Cabessa a montré de manière détaillée comment ce problème peut être ramené à celui de l'arrêt et est par conséquent Turing-indécidable.

Les deux modules du jeudi après-midi étaient à nouveau confiés à M. Duparc. Le premier lui a permis de présenter plusieurs théorèmes importants de la logique du 1^{er} ordre. Après avoir introduit la notion de théorie satisfaisable, M. Duparc a abordé le théorème de compacité de la logique. Il a donné deux démonstrations de ce résultat, l'une à partir du théorème de complétude et l'autre à partir de la notion d'ultra-produit et d'un autre théorème important, celui de Los. Il a aussi établi les deux théorèmes de Löwenheim-Skolem portant sur les cardinaux possibles pour les différents modèles d'une théorie. Le second module était principalement consacré à l'axiome du choix. M. Duparc a montré que celui-ci est équivalent au lemme de Zorn et au théorème de Zermelo. Il a présenté différentes variantes, plus ou moins fortes, de cet axiome et donné des exemples de résultats équivalents à chacune d'entre elles. Bon nombre de ces résultats font partie de la topologie. Il a enfin proposé deux utilisations amusantes de l'axiome du choix dans le cadre de jeux faisant intervenir une infinité dénombrable de joueurs.

Le cours s'est terminé le vendredi matin avec deux modules donnés par M. Duparc et consacrés aux théorèmes de limitation. Il s'agissait sans doute de la partie la plus fascinante et la plus complexe du cours. M. Duparc a d'abord introduit les notions de fonctions récursives et partielles récursives et fait le lien avec les machines de Turing. Il a ensuite défini le concept de fonction représentable et expliqué comment associer à tout terme, toute formule et toute preuve du langage de l'arithmétique un nombre entier appelé «nombre de Gödel». Une fois ces notions définies, M. Duparc a pu énoncer le premier théorème d'incomplétude de Gödel et mettre en lumière le point crucial de la preuve, fondée à nouveau sur un raisonnement diagonal. Il a terminé son exposé en expliquant les hypothèses et la signification du second théorème d'incomplétude de Gödel. Il a remis son cours de l'EPFL aux auditeurs souhaitant étudier les détails techniques des preuves.

Au terme de ce cours, les participants se sont déclarés très satisfaits. Ils ont pu comprendre la signification de plusieurs résultats fondamentaux de logique. Ils ont aussi apprécié l'excellente préparation et le talent pédagogique des différents intervenants.

J.D. Voelke
Membre de la CRM

Billard und ebene Flächen

Diana Davis



1. LOS GEHT'S!

Wo auch immer Sie gerade sitzen und diesen Artikel lesen: Um Sie herum stoßen ständig Sauerstoff-Atome und andere Gasteilchen zusammen und prallen voneinander und von den Raumwänden ab. Die genaue Bewegung der einzelnen Teilchen nachzuvollziehen, ist vielleicht interessant, aber sehr kompliziert. Mathematiker neigen dazu, das Problem zuerst soweit wie möglich zu vereinfachen, um dann zunächst das vereinfachte System zu verstehen. In unserem Fall könnten wir das System dahingehend verändern, dass wir nur ein einziges Teilchen in seiner Bewegung durch den Raum studieren und alle anderen Teilchen außer Acht lassen, sodass es keine Kollisionen oder andere Interaktionen zwischen verschiedenen Molekülen mehr gibt. Wir könnten es sogar noch weiter auf zwei statt drei Dimensionen vereinfachen, indem wir ein Teilchen auf einer Oberfläche studieren, gleich einem Ball auf einem Billardtisch. Wie sich herausstellen wird, ist schon dieser Fall interessant genug.

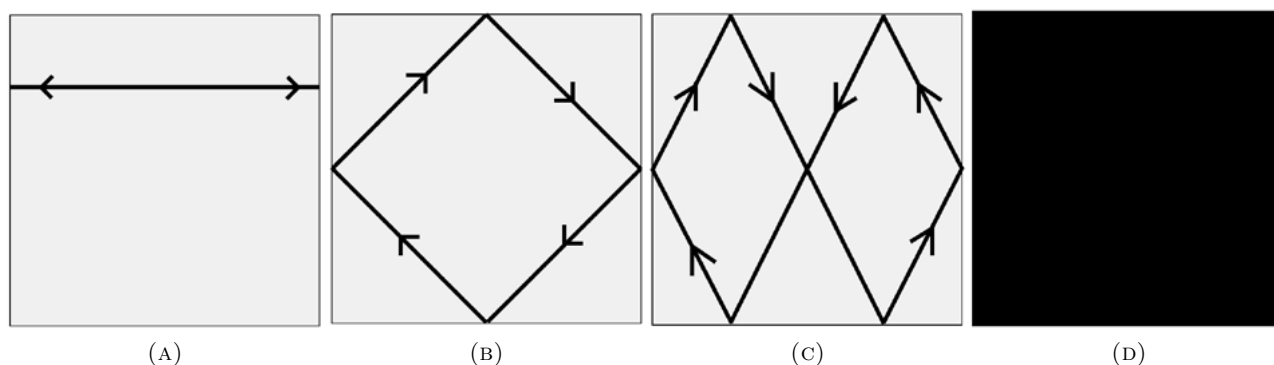


ABBILDUNG 1. Unterschiedliche Pfade auf einem quadratischen Billardtisch.

Betrachten wir den einfachsten Fall, in dem der Billardtisch quadratisch ist. Wir nehmen an, dass wir uns den Ball (oder das Teilchen) als einen einzigen Punkt vorstellen können, der sich reibungslos bewegt (also nie zur Ruhe kommt), und dass er beim Auftreffen auf die Bande des Tisches im gleichen Winkel reflektiert wird, in dem er darauf zugelaufen ist (genau wie in der Wirklichkeit).

Ist es möglich, den Ball so anzustoßen, dass sich sein Pfad über den Tisch wiederholt? Ja: Wenn wir ihn vertikal oder horizontal in Bewegung setzen, wird er zwischen zwei gegenüberliegenden Punkten an parallelen Rändern des Tisches hin- und herlaufen, siehe Abbildung 1(a). Wir sagen dann, dass diese *Trajektorie* (Pfad) *periodisch* mit *Periode* 2 ist (der Ball springt zweimal vom Rand des Tisches zurück, bevor er seine Bahn wiederholt). Andere Beispiele für periodische Trajektorien, mit Periode 4 bzw. 6, sind in den Abb. 1(b)-1(c) dargestellt.

Kann man den Ball so anstoßen, dass sich seine Trajektorie *niemals* wiederholt? Sich das Bild einer solchen *nicht-periodischen* Trajektorie vorzustellen, ist deutlich schwieriger, da sich die Trajektorie ja nie wiederholt. Tatsächlich wird die Trajektorie den Tisch Stück für Stück einnehmen, bis das Bild zu einem gänzlich schwarzen Quadrat geworden ist (Abbildung 1(d)). Wenn wir uns jedoch nicht auf den Tisch beschränken, sondern den Tisch *aufklappen*, dann gelingt es, das Bild einer solchen Trajektorie zu zeichnen.

Betrachten wir dazu die einfache Trajektorie, die unten in Abbildung 2(a) dargestellt ist. In dem Moment, in dem der Ball den oberen Rand des Tisches erreicht, *klappen* wir den Tisch nach oben *auf*, indem wir eine Kopie des Tisches an den oberen Rand anfügen. Der Ball kann nun in dieser Kopie weiter geradeaus laufen, anstatt nach unten umgelenkt zu werden (Abbildung 2(b)).¹ Wenn der Ball

¹Am besten stellt man sich einen transparenten Tisch vor, dann muss man sich nicht darum sorgen, ob der Ball jetzt auf der „Oberseite“ oder auf der „Unterseite“ des Tisches ist.

nun als nächstes den rechten Rand des Tisches erreicht, machen wir das gleiche noch einmal: Wir klappen den Tisch nach rechts auf, indem wir dort eine weitere Kopie anfügen, in der der Ball geradeaus weiterlaufen kann (Abbildung 2(c)). Diesen Vorgang können wir beliebig oft wiederholen: Wir erstellen jedes Mal eine weitere Kopie, wenn die Trajektorie eine Kante des Tisches erreicht. Auf diese Art können wir die Trajektorie auf dem quadratischen Tisch durch eine gerade Linie auf Millimeter-Papier darstellen.

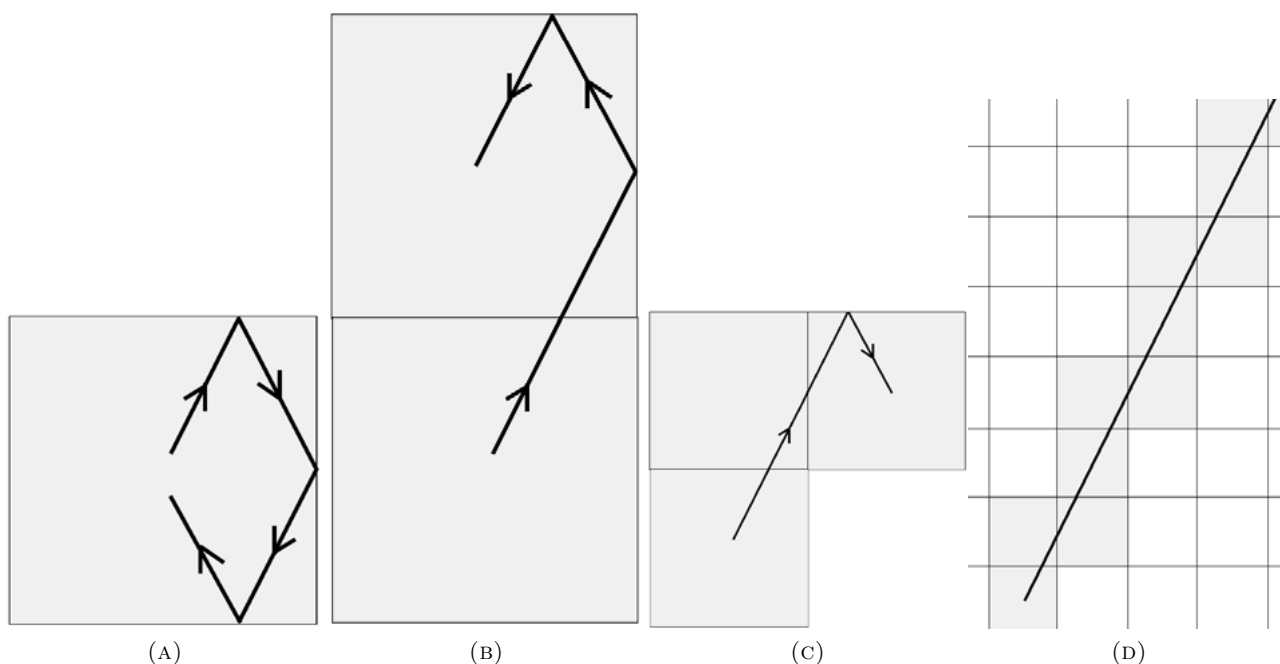


ABBILDUNG 2. Aufklappen des Billardtisches.

Mithilfe dieser Darstellung können wir mühelos ein Beispiel für eine nicht-periodische Trajektorie finden. Nehmen wir dazu an, dass wir eine Linie mit *irrationaler* Steigung zeichnen. Diese wird niemals zwei verschiedene horizontale (oder vertikale) Kanten im gleichen Punkt schneiden, denn täte sie das, dann wäre die Steigung zwischen den entsprechenden Punkten gleich dem Verhältnis zweier ganzer Zahlen. Wir haben aber eine irrationale Steigung gewählt, also kann das nicht passieren. Stoßen wir den Ball also mit *irgendeiner* irrationalen Steigung an, so wird seine Trajektorie auf dem Tisch nicht-periodisch sein. Auf die gleiche Weise kann man zeigen, dass die Trajektorie des Balls periodisch sein wird, wenn wir ihn mit *rationaler* Steigung anspielen.

2. UNGEWÖHNLICHE BILLARDTISCHE

Hier sind einige grundsätzliche Fragen, die man zu dynamischen Systemen aufwerfen kann: Weist das System periodisches Verhalten auf? Gibt es nicht-periodisches Verhalten? Wir haben gesehen, dass beide Fälle bereits für den einfachsten Fall, den des quadratischen Tisches, auftreten können. Verzerrt man den Tisch in vertikaler oder horizontaler Richtung, so bleiben die Regeln des Systems unverändert. Folglich gelten dieselben Resultate auch für alle rechteckigen Tische. Jetzt sind wir vielleicht bereit, unser System komplizierter zu machen. Dieselben Fragen können wir uns auch für jede andere beliebige Tischform stellen - beispielsweise für einen dreieckigen Tisch, einen fünfeckigen Tisch oder einen Tisch, der aus mehreren zusammengeklebten Rechtecken besteht. Abbildung 3 zeigt eine Trajektorie mit vielen Bandenkontakten auf einem fünfeckigen Tisch. (Können Sie sich vorstellen, wie eine Trajektorie auf einem kreisförmigen Tisch aussehen würde?)

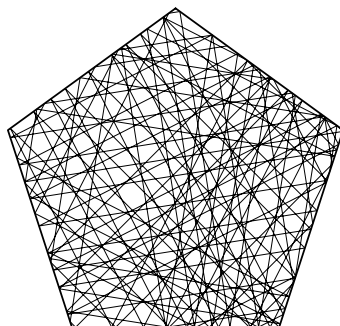


ABBILDUNG 3. Eine Trajektorie auf einem fünfeckigen Tisch.

Wir haben bereits gesehen, dass im Fall des quadratischen Tisches jede Trajektorie entweder periodisch ist (und wir ihr Bild zeichnen können) oder dass ihr Pfad schließlich den gesamten Tisch abdeckt (das Bild wird schwarz). Trifft das immer zu? Überraschenderweise lautet die Antwort: Nein! Es gibt Tische, auf denen eine Trajektorie einen Teil des Tisches komplett abdecken kann, aber einen anderen Teil nie erreicht: Eine Illustration dieses Phänomens ist in Abbildung 4 dargestellt, sie wurde von Curtis McMullen konstruiert. Die Trajektorie bleibt in dem Rechteck und einem Teil des Quadrats „stecken“, die zwei Ecken des Quadrats kann sie nie erreichen. Ließen wir den Ball weiterlaufen, so würde die schattierte Region komplett schwarz eingefärbt, die Ecken jedoch blieben weiß.

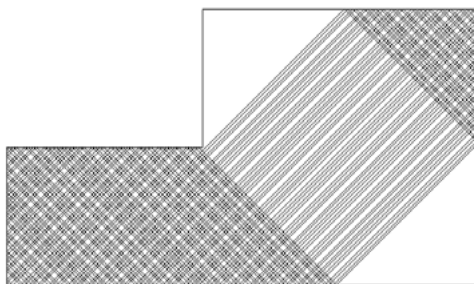


ABBILDUNG 4. Eine nicht-periodische Trajektorie, die niemals die weißen Ecken erreicht.

Das wirft folgende Frage auf: Welche Tischformen besitzen die Eigenschaft, dass jede nicht-periodische Trajektorie den ganzen Tisch abdeckt? Wie sich zeigt, ist das für die meisten Tische nicht der Fall, sondern lediglich für solche mit ausgeprägter Symmetrie. Dazu zählen Polygone, Tische aus mehreren zusammengeklebten Quadraten, und einige einfache Dreiecke. Gegenwärtig wird weiter daran gearbeitet, mehr Beispiele für Tischformen mit dieser Eigenschaft zu finden, aber bislang sind nur diese wenigen Beispiele bekannt [1, 5, 6].

3. BILLARD AUF EINEM DONUT

Gehen wir noch einmal zu dem aufgeklappten Billardtisch zurück. Wir haben den oberen Rand des Tisches aufgeklappt und damit eine Kopie des Tisches erzeugt, in der der Ball weiter geradeaus laufen kann. Dadurch verhält sich der Rand, von dem der Ball abgeprallt wäre, nicht mehr wie eine Wand. Deshalb stellen wir ihn in Abbildung 5 als gestrichelte Linie dar. Der neue obere Rand ist nur eine Kopie des unteren Randes, deshalb bezeichnen wir beide mit A , um uns an die Identität der beiden zu erinnern. Genauso haben wir den rechten Rand des Tisches aufgeklappt und eine weitere Kopie des bereits aufgeklappten Tisches erzeugt, wodurch wir nun vier Kopien des Originaltisches haben. Der neue rechte Rand ist eine Kopie des linken Randes, also bezeichnen wir beide mit B . Erreicht die Trajektorie nun den oberen Rand A , erscheint sie einfach von Neuem an der gleichen Stelle des unteren Randes A und läuft weiter. Genauso erscheint sie einfach von Neuem am linken Rand B , wenn sie den rechten Rand B getroffen hat. Diesen Prozess bezeichnet man als *Identifikation* des oberen und des unteren bzw. des linken und des rechten Randes.

Diese Idee des „Wiedererscheinens“ aus der linken Wand, nachdem man die rechte Wand erreicht hat, könnte Ihnen aus Videospiele wie „Pac-Man“, „Snake“ oder „Portal“ geläufig sein. Was Ihnen dabei entgangen sein mag, ist die Tatsache, dass Sie sich in Folge der Identifikationen nicht mehr auf einer flachen Ebene befinden, sondern auf einer ganz anderen ebenen Fläche! In Wirklichkeit ist diese Fläche die Oberfläche eines Bagels oder Donuts, die von Mathematikern als *Torus* bezeichnet wird.

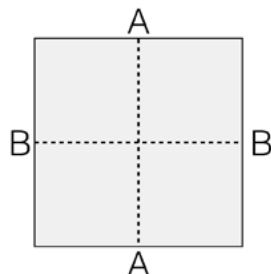


ABBILDUNG 5. Identifizierung der Kanten eines Quadrates.

Es ist hilfreich, sich den Grund dafür zu vergegenwärtigen. Klebt man beide Kopien des Randes *A* zusammen, so erhält man einen Zylinder, dessen beiden Enden jeweils gleich dem Rand *B* sind (Abbildung 6). Wenn Sie den Zylinder nun umbiegen, um beide Kopien des Randes *B* auch zusammenzukleben, dann erhalten Sie die Torusfläche (dabei müssen Sie den Zylinder ordentlich strecken und stauchen, aber keine Sorge, Sie dürfen sich ihn als sehr elastisch vorstellen).

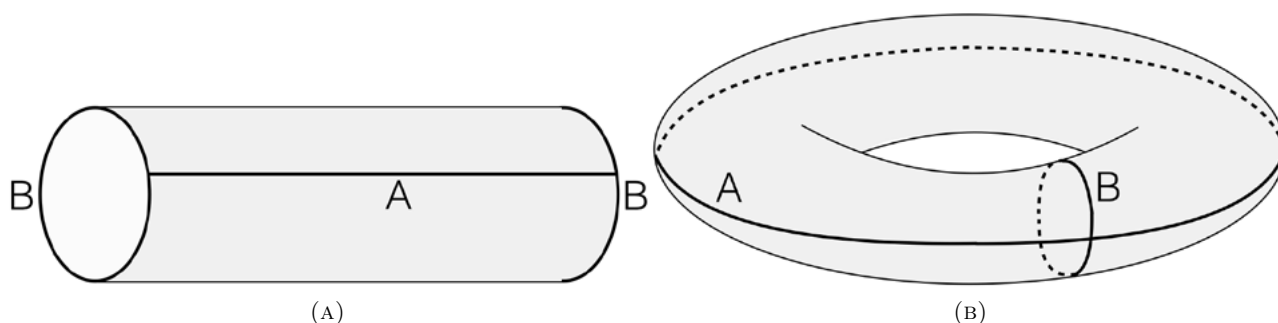


ABBILDUNG 6. Zusammenkleben des Torus.

Auf dieselbe Art können wir viele andere Flächen erzeugen (siehe Abbildung 7). Wenn wir beispielsweise alle parallelen Kanten eines regelmäßigen Achtecks identifizieren, so erhalten wir eine andere Fläche, nämlich einen Torus mit zwei Löchern [4]. Genauso können wir zwei Fünfecke nehmen, eines um 180 Grad drehen, und alle fünf Paare paralleler Kanten identifizieren.² Es stellt sich heraus, dass die entstandene Fläche ebenfalls der Torus mit zwei Löchern ist.

Können Sie sich vorstellen, auf welche Weise man die identifizierten Kanten des Achtecks aufrollen und zusammenkleben muss, so wie wir es mit dem Quadrat gemacht haben? Es ist viel schwieriger – das Achteck muss ordentlich gequetscht werden, wenn man seine Ecken aneinander fügt. Dennoch kann man es schaffen; in *Algebraic Topology* von Allen Hatcher findet sich eine sehr gute Darstellung [3, S.5].

4. VERDREHUNG DER OBERFLÄCHE

Meine Forschung über das Doppelfünfeck und andere verwandte Flächen befasst sich mit dem folgenden Problem: Angenommen, wir haben eine Trajektorie auf einer Fläche. Nun zerschneiden wir die Fläche, verdrehen sie, und setzen sie derart wieder zusammen, dass die zerschnittenen Ränder erneut zusammengeklebt werden. Was geschieht dadurch mit der Trajektorie?

²Ich habe ein Video erstellt, in dem Tanz benutzt wird, um meine Forschung über das Doppelfünfeck rigoros zu erklären: <http://vimeo.com/47049144>.

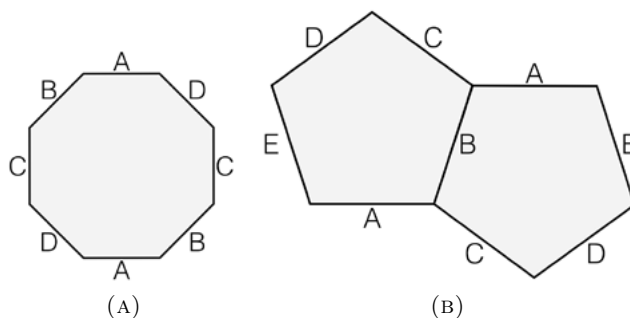


ABBILDUNG 7. Ein Achteck oder zwei Fünfecke kann man zum Torus mit zwei Löchern zusammenkleben.

Auf dem Torus bedeutet das, die Fläche einmal aufzuschlitzen, sie ein-, zwei-, drei- oder mehrmals zu verdrehen (in Abbildung 8 wird sie einmal verdreht), und dann die Enden wieder zusammenzukleben. Wenn wir mit einer sehr einfachen Trajektorie beginnen (einem Äquator des Torus), dann führt das Verdrehen dazu, dass die Trajektorie um das Loch in der Mitte herumläuft.

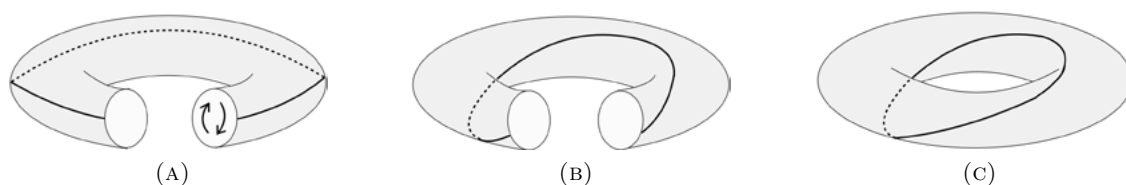


ABBILDUNG 8. Der Torus wird durchgeschnitten, verdreht, und wieder zusammengeklebt.

Schon für dieses einfachste Beispiel ist es schwierig, sich die Trajektorie auf der Torusfläche vorzustellen. In Abbildung 9 hingegen sehen wir, dass sie sich viel leichter auf das Quadrat zu zeichnen lässt; das trifft für die Originaltrajektorie in Abbildung 9(a) zu als auch auf die verdrehte in Abbildung 9(b). Im Fall komplizierterer Flächen und komplizierterer Trajektorien (siehe Abbildung 9(c)) lassen sich die Verdrehung und ihre Folgen viel leichter auf den Polygonen studieren als auf den drei-dimensionalen Darstellungen der Flächen.

Wir benötigen noch eine geeignete Art, um auf eine Trajektorie auf einer Fläche Bezug zu nehmen. Als sehr bequem erweist es sich, einfach die Folge der Kanten-Bezeichnungen aufzuschreiben, welche die Trajektorie kreuzt: Die Trajektorie in Abbildung 9(a) würde als $\dots BBB \dots$ oder kurz \overline{B} bezeichnet, die Trajektorie in Abbildung 9(b) wäre $\dots ABABAB \dots$ oder \overline{AB} , und die aus Abbildung 9(c) wäre \overline{EBECDC} . Man spricht von den *Schnittsequenzen* der Trajektorien.

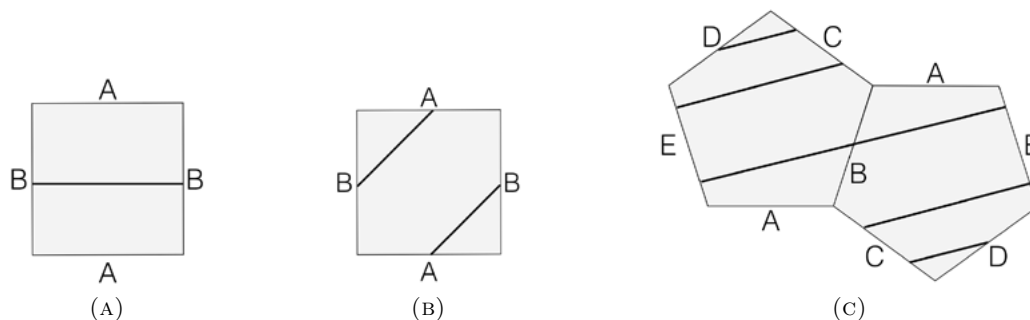


ABBILDUNG 9. Die Verdrehung der Trajektorie auf einem Quadrat (a)-(b) und eine Trajektorie auf zwei Fünfecken (c).

Man kann sich nun die folgende Frage stellen: Können wir entscheiden, ob eine gegebene Folge von A s und B s die Schnittsequenz einer Trajektorie auf dem quadratischen Torus ist? Können Sie sich eine Folge von A s und B s überlegen, die keiner Schnittsequenz auf dem quadratischen Torus entspricht?³

Die Schnittsequenzen aus A s und B s auf dem quadratischen Torus sind interessant und von großer mathematischer Schönheit. Es lässt sich ein Bezug zwischen ihnen und Kettenbrüchen herstellen: Man kann die Schnittsequenz einer Trajektorie nutzen, um die Kettenbruchdarstellung der Steigung der Trajektorie zu bestimmen. Selbst im Fall einer irrationalen Steigung gibt es einen Algorithmus, mit dem man immer bessere Näherungen der Steigung aus der Schnittsequenz gewinnen kann. Finden Sie heraus, wie sie die Anzahl der A s und B s in einer Wiederholung der Schnittsequenz einer periodischen Trajektorie nutzen können, um die (rationale) Steigung der Trajektorie zu ermitteln?⁴

Das Thema meiner Forschung ist es, alle möglichen Schnittsequenzen für das Doppelfünfeck und für verwandte Flächen zu beschreiben: Welche Folgen von A s, B s, C s, D s und E s beschreiben tatsächliche Trajektorien auf dem Doppelfünfeck? Die oben beschriebenen Verdrehungen der Fläche können dabei behilflich sein, denn wenn wir schon eine Trajektorie auf der Fläche kennen, so können wir durch Verdrehen eine neue gewinnen [2]. John Smillie und Corinna Ulcigrai ist es gelungen, alle möglichen Schnittsequenzen auf dem regelmäßigen Achteck zu beschreiben, und sogar eine Analogie zur Kettenbruchzerlegung für die Richtung der Trajektorie zu finden. Leider ist die Antwort viel schwieriger zu beschreiben als die Resultate für den quadratischen Torus, aber das ist auch nicht überraschend: Die einfachsten Beispiele sind meistens die elegantesten.

Das Studium ebener Flächen⁵ ist ein reichhaltiges Feld gegenwärtiger Forschung. Maryam Mirzakhani erhielt kürzlich die Fields-Medaille, die höchste Auszeichnung in der Mathematik, für ihre Forschung über Billard und ebene Flächen. Mirzakhani studiert jedoch nicht nur die Dynamik eines Balls auf einem einzigen Tisch oder einer einzigen Fläche, sondern sogar auf einer ganzen Gruppe von Flächen. Letztlich läuft das auf das Studium des Raumes *aller möglichen* Flächen hinaus. Das Studium solcher Räume, von Billard, ebenen Flächen und anderen verwandten Fragen, bezeichnet man als *Dynamik*. Das ist ein recht neues Feld in der Mathematik, in dem intensiv geforscht wird.

Dieser Schnapschuss wurde von Sophia Jahns editiert und steht unter der Lizenz CC-BY-NC-SA 3.0. Die Abbildungen 3 und 4 wurden von Curtis McMullen zur Verfügung gestellt.

Dieser Artikel wurde durch das Mathematics Translations in Europe (MaTiE) Projekt von Mathematics in Europe in Kollaboration mit IMAGINARY übersetzt. Das Projekt hat Unterstützung von der Münchner Rück. Sie können alle übersetzten Artikel auf www.mathematics-in-europe.eu finden.

LITERATUR

1. Irene Bouw and Martin Möller, *Teichmüller curves, triangle groups, and lyapunov exponents*, Annals of Mathematics **172** (2010), no. 1, 139–185.
2. Diana Davis, *Cutting sequences, regular polygons, and the veech group*, Geometriae Dedicata **162** (2013), no. 1, 231–261.
3. Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.
4. John Smillie and Corinna Ulcigrai, *Beyond sturmian sequences: coding linear trajectories in the regular octagon*, Proceedings of the London Mathematical Society **102** (2011), no. 2, 291–340.
5. William Veech, *Teichmüller curves in moduli space, eisenstein series and an application to triangular billiards*, Inventiones mathematicae **97** (1989), no. 3, 553–583.
6. Clayton Ward, *Calculation of fuchsian groups associated to billiards in a rational triangle*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **18** (1998), no. 4, 1019–1042.

³Lösung: Zum Beispiel irgendeine Sequenz, die sowohl AA als auch BB enthält.

⁴Lösung: Steigung = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Anzahl der } A\text{s}}{\text{Anzahl der } B\text{s}}$.

⁵Flächen wie die, die wir hier betrachtet haben, bezeichnet man oft als eben, da sie dadurch entstehen, dass man Kanten von Polygonen, die Teil der Ebene sind, so zusammenklebt, dass eine Trajektorie immer parallel zu sich selbst ist.

Über die Autorin:

Diana Davis arbeitet an Problemen in den Bereichen Geometrie, Billard und Dynamik. Sie hat ihren PhD in Mathematik an der Brown University erhalten und arbeitet derzeit als PostDoc an der Northwestern University.

Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach

Carla Cederbaum

Am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO) treffen sich jede Woche angesehene Mathematikerinnen und Mathematiker, um sich über aktuelle Forschungsthemen auszutauschen und neue mathematische Ideen zu entwickeln. Um die Themen, die am MFO diskutiert werden, einer breiteren Zielgruppe – Mathematiklehrer/innen, interessierten Oberstufenschüler/innen, Wissenschaftsjournalist/innen und allgemein an Mathematik Interessierten – zugänglich zu machen, hat das MFO Ende 2013 unter dem Direktor Gerhard Huisken das Projekt *Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach* ins Leben gerufen.

Im Rahmen dieses Projektes verfassen ausgewählte Teilnehmer/innen des wissenschaftlichen Programms des MFO kurze englische oder deutsche Texte von ca. 8-12 DIN A5-Seiten, in denen sie geeignete Themen des jeweils behandelten Forschungsgebiets möglichst verständlich und ohne viel Vorwissen vorauszusetzen erklären. Diese Texte, genannt *Schnappschüsse*, werden dann von einem Team junger Editorinnen und Editoren überarbeitet; die Editor/innen studieren oder promovieren in Mathematik und sind besonders geübt darin, komplexe Sachverhalte einfach darzustellen und Brücken zum Vorwissen von Mathematiklehrer/innen und Oberstufenschüler/innen zu schlagen.

Nach wissenschaftlicher Begutachtung durch die Organisator/innen des jeweiligen wissenschaftlichen Programms werden die Schnappschüsse unter einer Creative Commons Lizenz auf <http://www.mfo.de/snapshots> frei zur Verfügung gestellt und können dort über einen RSS-Feed abonniert werden. Gleichzeitig werden sie auch über die Mathematikkommunikationsplattform <http://www.imaginary.org> verbreitet. Die aktive ehrenamtliche IMAGINARY-Community hat bereits begonnen, einzelne Schnappschüsse in andere Sprachen wie etwa Deutsch, Französisch und Spanisch zu übersetzen und wiederum frei zur Verfügung zu stellen.

Um die verschiedenen mathematischen Teilgebiete, ihre Querverbindungen und Bezüge zu anderen Wissenschaften sichtbar zu machen, werden die Schnappschüsse einem oder mehreren *Mathematischen Gebieten* zugeordnet sowie gegebenenfalls *Verbindungen zu anderen Gebieten* wie etwa Physik oder Biologie aufgeführt.

Das Schnappschuss-Projekt wurde 2014 auf dem International Congress of Mathematicians in Seoul im Panel *Mathematics communication for the future* sowie auf dem Forum Wissenschaftskommunikation vorgestellt.

Zielsetzung. Ziel des Schnappschuss-Projektes ist es, Aspekte moderner Mathematik einer breiten Zielgruppe zugänglich und möglichst verständlich zu machen. Wir wollen an vielen verschiedenen Beispielen zeigen, dass Mathematik und mathematische Forschung spannend, elegant und vielfältig ist. Die zahlreichen Anwendungen von Mathematik in anderen wissenschaftlichen Disziplinen sollen dabei ebenso vorgestellt und erklärt werden wie die Gebiete der Reinen Mathematik. Die Vielfalt an Autor/innen und deren Perspektiven auf die Mathematik erlaubt es den Leser/innen, einen Eindruck zu gewinnen, was Mathematiker/innen antreibt und begeistert, wie sie über Mathematik nachdenken und welche mathematische Ideen sie besonders faszinieren. Vor allem aber wollen wir die Leser/innen neugierig machen auf moderne Mathematik und mathematische Forschung und so vielleicht auch den einen oder die andere für ein Mathematikstudium gewinnen.

Wir möchten durch das Schnappschuss-Projekt die mathematische Community darin unterstützen, geeignete Forschungsergebnisse und -Methoden auch für ‘Laien’ aufzubereiten: „Beim Schreiben eines Schnappschusses wird man dazu gezwungen, aus dem mathematischen Autismus herauszutreten und sich noch einmal ganz neu mit den Inhalten zu befassen.“ – so beschrieb ein Schnappschuss-Autor seine Erfahrung beim Eingrenzen des zu behandelnden Materials und dessen stringenter und zugänglicher Darstellung.

Die „Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach“ begannen als Teil des Projekts „Oberwolfach trifft IMAGINARY“, welches von der Klaus Tschira Stiftung gefördert wird. Sie werden auch von der Oberwolfach Stiftung sowie vom MFO unterstützt.

In dieser Ausgabe finden Sie den Schnappschuss von Diana Davis zum Thema *Billiards und ebene Flächen*, der von Sophia Jahns editiert wurde. In der nächsten Ausgabe des Bulletins erscheint der

Schnappschuss von Peter Benner, Hermann Mena und René Schneider über *Drogen, Herbizide und numerische Simulation*, editiert von Lea Renner. Sie wurden beide von Feliks Nüske ins Deutsche übersetzt, die Übersetzungen wurden von der Redaktion der *Mitteilungen der DMV* überarbeitet.

Kontakt:

Carla Cederbaum, Chefredaktorin und Projektkoordinatorin,
Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach
Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Schwarzwaldstraße 9-11, 77709 Oberwolfach
senior-editor@mfo.de

Über die Autorin:

Carla Cederbaum forscht an geometrischen Strukturen in der Mathematischen Relativitätstheorie. Nach ihrer Promotion an der FU Berlin war sie Postdoc an der Duke University und ist jetzt Juniorprofessorin für Differentialgeometrie und Mathematische Relativitätstheorie in Tübingen.

Der kleinste mechanische Parallelrechner der Welt Der erste mechanische Parallelrechner im Taschenformat

Fund von Originalzeichnungen und Patentunterlagen aus den 1950er Jahren in Pfäffikon ZH

Bei der Untersuchung des Nachlasses von Curt Herzstark kamen am *14. November 2015* im Schreibmaschinenmuseum Beck in Pfäffikon ZH aussergewöhnliche Originalzeichnungen und Patentdokumente zu einer bisher unbekanntem Mehrfachrechenmaschine, dem kleinsten mechanischen Parallelrechner der Welt, zum Vorschein.

Herbert Bruderer

Der hochbegabte österreichische Ingenieur Curt Herzstark fertigte im Konzentrationslager Buchenwald die Konstruktionszeichnungen für die weltberühmte *Curta* an, die kleinste mechanische Vierspeziesrechenmaschine. Die bildhübsche „Pfeffermühle“, die bis heute voll funktionsfähig ist und Fachwelt wie Laien begeistert, wurde von 1947 bis 1971 in Mauren FL in grossen Stückzahlen hergestellt. Bisher waren zwei Modelle dieser Staffelwalzenmaschine bekannt, die Einzelgeräte *Curta 1* und *Curta 2*.

Nach den nun aufgetauchten Patentunterlagen können beliebig viele Rundbaummaschinen miteinander gekuppelt werden. Herzstark beschreibt folgende Ausgestaltungen:

- zwei nebeneinander stehende Curtas,
- zwei übereinander gestapelte Curtas,
- vier nebeneinander stehende Curtas,
- fünf kreisförmig angeordnete Curtas.

Merkmale der Mehrfachrechenmaschine

Der Parallelrechner zeichnet sich durch folgende Merkmale aus:

- Alle Maschinen werden gemeinsam durch eine einzige Handkurbel angetrieben.
- Alle Geräte lassen sich (durch axiales Verschieben der Antriebswellen) gemeinsam oder einzeln auf eine andere Grundrechenart umstellen. Das ist selbst dann möglich, wenn die einzelnen Maschinen auf unterschiedliche Rechenarten eingestellt sind.
- Alle Zählwerke können gleichzeitig oder einzeln stellenrichtig (dekadenweise) in beiden Drehrichtungen weiterschaltet werden.
- Alle Ergebniswerke und/oder alle Umdrehungszähler werden gemeinsam oder einzeln gelöscht (auf null gestellt).

Curt Herzstark ergänzt: „Es sei noch erwähnt, daß die Mehrfachrechenmaschine auch mit einem elektrischen Antrieb versehen sein kann“ (vgl. dazu die Patentschrift Nr. 195 147, Seite 5). Der Vorarlberger Ingenieur Elmar Maier schildert in seinem Zeitzeugenbericht (<http://dx.doi.org/10.3929/ethz-a-010345785>) seine Arbeiten zur Elektrifizierung der *Curta*.

Doppel-, Vierfach- und Fünffach-Curta

Die höchst überraschenden Funde zeigen, dass der Wiener Erfinder nicht nur Einzelgeräte, sondern auch Mehrfach-Curtas entworfen hat.

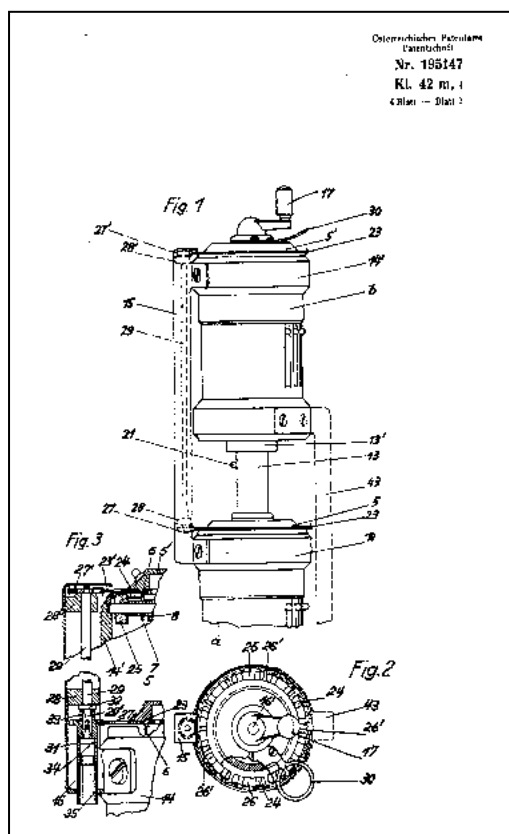


Abb. 1: **Doppelcurta 1**. Wie aus der Zeichnung hervorgeht, ordnete Herzstark beide Maschinen über eine starre Verbindung stabförmig übereinander an. Laut Patentanmeldung können mehr als zwei Geräte gestapelt werden (© Österreichisches Patentamt, Wien, Stammpatent 1954/57).

Um die Handhabung zu vereinfachen, entwarf der österreichische Ingenieur eine weitere Ausführungsform der Doppelcurta mit einer Bodenplatte (Zusatzpatent).

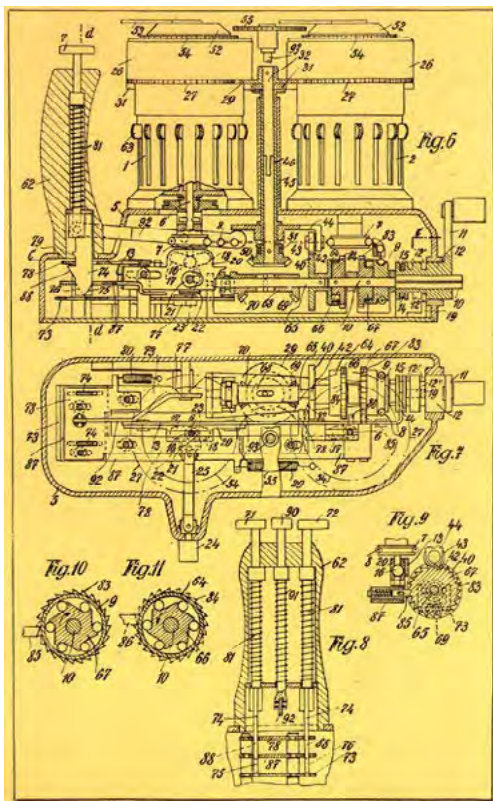


Abb. 2: **Doppelcurta 2**. Die Originalzeichnung zeigt zwei nebeneinander angeordnete mechanische Taschenrechenmaschinen. Die Antriebskurbel bewegt über Kegel- und Stirnräder die Hauptantriebswellen der beiden Geräte. Möglich ist auch ein Kettenantrieb (© Schreibmaschinenmuseum Beck, Pfäffikon ZH/Bruderer Informatik, Rorschach 2015).

In der Patentanmeldung ist die folgende Variante mit vier Rundbaumaschinen nicht aufgeführt:

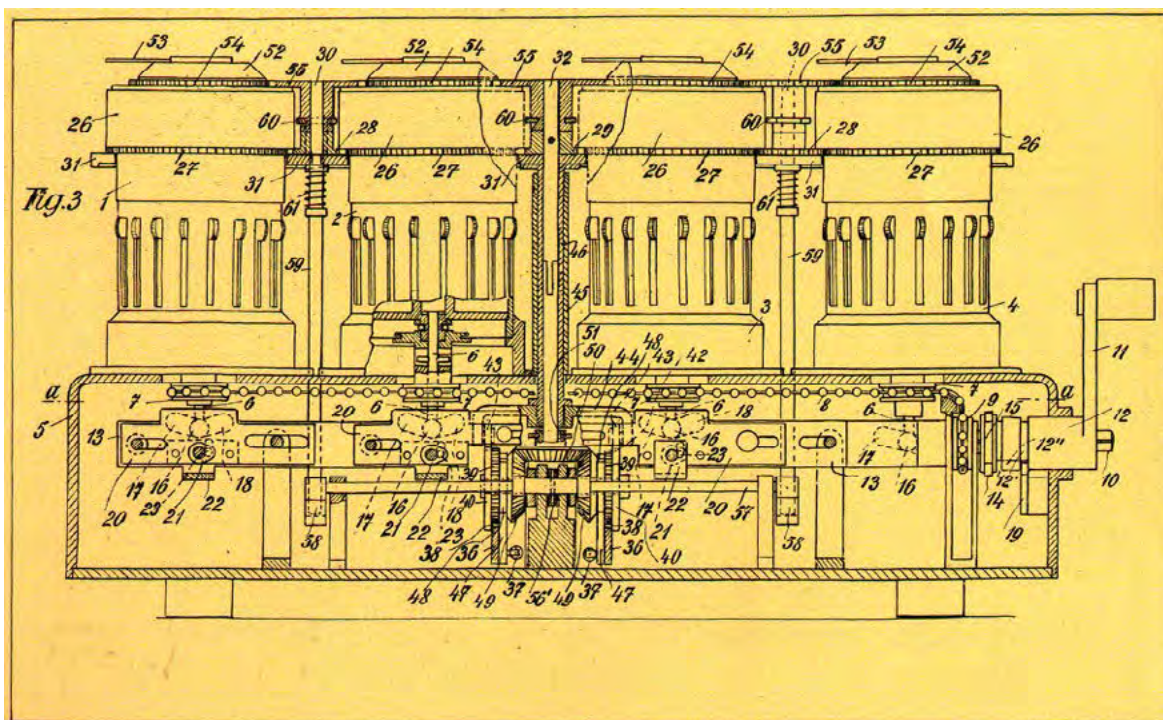


Abb. 3: **Vierfachcurta**. Auf dieser Originalzeichnung sind vier Curtas dargestellt, die abnehmbar auf einem Sockel befestigt sind. Dieser ist mit Kupplungs-, Antriebs- und Steuerorganen ausgestattet. Die gemeinsame Antriebskurbel ist durch einen Kettenantrieb mit den Staffelwalzenwellen verbunden (© Schreibmaschinenmuseum Beck, Pfäffikon ZH/Bruderer Informatik, Rorschach 2015).

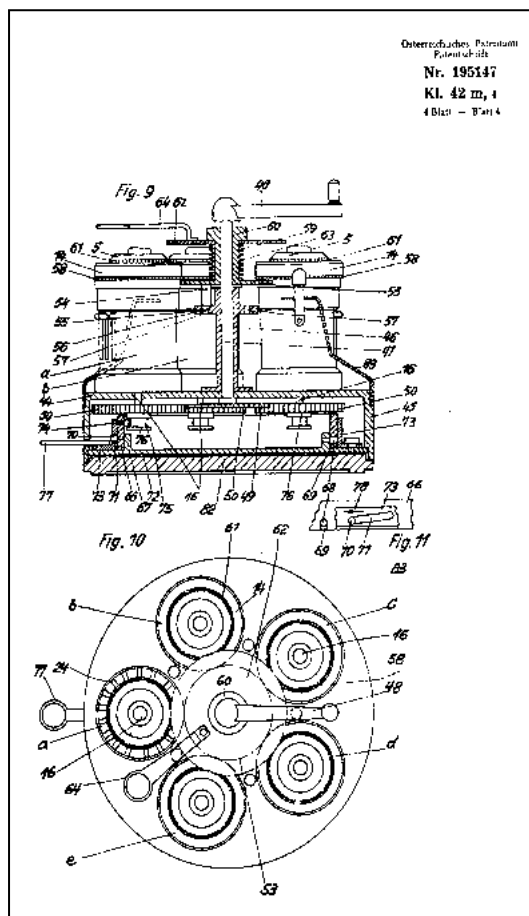


Abb. 4: **Fünffachcurta**. Die fünf Rechenmaschinen stehen auf einem Sockel. Dieser ist drehbar auf einer kreisrunden Grundplatte angebracht. Dadurch lassen sich die Einstellwerke der fünf Geräte bequem bedienen. Die Hauptantriebswelle (Mitte) mit der Kurbel ist über Stirnräder mit den fünf Staffelwalzenwellen gekuppelt (© Österreichisches Patentamt, Wien, Stammpatent 1954/57).

Beschleunigung des Rechenvorgangs

Die hoch präzise Curta beherrscht alle vier Grundrechenarten. Dank der Kupplung mehrerer Geräte lässt sich der Rechenvorgang erheblich beschleunigen. Bei einer Vierfach-Curta gibt man beispielsweise die Werte (Multiplizanden) 137, 263, 389 und 491 ein und vervielfacht sie mit der Zahl 7 (Multiplikator). Die vier Multiplikationen lassen sich gleichzeitig (in diesem Fall mit 7 Kurbeldrehungen) durchführen. Die Zahlen 623, 511, 301 und 259 (Dividenden) kann man zeitgleich durch 7 (Divisor) teilen.

Mögliche Anwendungen waren etwa die gleichzeitige Umrechnung einer Preisliste in mehreren Währungen, die zeitgleiche Berechnung von Warenstückpreisen, die gleichzeitige Bestimmung der Koordinaten x und y im Vermessungswesen.

Patentschriften

Zur Mehrfachrechenmaschine von Curt Herzstark sind folgende österreichische Patente bekannt:

- Patentschrift Nr. 195 147 vom 25. Januar 1958 (Stammpatent):
Anmeldung: 19. Oktober 1954,
Erteilung: 15. Mai 1957,
- Patentschrift Nr. 205 775 vom 10. Oktober 1959 (Zusatzpatent):
Anmeldung 15. Dezember 1954,
Erteilung: 15. März 1959.

Eine erste österreichische Patentanmeldung für die Mehrfachrechenmaschine erfolgte bereits am 20. Dezember 1949. Es gab auch Bemühungen um ein amerikanisches Patent. Frühere österreichische Patente zur herkömmlichen Curta tragen die Nummern 747 073/192, 747 074/191, 166 581, 163 380.

Der kleinste mechanische Parallelrechner der Welt

Nach den bisherigen Erkenntnissen handelt es sich bei der Mehrfachcurta um den *kleinsten* mechanischen Parallelrechner der Welt, den weltweit *ersten* mechanischen Parallelrechner im Taschenformat.

Die ausführlichen Beschreibungen in der Patentdokumentation lassen vermuten, dass Curt Herzstark mehrere Versuchsmuster gebaut hat. Um mehr darüber zu erfahren, wurden Gespräche mit sechs hochbetagten Zeitzeuginnen und Zeitzeugen aus Liechtenstein, Österreich, Deutschland und der Schweiz geführt. Sie mögen sich nicht an Prototypen erinnern. Die Mehrfachrechenmaschine wurde nicht grösseren Stückzahlen angefertigt. Der Erfinder Herzstark, der von Nazis um sein Lebenswerk geprellt wurde, hatte zu diesem Zeitpunkt die Herstellerfirma Contina bereits verlassen.

Buchhinweis



Abb. 5: **Meilensteine der Rechentechnik**. Ausführliche Angaben zu Curt Herzstark und zur Rechenmühle Curta sind in dem Ende Oktober 2015 erschienenen Werk „*Meilensteine der Rechentechnik. Zur Geschichte der Mathematik und der Informatik*“, de Gruyter, Berlin/Boston 2015, 850 Seiten, zu finden.

Quellen: Originalzeichnungen sowie Patendokumentation von Curt Herzstark (Schreibmaschinenmuseum Beck, Pfäffikon ZH, und europäische Patentdatenbank).

© Bruderer Informatik, CH-9401 Rorschach 2015

Bruderer Informatik
Seehaldenstrasse 26
Postfach 47
9401 Rorschach
Telefon 071 855 77 11
herbert.bruderer@bluewin.ch



Weiterbildungskurs

"Potenzreihen, der Schlüssel zur Analysis"

Ausgehend von der geometrischen Reihe wird das Rechnen mit Potenzreihen geübt und Schritt für Schritt alle wichtigen Potenzreihen eingeführt. Mit diesen Potenzreihen lassen sich dann beliebige Potenzen, Wurzeln, Sinus- und Cosinuswerte, sowie Logarithmen berechnen. Da das Ableiten von Potenzreihen eigentlich nur Kürzen ist, erhält man die Differentialrechnung quasi geschenkt. Zum Schluss werden Fourier-Reihen untersucht und überraschende Anwendungen gezeigt.



Die Potenzreihen haben in unserem Mathematikunterricht meist einen kleinen Stellenwert. Diese Weiterbildung zeigt auf, wie vielfältig die Potenzreihen sein können und wie man sie gewinnbringend im Unterricht einsetzen könnte. Die Theorie der Potenzreihen eignet sich sowohl zur Repetition der Analysis vor der Matura, aber auch im täglichen Unterricht - und zwar nicht nur im Schwerpunktfach, sondern auch im Grundlagenfach. Zur Theorie wird ein Manuskript ausgeteilt und es werden diverse, im Unterricht erprobte Übungsblätter zur Verfügung gestellt.

Zielpublikum: Für Lehrkräfte der Sekundarstufe II Mathematik

Referent: PD Dr. Lorenz Halbeisen, Dozent für Logik und Mengenlehre an der ETH Zürich

Organisation: Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH),
Dr. Meike Akveld (ETH), Daniela Grawehr (DMK)

Datum und Zeit: Mittwoch, der 09. März, 9:30 Uhr – 16:00 Uhr

Kursort: ETH Zürich, Hauptgebäude Raum G19.1

Kurskosten: CHF 100

Anmeldung: <http://math.ch/DMK2016>

Anmeldeschluss: 02. 03. 2016

Algebra 7/8

NEU

Der erste Band der erweiterten Neubearbeitung



+



DMK

Algebra 7/8

**Aufgaben
inklusive E-Book**

1. Auflage 2016
304 Seiten, 17×23 cm, gebunden
ISBN 978-3-280-04071-3
Einführungspreis CHF 36.–
Erhältlich ab März 2016

Algebra 7/8 ist gegenüber der bisherigen Algebra erweitert, so dass sie direkt im Anschluss an die Primarschule eingesetzt werden kann. Gute, vielfältige Aufgaben stehen im Zentrum und werden ergänzt durch kurz gefasste Theorie, die Lehrpersonen in ihrer Methodenwahl nicht einschränkt. Jedes Kapitel wird mit Kontrollaufgaben abgeschlossen.

Die Neubearbeitung ist nach Schuljahren gegliedert. Die insgesamt drei Bände decken die gesamte Algebra ab, wie sie für das Grundlagenfach Mathematik an Gymnasien vorgesehen ist.



DMK

Algebra 7/8

Ergebnisse

1. Auflage 2016
ca. 160 Seiten, 17×23 cm, broschiert
ISBN 978-3-280-04073-7
Erhältlich ab April 2016



Unsere E-Books:

- sind in der kostenlosen App vom Orell Füssli Verlag (im Apple App Store bzw. Google Play Store) oder unter <https://reader.ofv.ch> erhältlich.
- können offline auf iOS-Tablets (iPad) und Android-Tablets oder online in allen gängigen Browsern verwendet werden.
- sind mit verschiedenen interaktiven Funktionen angereichert.
- beinhalten verlinkte Inhaltsverzeichnisse, Seitenverweise und Internetadressen.

orell füssli Verlag
www.ofv.ch/lernmedien

Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 1

Urs Kirchgraber, kirchgra@math.ethz.ch

1

Stellen Sie sich zur Einstimmung in den dritten Teil dieser kleinen Reihe¹ über Schwingungsphänomene einen *Massenpunkt* vor, der sich entlang einer Geraden g bewegt, wobei drei Kräfte auf ihn wirken, siehe Abbildung 1:

- a) eine *Federkraft*, die ihn stets in Richtung eines Punktes O auf g zieht und nur von der Distanz von O abhängt
- b) eine *Anregungskraft*, deren Wirkung nur vom Zeitpunkt t abhängt, zu dem sie am Massenpunkt angreift
- c) eine *Reibungs- oder Dämpfungskraft*, die die Bewegung hemmt und lediglich von der Geschwindigkeit abhängt, mit der sich der Massenpunkt auf g bewegt.

Denken Sie sich die Gerade g mit einem Koordinatensystem versehen mit O als Nullpunkt. Es bezeichne $x(t)$ die Koordinate des Orts, an dem sich der Massenpunkt zum Zeitpunkt t befindet², $\dot{x}(t)$ seine Geschwindigkeit und $\ddot{x}(t)$ seine Beschleunigung zu diesem Zeitpunkt. Dann gilt nach *Newtons Grundgesetz der Bewegung*

$$m \ddot{x} = -F(x) + A(t) - R(\dot{x}) \tag{1}$$

Zur Vereinfachung der Notation wird x statt $x(t)$, \dot{x} statt $\dot{x}(t)$ und \ddot{x} statt $\ddot{x}(t)$ geschrieben. m bezeichnet die Masse des Massenpunkts, F die immer gegen den Nullpunkt O gerichtete Federkraft³, A die Anregung und R die Reibung.

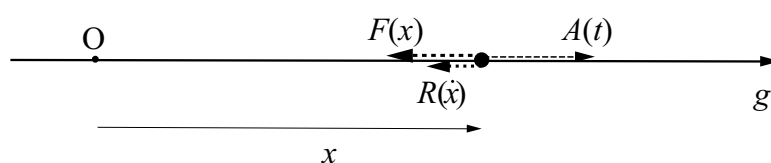


Abbildung 1: Zur Differentialgleichung (1), (2).

Dividiert man die Gleichung (1) durch m und stellt sie etwas um, lautet sie unter Verwendung der Bezeichnungen $f = F/m$, $r = R/m$, $a = A/m$

$$\ddot{x} + r(\dot{x}) + f(x) = a(t) \tag{2}$$

Obwohl es sich bei (2) lediglich um eine einzige Differentialgleichung 2. Ordnung (für die Unbekannte $x = x(t)$) handelt muss man feststellen, dass die Mathematik zur Zeit meilenweit davon entfernt ist, die durch (2) gestellte Aufgabe auch nur halbwegs vollständig zu lösen. Genau genommen ist nicht einmal recht klar, worin die “Lösung der Aufgabe” überhaupt bestehen könnte ...

¹Teil I mit dem Titel “Schwingungen I oder Wenn der Vater mit dem Sohn ...” ist im Heft 128, p. 24-30, Teil II mit dem Titel “Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol” ist im Heft 129, p. 10-19 dieses Bulletins erschienen.

² x wird *Auslenkung* des Massenpunkts genannt.

³Man sagt auch *rücktreibende Kraft*.

2

Es gibt allerdings eine Situation, in der sogar *Lösungsformeln* zu Verfügung stehen: Wenn die Funktionen f und r linear sind, wenn also an eine *lineare Feder*⁴ und an *lineare Dämpfung* gedacht wird. Hinsichtlich der *Anregung* a ist der Fall einer *periodisch einwirkenden Kraft* von besonderem Interesse. Hier bietet sich als einfachster Fall eine *harmonisch wirkende Kraft* an. Die Differenzialgleichung (2) lautet dann

$$\ddot{x} + 2d\dot{x} + \omega^2 x = K \cos(\Omega t) \quad (3)$$

mit positiven Zahlen d , ω , K , Ω . Durch geeignete Skalierung von Zeit und Auslenkung gelingt es zu erreichen, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\omega = 1$ und $K = 1$ setzen kann:

$$\ddot{x} + 2d\dot{x} + x = \cos(\Omega t) \quad (4)$$

wobei d und Ω weiterhin positive Zahlen bezeichnen.

Die Leserinnen und Leser kennen Gleichung (4) wahrscheinlich aus der Analysis- oder einer einführenden Physik-Vorlesung. Im Rest dieses, und im folgenden Abschnitt wird an die wichtigsten Ergebnisse zu dieser Gleichung erinnert. Gleichung (4) stellt ein *lineares* und *inhomogenes* Problem dar. Die *allgemeine Lösung* einer solcher Aufgabe besteht bekanntlich aus der Summe der *allgemeinen Lösung* der zugehörigen *homogenen Gleichung*

$$\ddot{x} + 2d\dot{x} + x = 0 \quad (5)$$

und einer *partikulären*, also einer einzigen *Lösung* des *inhomogenen Problems* (4). Die allgemeine Lösung $x_h(t)$ von (5) lautet, siehe Teil II dieser Artikelserie – und dort die Gleichungen (3), (4):

$$x_h(t) = e^{-dt} [c_1 \cos(\sigma t) + c_2 \sin(\sigma t)], \quad \sigma := \sqrt{1 - d^2} \quad (6)$$

falls $d \in [0, 1)$ gilt. c_1 , c_2 bezeichnen beliebige Konstanten. Im Fall $d > 1$ verschwinden die oszillatorischen Terme und die allgemeine Lösung von (5) lautet

$$x_h(t) = e^{\lambda_1 t} c_1 + e^{\lambda_2 t} c_2 \quad (7)$$

mit $\lambda_{1,2} = -d \pm \sqrt{d^2 - 1} < 0$. Weil $d > 0$ gilt, streben alle Lösungen $x_h(t)$ des homogenen Problems (5) für $t \rightarrow \infty$ gegen 0, spielen also hinsichtlich des *Langzeitverhaltens der Lösungen* von (4) keine Rolle: Sie sind *transient*, werden *ausgedämpft*, wie man sagt.

Eine *partikuläre Lösung* der *inhomogenen Gleichung* (4) erhält man mit Hilfe des “Ansatzes”

$$\begin{aligned} x(t) &= V \cos(\Omega t - \phi) \\ &= V \cos(\Omega t) \cos \phi + V \sin(\Omega t) \sin \phi \end{aligned} \quad (8)$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten V und ϕ . In (4) einsetzen und Koeffizientenvergleich bezüglich $\cos(\Omega t)$ und $\sin(\Omega t)$ durchführen liefert das Gleichungssystem

$$\begin{cases} V(1 - \Omega^2) \cos \phi + 2dV\Omega \sin \phi = 1 \\ V(1 - \Omega^2) \sin \phi - 2dV\Omega \cos \phi = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Quadrieren und addieren der beiden Gleichungen ergibt:

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2}} =: V(\Omega, d) \quad (10)$$

⁴Man sagt auch *Hooke'sche Feder*. Nach Robert Hooke (1635-1703). Mehr über seine Beziehung zu Newton, dessen “Kurator” Hooke in der Royal Society war, siehe [1].

Nach Division der beiden Gleichungen in (9) durch V und Auflösen nach $\cos \phi$, $\sin \phi$ findet man:

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{1 - \Omega^2}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2}} \\ \sin \phi &= \frac{2d\Omega}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2}} \end{aligned} \quad (11)$$

und daraus

$$\tan \phi = \frac{2d\Omega}{1 - \Omega^2} \quad (12)$$

3

Was ist die *Quintessenz* aus den Formeln des letzten Abschnitts? Durch die Gleichung (5) wird, in der Terminologie der Mechanik, ein *Schwinger*, also ein *schwingungsfähiges System* definiert, das – wenn es sich selbst überlassen ist – im Laufe der Zeit immer mehr zur Ruhe kommt. Mit dem Term $\cos(\Omega t)$ auf der rechten Seite von (4) wird jedoch von aussen in das Systems eingegriffen und ihm ein *periodischer Takt aufoktroiert*.

Die Mathematik verrät, wie der Schwinger auf diese “Zumutung” reagiert: Er ordnet sich dem Taktgeber unter, er fügt sich ihm, er lässt sich *versklaven*⁵. In der Technik spricht man von einer *erzwungenen* Schwingung: Bis auf einen Anteil der homogenen Gleichung (5), der sich jedoch im Laufe der Zeit ausdämpft, lautet die “Antwort des Systems”⁶ auf das *Eingangssignal*⁷ $\cos(\Omega t)$

$$x(t) = V(\Omega, d) \cos(\Omega t - \phi(\Omega, d)) \quad (13)$$

(siehe (8), (10), (11), (12)). Die Systemantwort ist also nicht nur periodisch mit gleicher Periode $T := 2\pi/\Omega$ wie das Eingangssignal, sondern sogar ebenfalls harmonisch. Allerdings ist die Systemantwort gegenüber dem Eingangssignal um die Zeit $\phi(\Omega, d)/\Omega$ *verspätet*, *phasenverschoben*, wie man sagt. Abbildung 2 zeigt die “Verspätung” in Abhängigkeit der Frequenz Ω des Eingangssignals.

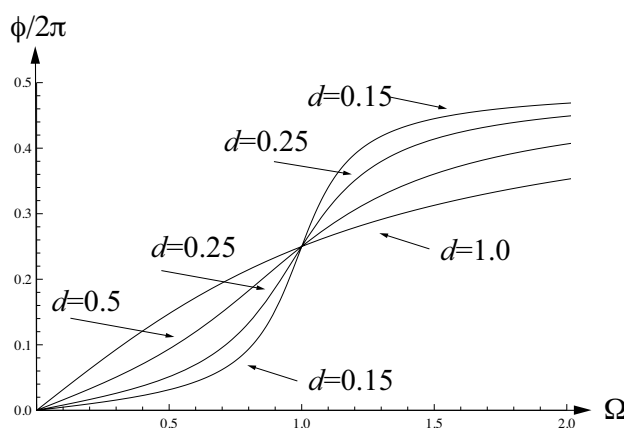


Abbildung 2: Grafische Darstellung von $\phi(\Omega, d)/2\pi$, also der zeitlichen “Verspätung” $\phi(\Omega, d)/\Omega$ der Systemantwort gegenüber der Anregung, gemessen in der Periode $T = 2\pi/\Omega$ der Anregung als Einheit – für verschiedene Werte von d .

Interessant und von praktischer Bedeutung ist die *Amplitude* des Ausgangssignals im Verhältnis zur Amplitude des Eingangssignals, welche in (4) durch Skalierung auf 1 normiert ist. Abbildung 3 zeigt sie

⁵Der Begriff stammt von H. Haken.

⁶Kurz: die *Systemantwort*, auch *Ausgangssignal* oder *Output* genannt.

⁷Auch *Input* genannt.

in Abhängigkeit von der Frequenz Ω des Eingangssignals. Eine leichte Rechnung ergibt, dass $V(\Omega, d)$ das Maximum an der Stelle

$$\Omega_{max} = \sqrt{1 - 2d^2} \quad (14)$$

annimmt und dort den Wert

$$V_{max} = 1/2d\sqrt{1 - d^2} \quad (15)$$

hat.

Der *freie* Oszillator (5) schwingt mit (Kreis-)Frequenz $\sqrt{1 - d^2}$. Gemäss (14) ist die Amplitude der *erzwungenen* Schwingung maximal, wenn die (Kreis-)Frequenz Ω der Anregung bei $\Omega_{max} = \sqrt{1 - 2d^2}$ liegt. Die maximale Amplitude V_{max} der erzwungenen Schwingung ist gemäss (15) umso grösser, je kleiner die Dämpfung d ist. Im ‘‘Grenzfall’’ $d = 0$ gilt gar $V_{max} = \infty$. Dieses Phänomen wird manchmal als (lineare) *Resonanz* bezeichnet.

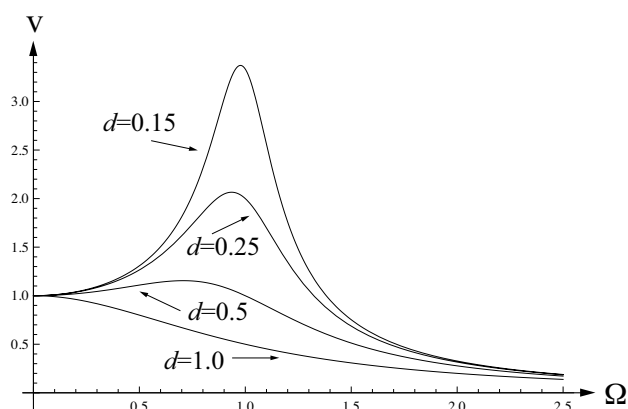


Abbildung 3: Grafische Darstellung der Funktion $V = V(\Omega, d)$ aus (10) für verschiedene Werte von d .

Abbildung 3 zeigt, dass der Schwinger (4) das Eingangssignal⁸ je nach dem Wert der Dämpfungskonstanten d *verstärken* oder *abschwächen* kann. Der Schwinger (4) kann also je nachdem als *Verstärker* oder als *Schwingungsilger* wirken. Ob Verstärkung *erwünscht*, oder *gefürchtet* ist, hängt von der Situation ab: Wenn ein schwaches Signal verstärkt werden soll, ist Verstärkung offensichtlich gewollt. Wenn hingegen zum Beispiel ein Fundament durch einen darauf montierten Motor beim Anfahren zum Schwingen angeregt wird, wird man alles daran setzen möglichen Schaden, den eine Verstärkung hervorrufen kann, zu vermeiden. Etwa indem man Ω beim Hochfahren des Motors rasch durch den kritischen Bereich um Ω_{max} ‘‘hindurchfährt’’, sodass sich die Schwingung mit der grossen Amplitude V_{max} gar nicht ausbilden kann.

Aus rein mathematischer Sicht kann man sagen: *Die Differenzialgleichung (4) hat die periodische Lösung (8). Alle anderen Lösungen der Gleichung streben für $t \rightarrow \infty$ gegen (8).* In der Sprechweise der Dynamischen Systeme nennt man eine solche periodische Lösung einen *globalen Attraktor*.

4

Martin Lieberherr, dessen Artikel [4] diese kleine Serie von Beiträgen über Schwingungen ja angeregt hat, hat in seinem Beitrag die sogenannte *Duffing-Gleichung* erwähnt und bereits einige ihrer Aspekte angesprochen. Die Duffing-Gleichung ist eine ‘‘*nichtlineare*’’ Variante von (3), (4).

⁸Es ist $\cos \Omega t$, hat also Amplitude 1.

Wie in [4] vermerkt, war Georg Duffing (1861-1944) ein deutscher Ingenieur. 1918 hat er beim Verlag Vieweg ein schmales Bändchen im Umfang von 134 Seiten veröffentlicht, [2], das seine theoretischen und experimentellen Untersuchungen zum Thema “Schwingungen” beinhaltet. Motiviert worden war Duffing durch die Praxis. Zu Beginn des Vorworts schreibt er, dass er an (laufenden) Maschinen beobachtet habe, wie sich “*periodische Bewegungszustände*” eingestellt hätten. Und er hat sich offenbar vorgenommen, sie zu untersuchen.

Wie schon der Titel seines Buches verrät, siehe [2], geht es Duffing darum, *erzwungene Schwingungen* in einem schwingenden System verstehen zu lernen, dessen *Eigenfrequenz* “*veränderlich*” ist, wie er sagt. Gemeint ist, dass die Eigenfrequenz des zu Grunde liegenden freien Schwingers von der Amplitude abhängt. Illustriert wird dieses Phänomen zum Beispiel durch den Vergleich der Gleichung des *harmonischen Oszillators*

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \tag{16}$$

mit der Gleichung eines (mathematischen) Pendels⁹

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0 \tag{17}$$

Während *alle* Lösungen von (16) periodisch mit der *gleichen* Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ sind, ist bei den periodischen Lösungen¹⁰ von (17) die *Periode* T eine *Funktion der Amplitude* der Schwingung, siehe z.B. [5], Abschnitt 2.132:

$$T = T(\varphi_0) = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} K(\sin(\varphi_0/2)) \tag{18}$$

Dabei bezeichnet $\varphi_0 \in [0, \pi)$ den maximalen Auslenkungswinkel des Pendels bei der betrachteten Bewegung und $K(k)$ ist das *vollständige elliptische Integral erster Art*:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} \tag{19}$$

Da die Funktion $K : k \in [0, 1) \rightarrow K(k)$ monoton wächst¹¹, folgt in der Tat, dass beim Schwinger (17) die Schwingungszeit (und damit seine Eigenfrequenz) von der Amplitude der Schwingung abhängt.

Das Phänomen ist offenbar der Tatsache geschuldet, dass die Differenzialgleichung (17) *nichtlinear* ist, im Gegensatz zu (16). Es “geht verloren”, wenn man die Gleichung (17) durch die Gleichung (16) approximiert, was ja häufig unter Hinweis auf *kleine Amplituden* geschieht. Um der Nichtlinearität der Pendelgleichung Rechnung zu tragen, ohne gleich (17) zu verwenden, kann man $\sin \varphi$ für nicht zu grosse Werte von $|\varphi|$ statt durch φ , durch

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3$$

approximieren und erhält dann die nichtlineare (jedoch polynomiale) Gleichung

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \left(\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3\right) = 0 \text{ mit } \omega^2 = g/l \tag{20}$$

⁹ g bezeichnet, wie üblich, die Erdbeschleunigung, ℓ die Länge der (masselos gedachten) Pendelstange. φ ist der Auslenkwinkel der Pendelstange, gemessen von der Vertikalen aus.

¹⁰Gemeint sind die Lösungen, die dem Hin- und Herschwingen des Pendels um die vertikale Lage entsprechen. Nicht gedacht ist an die *Rotationslösungen*, die das Rotieren des Pendels um seinen Aufhängepunkt modellieren.

¹¹Überdies hat sie einen Pol bei $k = 1$ und es gilt $K(0) = \pi/2$.

5

Mit gut 50 Seiten ist das Kapitel II mit dem Titel “Die pseudoharmonische Schwingung” das umfangreichste in Duffings Buch. Und gleich am Anfang werden die beiden Schwingungsdifferentialgleichungen vorgestellt, um die es im Weiteren geht:

$$\ddot{x} + \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 = 0 \quad (21)$$

$$\ddot{x} + \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 = k \cos(\Omega t) \quad (22)$$

Bezüglich der Lösungen von (21) spricht der Autor von *freien*, hinsichtlich der Lösungen von (22) von *erzwungenen* Schwingungen unter dem Einfluss einer harmonisch veränderlichen äusseren Kraft.

Der Term

$$f(x) := \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 \quad (23)$$

stellt die durch die rücktreibende Kraft erzeugte Beschleunigung dar. Man kann sie sich zum Beispiel als von einer *nichtlinearen Feder* hervorgerufen denken, mit f als *Federkennlinie*.

Wenn $\beta \neq 0$ ist, gilt $f(-x) \neq -f(x)$ für $x \neq 0$. Das bedeutet, dass die Federkennlinie in diesem Fall *asymmetrisch* ist. Das ist eher künstlich und daher wird in der Literatur meist der Fall $\beta = 0$ studiert.

Die Gleichung (22) oder die um einen linearen Reibungs-/Dämpfungsterm erweiterte Gleichung¹²

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \alpha x - \gamma x^3 = k \cos(\Omega t) \quad (24)$$

δ eine positive Konstante, wird weitherum als

(Differenzial-)Gleichung von *Duffing*

kurz als *Duffing-Gleichung*, bezeichnet.

6

Man kann sagen, die Differentialgleichung (24) (bzw. (22)) von Duffing sei eine *berühmte* Gleichung¹³: Es gibt kaum ein Buch, das sich mit Schwingungen beschäftigt und der Duffing-Gleichung nicht wenigstens ein Kapitel widmet – die Bücher [3], [5], [6] sind nur eine sehr kleine Auswahl.

Während der Fall der linearen (Hooke’schen) Feder, das heisst wenn $\gamma = 0$ gilt, mit gymnasialer Mathematik zu bewältigen ist, cf. Abschnitt 2, bewirkt deren Ersetzung durch eine nichtlineare Feder einen “Quantensprung”, was den mathematischen Schwierigkeitsgrad anbelangt.

Natürlich wird man zuerst die Frage nach Lösungsformeln für die Gleichung (24) aufwerfen. Tatsächlich lässt sich die Gleichung (24) unter der Voraussetzung *keine Reibung, keine Anregung*, also im Fall $\delta = k = 0$, mit Hilfe von *elliptischen Funktionen* lösen. Wie aber verhält es sich im hauptsächlich interessierenden Fall, also unter der Voraussetzung

$$\delta \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \gamma \neq 0, \quad k > 0, \quad \Omega > 0? \quad (25)$$

¹²Duffing befasst sich mit (24) im Kapitel IV mit dem Titel “Einfluss der Dämpfung”.

¹³So berühmt, dass die Amerikaner von ‘Daffing equation’ reden, und meinen, der Namengeber sei einer der ihren und bass erstaunt sind, wenn man die Herkunft richtig stellt.

Nach allem was ich weiss, kennt man *kein* Verfahren um Lösungsformeln zu finden, und dementsprechend sind (mir) *keine* Lösungsformeln bekannt.

Freilich: Die *Existenz* der Lösungen ist durch den bekannten *Satz* über die *Existenz* und *Eindeutigkeit*¹⁴ von Lösungen von Differenzialgleichungen gesichert. Nur: Wie kann man etwas über das “Verhalten” der Lösungen in Erfahrung bringen, insbesondere über das besonders interessierende *Langzeitverhalten*, das heisst das “Verhalten” nach “genügend langer” Zeit, wenn also allfällige “Einschwingvorgänge” abgeklungen sind?

Wenn man den Parametern (25) konkrete Zahlwerte zuweist kann man für verschiedene Anfangswerte $x(0)$, $\dot{x}(0)$ mit Hilfe eines numerischen Differenzialgleichungslösers (ODE-Solver) die entsprechenden Lösungen über ein gewisses endliches Zeitintervall approximativ bestimmen. Das mag für manche Zwecke genügen, ist aber doch sehr bescheiden in Anbetracht der durch die Duffing-Gleichung gestellten Aufgabe.

Eine andere Möglichkeit ist zu untersuchen, ob die Gleichungen (22), (24) unter Umständen gewisse *spezielle Lösungen* besitzen, die von Interesse sind. Naheliegend ist die Frage nach *periodischen Lösungen*, zum Beispiel der Periode $2\pi/\Omega$. Dafür steht ein “Arsenal” von sogenannten *Fixpunktsätzen* zur Verfügung und dementsprechend gibt es dazu eine umfangreiche Literatur. Allerdings resultieren auch daraus nur sehr punktuelle Aussagen über die Gleichungen (22), (24).

Was wäre denn überhaupt eine *zufriedenstellende Lösung* der durch die Differenzialgleichung (24) gestellten Aufgabe?

Entsprechend der “Philosophie” der Theorie der Dynamischen Systeme würde man die Aufgabe als gelöst betrachten, wenn man über das *Langzeitverhalten aller ihrer Lösungen* für *beliebige Werte* der *Parameter* (25) Bescheid¹⁵ wüsste. Man würde das eine *qualitative* Antwort auf die Fragestellung nennen.

Auch diese Zielsetzung ist nach heutigem Wissensstand *viel* zu ambitiös. Am ehesten ist sie noch zu erreichen, wenn man annimmt, dass die Nichtlinearität *schwach*, die Dämpfung *gering*, die Amplitude der Anregung *klein* ist. Übertragen auf die Parameter γ , δ , k bedeutet das, dass man sich im 3-dimensionalen *Parameter-Raum* in die *Nähe* des *Nullpunkts* $\gamma = \delta = k = 0$ begibt. Denn dann unterscheidet sich Gleichung (24) nur wenig von der Gleichung des harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + \alpha x = 0 \tag{26}$$

Man sagt dann, (24) sei eine *Störung* von (26) und das ermöglicht *Methoden der Störungsrechnung* zu nutzen.

Auch so ist das Problem immer noch zu schwierig. Es ist nicht ausreichend die 3 Parameter klein genug zu wählen, weil ihre *Grössenverhältnisse* untereinander eine wichtige Rolle spielen. Wir werden den Fall verfolgen, in dem die drei Parameter “von gleicher Grössenordnung klein” sind. Um zu präzisieren was gemeint ist, wird ein sogenannter *kleiner Parameter* $\epsilon > 0$ als (gemeinsames) “Mass für Kleinheit” eingeführt und die 3 Parameter werden wie folgt mit ϵ gekoppelt:

$$\gamma = \epsilon\bar{\gamma}, \quad \delta = \epsilon\bar{\delta}, \quad k = \epsilon\bar{k} \tag{27}$$

Denken Sie sich dabei $\bar{\gamma}, \bar{\delta} \geq 0$ und $\bar{k} > 0$ als fest gewählte Zahlen. Den Parameter ϵ , hingegen, wollen wir auf “so kleine (positive) Werte wie nötig” einschränken können.

¹⁴Siehe Teil II dieser Artikelserie, Abschnitt 5.

¹⁵Es wäre zu präzisieren, was mit “Bescheid wissen” gemeint ist.

Bleiben die Parameter α und Ω . Im linearen Fall, siehe die Abschnitte 2 und 3, war $\alpha = \omega^2 = 1$ gesetzt und es zeigte sich, dass das Eingangssignal bei *kleiner* Dämpfung dann besonders stark verstärkt wird, wenn $\Omega \approx \Omega_{max} = \sqrt{1 - 2d^2} \approx \omega = \sqrt{\alpha} = 1$ gilt, siehe (14). Es wird sich herausstellen, dass es auch bei *Vorhandensein* einer *Nichtlinearität* in der Gleichung höchst interessant ist, diese Situation zu untersuchen. Statt $\alpha = 1$ und $\Omega \approx \sqrt{\alpha}$ setzen wir bequemlichkeitshalber

$$\Omega = 1 \text{ und } \alpha = 1 - \epsilon 2\bar{\nu} \quad (28)$$

mit $\bar{\nu}$ (einstweilen!) fest gewählt und

$$\bar{k} = 2 \quad (29)$$

Dann lautet die Duffing-Gleichung (24) nach einer kleinen Umstellung

$$\ddot{x} + x = \epsilon[2\nu x - 2\delta\dot{x} + \gamma x^3 + 2 \cos(t)] \quad (30)$$

Dabei wurden bei den Grössen $\bar{\nu}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\gamma}$ zur Vereinfachung der Notation die Querstriche weggelassen und stattdessen wieder ν , δ und γ geschrieben, was nicht zu Konfusion Anlass gibt, da wir uns im folgenden nur auf Gleichung (30) beziehen werden.

Der nächste und (vermutlich ...) letzte Teil dieser Artikel-Serie wird der *Anwendung* der sogenannten *Störungsrechnung* auf Gleichung (30) gewidmet sein.

Literatur

- [1] V. I. Arnold: *Huggens & Barrow, Newton & Hooke*, 1990.
- [2] G. Duffing: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlichen Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, 1918.
- [3] P. Hagedorn: *Non-linear oscillations*, 1981.
- [4] M. Lieberherr: *Duffing-Oszillator*, VSMP-Bulletin Nr. 119, Juni 2012, p. 30-32.
- [5] K. Magnus: *Schwingungen*, 1961, 1976³.
- [6] J. J. Stoker: *Nonlinear Vibrations*, 1950.

Morley: „Kreisketten“ und komplexe Zahlen (1. Teil)

Peter Thurnheer, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, tpeter@math.ethz.ch

Um das Jahr 1900 bewies F. Morley seinen berühmten Satz, der besagt, dass in irgend einem Dreieck die Schnittpunkte von je zwei, einer Dreiecksseite anliegenden Winkeldrittelnden ein gleichseitiges Dreieck bilden (Fig. 6). Explizit veröffentlichte er diesen Satz allerdings erst Jahre später [4, 5], denn er erhielt ihn ursprünglich als einfaches Korollar aus einem viel allgemeineren Satz über Kardioden. Ueberraschend sind allerdings schon die Resultate, welche er am Anfang seiner Forschung, die ihn schliesslich zu seinem Kardioden- respektive Winkeldrittelnden-Satz führte, fand oder erneut bewies, und um die es in der dreiteiligen, mit diesem Text beginnenden Serie geht. Morleys Ausgangspunkt ist eines der faszinierendsten Kapitel der Elementargeometrie überhaupt: Sätze von Miquel, Steiner (man sehe z.B. den auch sonst sehr interessanten Artikel [5]), Kantor [7] und Clifford [8]. In seinen Arbeiten [1, 2, 3, 4] verallgemeinert er diese sukzessive. Interessant dabei ist vor allem auch seine Methode, welche eine elegante Verbindung zwischen ebener Geometrie und komplexer Analysis herstellt.

Im 1. Teil beschreiben wir die Aussagen, von denen Morley ausgeht, und erste seiner Verallgemeinerungen in drei Sätzen, und geben einen Zusatz, der diese lose verbindet. Ausserdem erwähnen wir eine erstaunliche Ergänzung zur einfachsten Situation, und wir erinnern an die Definition der Limaçon Kurven, die bei Morley eine wichtige Rolle spielen. Schliesslich illustrieren wir die Aussagen, Situationen und Begriffe durch Figuren.

Im 2. Teil stellen wir den erwähnten Zusammenhang her, indem wir die wichtigsten Elemente von Morleys Methode, insbesondere die komplexen Kreiskoordinaten, einführen, um anschliessend seine, daraus fast unmittelbar folgenden, Beweise der ersten zwei Sätze zu geben.

Im 3. Teil behandeln wir den Beweis des dritten Satzes. Dieser ist formal wesentlich aufwändiger aber inhaltlich wirklich raffiniert, sodass es Spass macht, ihn nachzuvollziehen.

Die drei Texte geben eine ausführlichere Darstellung des ersten Teils von Morleys Arbeit [1] mit dem Ziel, den Leserinnen und Lesern die erstaunlichen und faszinierenden Zusammenhänge, die darin zur Sprache kommen, sowie Morleys Methode bekannt zu machen und ihnen — hoffentlich — das Studium seiner elitär kurz gehaltenen Ausführungen zu den Beweisen etwas zu erleichtern.

Sätze

Wir nennen n Geraden einer Ebene in allgemeiner Lage, das heisst, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch einen Punkt gehen, eine (n) -Konfiguration.

Eine (n) -Konfiguration enthält $n = \binom{n}{n-1}$ $(n-1)$ -Konfigurationen, kurz die $(n-1)$ -Konfigurationen der Ausgangskonfiguration.

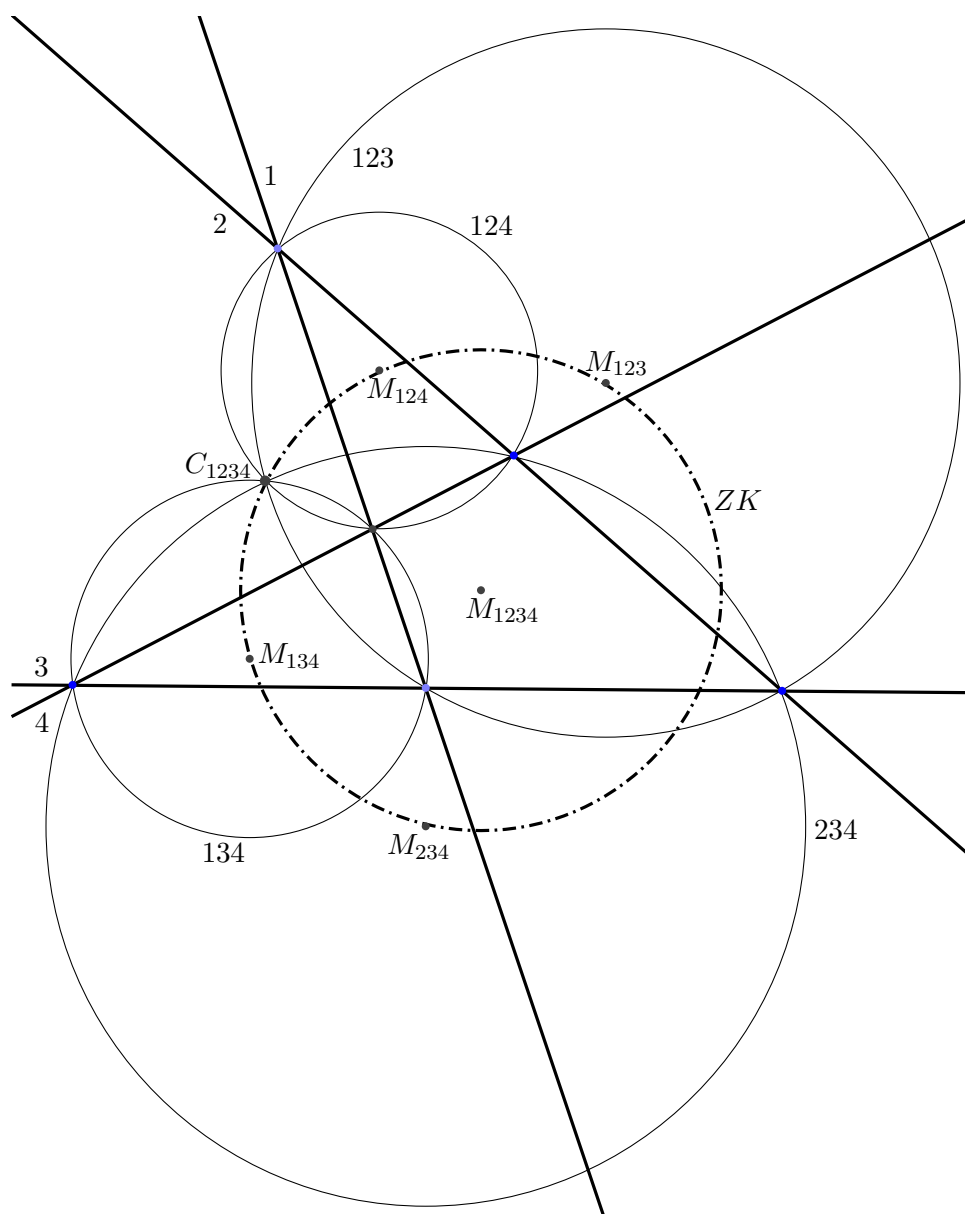
Satz 1. *Die Umkreismittelpunkte der vier Dreiecke einer (4) -Konfiguration liegen auf einem Kreis, dem Zentrumskreis der Konfiguration (siehe Fig. 1). Die Mittelpunkte der Zentrumskreise der fünf (4) -Konfigurationen einer (5) -Konfiguration liegen auf einem Kreis, dem Zentrumskreis der (5) -Konfiguration. Und so weiter: Die Mittelpunkte der Zentrumskreise der n $(n-1)$ -Konfigurationen einer (n) -Konfiguration liegen auf einem Kreis, dem Zentrumskreis der (n) -Konfiguration.*

Satz 2. Die Zentrumskreise der n $(n-1)$ -Konfigurationen einer (n) -Konfiguration gehen durch einen Punkt, den Zentrumspunkt der (n) -Konfiguration. Dieser ist der Knoten einer Limaçon Kurve (siehe unten; Bemerkung (e) und Fig. 5), welche die Schar dieser Zentrumskreise umhüllt.

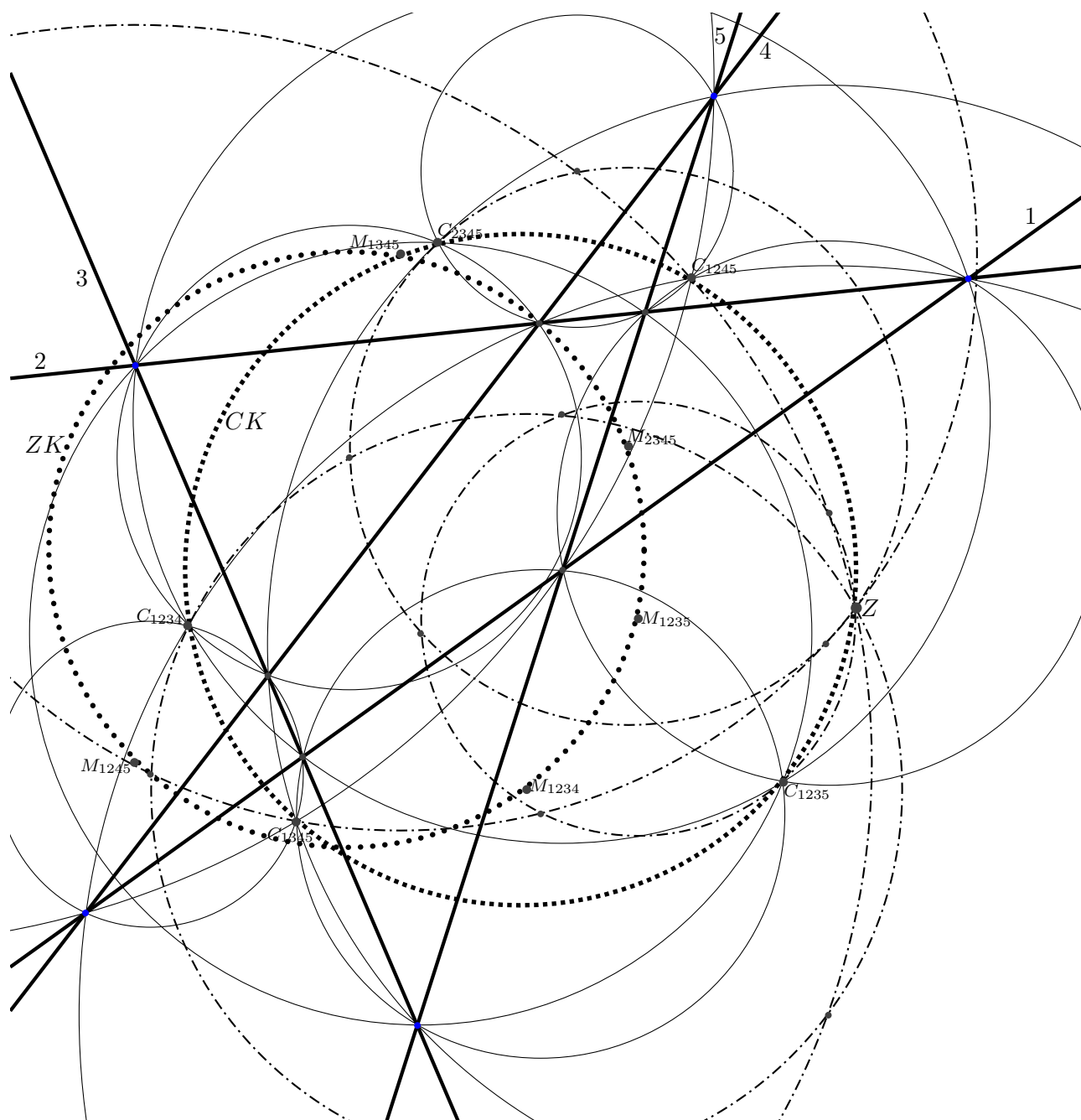
Satz 3. Die Umkreise der vier Dreiecke einer (4) -Konfiguration gehen durch einen Punkt, den Cliffordpunkt der Konfiguration. Die Cliffordpunkte der fünf (4) -Konfigurationen einer (5) -Konfiguration liegen auf einem Kreis, dem Cliffordkreis der (5) -Konfiguration. Die Cliffordkreise der sechs (5) -Konfigurationen einer (6) -Konfiguration gehen durch einen Punkt, den Cliffordpunkt der (6) -Konfiguration. Und so weiter!

Nicht erwähnt hat Morley den folgenden

Zusatz. Der Cliffordpunkt einer (4) -Konfiguration liegt auf dem Zentrumskreis der Konfiguration (Fig. 1). Damit ist die Hüllkurve der Umkreise der vier durch die Konfiguration definierten Dreiecke eine Kardioide mit Spitze im Cliffordpunkt. Der Zentrumspunkt einer (5) -Konfiguration liegt auf dem Cliffordkreis der Konfiguration (Fig. 2).



Figur 1: C_{1234} : Cliffordpunkt, ZK : Zentrumskreis



Figur 2: Z: Zentrumspunkt, CK: Cliffordkreis; (ZK: Zentrumskreis)

Bemerkungen.

(a) Morley beweist in [1] die ganz allgemeine und heute allgemein bekannte

Aussage (Fig. 4, hinten). *Die Hüllkurve einer Schar von Kreisen, welche durch einen Punkt P gehen und deren Mittelpunkte auf einem Kreis k liegen, ist eine Limaçon Kurve mit Knoten in P . Liegt P auf k , so ist die Hüllkurve eine Kardioide.*

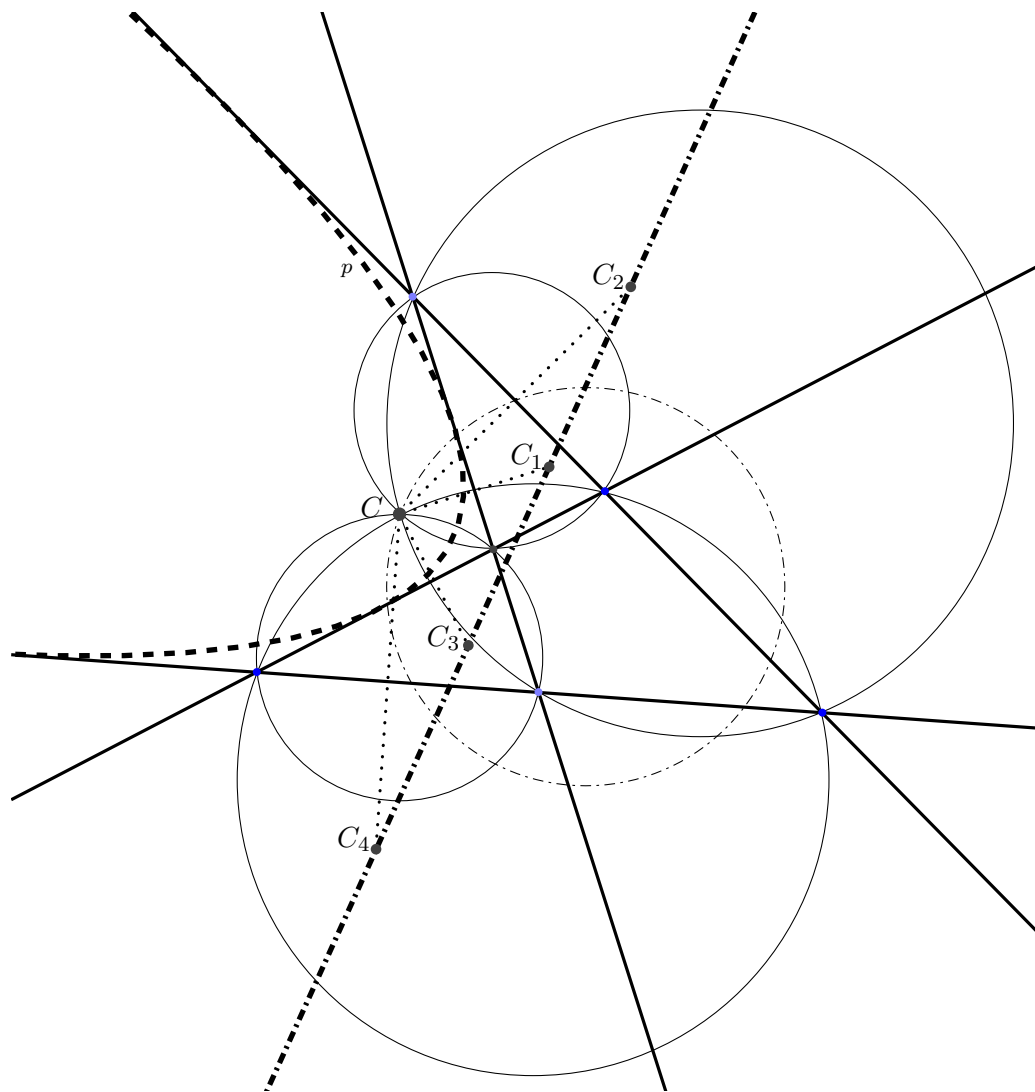
Wir geben unten Morleys direkten Beweis für die entsprechende Aussage in Satz 2. Morley nennt die Kreise der von der Limaçon Kurve umhüllten Schar die Penoskulanten der Limaçon Kurve. Er zeigt dann — unter vielem anderem — dass Aussagen ganz analog zu denjenigen in den obigen Sätzen 1 bis 3 auch gelten, wenn man anstelle der Umkreise der Dreiecke einer (4)–Konfiguration ausgeht von den Hüllkreisen von jeweils drei von vier Penoskulanten.

- (b) Morley beweist nicht nur die Existenz der Punkte und Kreise, von denen die Sätze 1 bis 3 handeln, sondern er beschreibt sie darüber hinaus auch explizit in Funktion der Geraden in den (n) -Konfigurationen.
- (c) Die Aussagen der Sätze können, vor allem für (4) -Konfigurationen, mit elementargeometrischen Hilfsmitteln, insbesondere den Kreiswinkelsätzen, bewiesen werden. Die betrachteten Situationen und die Resultate verleiten allenfalls zu vielerlei Spekulationen und Vermutungen. Auch Interpretationen im Raum drängen sich auf. So erhält man zum Beispiel aus den Sätzen 1 und 3 fast unmittelbar die folgende

Aussage. *Schneidet man vier Ebenen durch einen Punkt, von denen keine drei durch eine Gerade gehen, mit einer fünften Ebene so, dass vier Tetraeder entstehen, so liegen die Mittelpunkte deren Umkugeln auf einer ebenen Ellipse.*

- (d) Der Satz von Miquel–Steiner fasst im Wesentlichen die Aussagen der Sätze 1 und 3 im Falle $n = 4$ zusammen und enthält zudem die folgende überraschende

Ergänzung (Miquel–Steiner, Fig. 3). *Spiegelt man den Cliffordpunkt einer (4) -Konfiguration an den Geraden der Konfiguration, so erhält man vier Punkte, die auf einer Geraden liegen. Diese ist die Leitlinie und der Cliffordpunkt der Brennpunkt einer eindeutig definierten Parabel, welche die vier Geraden der Konfiguration berührt.*



Figur 3

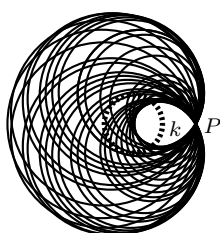
(e) Limaçon Kurve (Fig. 5). Eine Limaçon Kurve wird beschrieben durch folgende euklidische respektive Polar-Koordinatengleichung

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0, \quad a, b \text{ reelle Konstanten.}$$

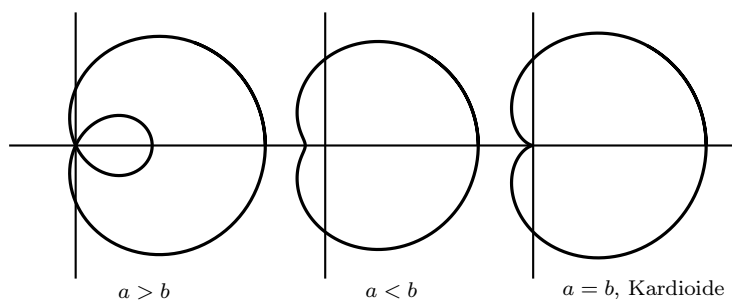
$$r(\varphi) = a \cos \varphi + b,$$

Parametrisieren lässt sich die Kurve folgendermassen:

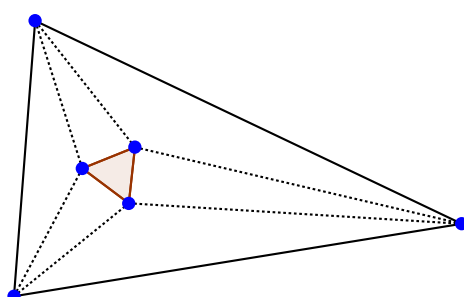
$$\begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos^2 \varphi + b \cos \varphi \\ a \sin \varphi \cos \varphi + b \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad a, b \text{ reelle Konstanten.} \quad (1)$$



Figur 4



Figur 5: Limaçon Kurven



Figur 6

Dank. Vielmals danken möchte ich Dr. Daniel Perez dafür, dass er mit sehr viel Kompetenz und Engagement den Text und die Figuren darstellungsmässig so schön auf den Punkt gebracht hat.

Literatur

- [1] F. Morley. On the metric geometry of the plane n -line. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1(2):97–115, 1900.
- [2] F. Morley. Orthocentric properties of the plane n -line. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 4(1):1–12, 1903.
- [3] F. Morley. On reflexive geometry. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 8(1):14–24, 1907.
- [4] F. Morley. Extensions of Clifford’s Chain-Theorem. *Amer. J. Math.*, 51(3):465–472, 1929.
- [5] F. Morley. In *Mathematical Association of Japan for Secondary Mathematics*, volume 6, pages 260–262, 1924.

- [6] G. Weiss. Geometrie — Tochter der Kunst, Mutter der Mathematik, 2014. http://kaernten.geometry.at/2014/kunst_tochter_mathe_mutter.pdf.
- [7] S. Kantor. Über das vollständige Fünfeit/Die Tangengeometrie an der Steinerschen Hypercyloide. *K.K. Hof- und Staatsdruckerei*, 1878.
- [8] W. Clifford. Synthetic proof of Miquel's theorem. *Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, 5:124–141, 1870.

Wider die Hast. Ein Plädoyer für mehr Zeit und Musse und Gelassenheit im Mathematikunterricht.

Roman Meier, Realgymnasium Rämibühl Zürich und Aargauische Maturitätsschule für Erwachsene, Aarau.
meier_roman@hispeed.ch.

Viele Mathematiklehrpersonen stehen unter einem grossen Druck, was ihren Unterricht anbelangt: Dies muss noch behandelt werden und jenes sitzt noch nicht, dazu kommen Stundenausfälle wegen Exkursionen, Feiertagen und Evaluationen. Die Schülerinnen und Schüler haben schon wieder vergessen, was in der letzten Lektion thematisiert wurde, man muss immer wieder dasselbe erklären und kommt nicht voran. Häufig hört man an Treffen von Mathematiklehrpersonen Klagen über zu volle Lehrpläne, zu wenig Unterrichtslektionen und überforderte Klassen, und dass man viel zu wenig Zeit hat, all die notwendigen Themen zu behandeln. All dies führt dazu, dass eine gewisse Hektik in den Schulstunden aufkommt.

Woher kommt dieser Druck, wer setzt ihn auf? Welches sind die Probleme, die aufgrund dieses Druckes und der daraus entstehenden Hektik zustande kommen? Und weshalb sollen wir uns mehr Zeit nehmen im Mathematikunterricht? Diesen Fragen werde ich in diesem Text nachgehen – denn dies ist ein Plädoyer für mehr Zeit und Musse im Mathematikunterricht an den Gymnasien.

Hast verdirbt alles¹

Es gibt mehrere Gründe für das oft gehetzte Treiben in den Mathematiklektionen. Die zwei wichtigsten:

- Das Fach Mathematik gehört bezüglich Studierfähigkeit zu den "grossen vier Fächern", neben der Muttersprache, der englischen Sprache und der Informatik². Dies, weil die Mathematik in vielen Studiengängen gebraucht und daher von den Hochschulen Grundkenntnisse vorausgesetzt werden. Dies erhöht den Druck: Wir wollen ja unsere Schülerinnen und Schüler möglichst gut auf das Studium vorbereiten und die Erwartungen der Hochschulen erfüllen.
- Mathematiklehrpersonen haben Mathematik studiert. An den Hochschulen gleichen Mathematikvorlesungen meist Hochgeschwindigkeitsabschreibübungen.³ Der Stoff wird an diesen Vorlesungen weder in einem erklärenden Sinn vermittelt noch didaktisch aufbereitet⁴. Übersehen wird vor allem, dass die „korrekte“ Art und Weise, mathematische Inhalte darzustellen, nicht immer gewinnbringend ist, wenn es darum geht, diese Inhalte zu vermitteln. Solcherart geschult treten die Studienabgänger dann vor die Klassen und reproduzieren die Methoden, mit denen sie selber konfrontiert waren.

Warum nun sollen wir das Tempo in den Unterrichtsstunden drosseln?

¹ Ein Dozent der Universität Zürich, Felix Winter, benutzte diesen Satz einmal an einer Weiterbildung. Seither hängt er über meinem Schreibtisch. Herr Winter erwähnte auch den Urheber dieses Satzes – aber daran kann ich mich nicht mehr erinnern.

² siehe z.B. EVAMAR II.

³ Jedenfalls zu "meiner" Zeit. Aber auch noch heute scheint sich die didaktische Fähigkeit vieler Hochschuldozierenden im Fach Mathematik über die Anzahl vollgeschriebener Tafeln während einer Vorlesung zu definieren.

⁴ Die „Vorlesung“ ist ein Konzept aus dem Mittelalter, als die Bücher teuer waren und die Studenten kein Geld hatten, sich solche zu kaufen. Daher wurde ihnen in Vorlesungen der Stoff, eben, vorgelesen, damit diese sich Notizen machen konnten – Abschreibübungen eben. Der Mathematikprofessor und Autor Klaus Jänich verklärt in seinem Buch „Lineare Algebra“ diese Abschreibübungen wie folgt: *Es ist, als ob die Information durch Auge und Ohr erst einmal in die Hand gehen müsste, um im Gehirn richtig anzukommen*. Eine ziemlich gewagte These, für deren Korrektheit die es derzeit, meines Wissens, keinen Beleg gibt.

Seit ich in meinem Unterricht das Tempo gedrosselt habe, komme ich schneller voran.⁵

Die Forderung, einen (oder zwei) Gänge „runterzuschalten“ meint nicht, dass wir einen Larifari – Betrieb aufbauen sollten, alles noch dreimal öfter erklären oder gar langsamer sprechen und in Zeitlupe an die Tafel schreiben. Gemeint ist, dass wir uns mit den Lernenden zusammen einem Thema ganz zuwenden und dieses vertiefen, indem wir, stressfrei und ohne Zeitdruck, eine Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit den Konzepten und Kernideen der Mathematik initiieren.

Denn: was soll eine Maturandin von meinem Unterricht mitnehmen, ganz egal ob diese nun Germanistik, Rechtswissenschaften, Physik oder Informatik studiert? Wann ist ein Maturand in diesem Fach gut ausgebildet? – Dann, wenn diese jungen Menschen die Grundkonzepte der vermittelten Inhalte verstanden und schätzen gelernt, die Kernideen der Mathematik ausprobiert, die Schönheit in der Klarheit einer mathematischen Argumentation geschaut und die Vielseitigkeit der inner- und aussermathematischen Problemlösestrategien, welche die Mathematik zu bieten hat, gesehen haben.

Pathetisch? Vermutlich. Übertrieben? Nein.

Denn: Es geht bei der mathematischen Ausbildung des gymnasialen Nachwuchses nicht um eine Fachausbildung.⁶ Es ist nicht Ziel des Mathematikunterrichts, unsere Schülerinnen und Schüler mit einem Rucksack voller Betty-Bossi-Rezepte für Rechenverfahren auszustatten, damit sie dann in der Lage sind, an den Hochschulen Rechenaufgaben zu bewältigen⁷. Es ist hingegen unsere Pflicht, ihnen die Welt der Mathematik zu zeigen und sie für unsere Disziplin zu begeistern – egal, ob diese später in ihren Studiengängen die gezeigten Konzepte wiederum brauchen oder nicht.

Es geht nicht um das Hochschulstudium, welches eine Fachausbildung anbietet, sondern um den Mittelschulunterricht, und dieser ist der Allgemeinbildung geschuldet. Das wichtigste Ziel des Mittelschulunterrichts ist die Möglichkeit der Interessensbildung der Schülerinnen und Schüler, denn in dieser Zeit sollen sie sich für ein Fachstudium entscheiden.

Es ist weiter unsere Pflicht, den Mathematikunterricht so zu gestalten, dass auch der angehende Germanist und die angehende Historikerin davon profitieren – was angesichts des Reichtums, das unser Fachgebiet zu bieten hat, in hohem Masse möglich ist.

Daher müssen wir unser Hauptaugenmerk auf die Konzepte und Kernideen der Mathematik lenken – und diese zu vermitteln braucht Zeit.

Es gibt aber noch einen anderen, wesentlichen Grund, sich im Mathematikunterricht Zeit zu nehmen für die Konzepte und Kernideen unserer Wissenschaft.

⁵ Dies erwähnte mein sehr geschätzter Kollege Benaja Schellenberg am Realgymnasium Rämibühl während eines Pausengesprächs.

⁶ Dies ist im Maturitätsanerkennungsreglement so festgehalten. Dort steht: *Die Schulen streben eine breit gefächerte, ausgewogene und kohärente Bildung an, nicht aber eine fachspezifische oder berufliche Ausbildung. [...] Maturandinnen und Maturanden sind fähig, sich den Zugang zu neuem Wissen zu erschliessen, ihre Neugier, ihre Vorstellungskraft und ihre Kommunikationsfähigkeit zu entfalten[...]. Sie sind nicht nur gewohnt, logisch zu denken und zu abstrahieren, sondern haben auch Übung im intuitiven, analogen und vernetzten Denken. Sie haben somit Einsicht in die Methodik wissenschaftlicher Arbeit.*

⁷ Was in der Regel nicht notwendig ist. Ich habe Mathematik im Hauptfach sowie Physik und Wirtschaftswissenschaften in den Nebenfächern studiert; beides stark mathematikbasierte Wissenschaften. Viele an der Mittelschule gelernte Rechentechniken habe ich erst wieder als Mathematiklehrer an einer Mittelschule gebraucht.

Einem Schüler, der ein Konzept verstanden hat, reichen zehn Übungsaufgaben. Jenem, der ein Konzept nicht verstanden hat, reichen deren hundert nicht.⁸

Wenn Rezepte statt Konzepte den Unterricht dominieren, kann es schnell langsam werden: Die Rezepte werden von den Schülerinnen und Schülern auf die Prüfungen hin gelernt und anschliessend (zu Recht!) wieder vergessen. Einem Schüler die Grundlagen der Differentialrechnung beibringen, der das Konzept der "Funktion" nicht verstanden hat, ist schwierig. Einer Schülerin Ebenengleichungen vermitteln, die die Idee des Koordinatensystems und der Koordinatengleichung nicht begriffen hat, kann mühsam werden.

Ein kleines Beispiel zur Illustration: Wir wollen unserer Klasse beibringen, wie man quadratische Ungleichungen löst.

Ein Schüler, der erklären kann, was der Unterschied zwischen einer Bestimmungsgleichung und einer Funktionsgleichung ist; der in der Lage ist, einen Funktionsgraphen zu interpretieren und der eine quadratische Gleichung erkennt und lösen kann, für den ist das Lösen einer quadratischen Ungleichung ein Klacks. Und zwar so sehr, dass man sich fragt, ob es sich überhaupt lohnt, dieses Verfahren im Unterricht zu thematisieren⁹.

Hingegen kann es ganz schön mühsam (und zeitaufwändig!) sein, einer Klasse, welche all diese Konzepte nicht begriffen hat, beizubringen, wie eine solche Ungleichung denn zu lösen sei, vor allem dann, wenn diese Klasse nicht einsieht, warum diese Lösungsmenge überhaupt von Interesse ist. Am Schluss werden sie sich, ohne die Hintergründe zu beleuchten, rezeptartig ein Vorgehen merken, an der Prüfung einigermassen damit durchkommen und anschliessend das Rezept wieder vergessen. Und so unter dem Strich nichts gelernt haben.

Wir haben wenig Zeit, deshalb müssen wir langsam vorgehen.¹⁰

Lernende hingegen, welche die Konzepte und Ideen der Mittelschulmathematik verstehen, sind motiviert, sie können mit neuen Objekten und Strategien umgehen, weil sie eben etwas von der Mathematik verstanden haben. Sie erfahren, dass sie ähnliche Strategien in verschiedenen Situationen anwenden können und wie sich ihr Wissen und Können stetig erweitert. Sie erleben sich selber als Kompetent in mathematischen Fragestellungen. Und darum kommt man im Unterricht weiter, wenn man langsamer vorwärts macht. Denn Hast verdirbt alles, zum Beispiel die Mathematik in den Köpfen der Lernenden.

Hast verdirbt alles: Die Lust an der Mathematik, das Interesse der Lernenden an diesem Fach, den Blick auf die Schönheit der Mathematik und auf die Tiefe ihrer Erkenntnisse, und schliesslich auch die Freude am Unterrichten. Und darum ist es Zeit für mehr Zeit und Musse im Mathematikunterricht.

Andere Meinung? Gleiche Meinung? Ich freue mich über Reaktionen: meier_roman@hispeed.ch

⁸ Dies wiederum sagte Armin Barth an einer Weiterbildung am MINT-Lernzentrum der ETH.

⁹ Denn, unter uns gesagt: Wer interessiert sich überhaupt für die Lösungsmenge irgendeiner beliebigen quadratischen Ungleichung? - Es sei denn, diese Lösungsmenge ist relevant für die Lösung eines interessanten Problems. Dann will ich nichts gesagt haben.

¹⁰ Ruth Cohn, Begründerin der themenzentrierten Interaktion.



Schweizerische Mathematische Gesellschaft Société Mathématique Suisse

Ausschreibung der Matura Awards 2016 der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Seit 2010 verleiht die Schweizerische Mathematische Gesellschaft (SMG) alle zwei Jahre einen oder mehrere Preise an Gymnasiastinnen oder Gymnasiasten, die eine hervorragende Maturaarbeit oder ein Projekt im Rahmen des Wettbewerbs „Schweizer Jugend forscht“ verwirklicht haben.

Die SMG lädt hiermit interessierte Jugendliche ein, ihre Bewerbungen für die **Matura Awards 2016** einzureichen. Zugelassen sind Arbeiten, die im vergangenen oder laufenden Schuljahr abgeschlossen wurden und die in der Mathematik angesiedelt oder interdisziplinär mit einem substantiellen Anteil an Mathematik angelegt sind. Die Preisverleihung wird im Rahmen des 27. Schweizerischen Tags über Mathematik und Unterricht am 7. September 2016 an der Kantonsschule Wil stattfinden.

Schülerinnen und Schüler, die sich bewerben möchten, senden ihre Arbeit als PDF-Datei (oder in zwei gedruckten Exemplaren) zusammen mit ihrer Adresse und einem kurzen CV bis am **15. Mai 2016** an

Urs Lang
lang@math.ethz.ch
Departement Mathematik
ETH Zürich, HG G 27.3
Rämistrasse 101
8092 Zürich

Die Jury wird vom Vorstand der SMG zusammengestellt und besteht aus Hochschulangehörigen. Sie wird vom Vizepräsidenten der SMG geleitet und kann, falls nötig, Kandidatinnen und Kandidaten zu ihrer Arbeit befragen.

Die Gymnasiallehrkräfte im Fach Mathematik sind höflich gebeten, diese Information an geeignete Kandidatinnen und Kandidaten weiterzuleiten.

Zürich, 1. Dezember 2015

Urs Lang
Sekretär der SMG

Cours CRP 2015

La physique des phénomènes atmosphériques - Champéry (VS)

Stéphane Davet – stephane.davet@lyca.eduvs.ch



Tous les jours, d'innombrables scientifiques tentent de prévoir le temps qu'il va faire les jours suivants. Pour effectuer ce travail, les météorologues utilisent souvent, enrichis de leur expérience, des modèles dans lesquels ils incorporent les données expérimentales. Des phénomènes complexes qui ne sont pas encore entièrement compris, comme la formation des orages, de la foudre ou la dynamique des tornades sont par ailleurs à l'œuvre autour de nous. D'autres essaient d'anticiper les modifications atmosphériques globales à long terme, notamment pour étudier les conséquences de l'activité humaine sur notre environnement.

Afin de permettre aux enseignant-e-s de physique du secondaire II de mieux comprendre les enjeux et les mécanismes à l'œuvre dans cette recherche, la CRP a proposé un cours de formation continue sur ce sujet en septembre 2015. Ce dernier a eu un grand succès avec plus de 60 participants. Malgré les efforts des organisateurs pour augmenter la capacité d'accueil du cours, nous avons malheureusement dû refuser un certain nombre d'inscriptions. Nous espérons pouvoir améliorer la situation pour le cours 2016 avec quelques places supplémentaires.

Les onze présentations ont été d'une grande qualité; sans nous emmener dans de trop arides développements mathématiques, faisant simplement parfois appel à telle ou telle expression algébrique, ici ou là à une équation différentielle, elles nous ont permis de nous immerger, durant ces quatre jours, dans le monde fascinant de la genèse des phénomènes atmosphériques.

Toutes les conférences ont été enregistrées et tous les conférenciers ont eu la gentillesse de nous donner les images de leur(s) présentation(s) ; chacun-e peut ainsi voir (ou revoir) comme si on y était les images projetées, tout en bénéficiant du commentaire.

Ces vidéos sont accessibles sur le site de la CRP : <http://crp.sspmp.ch/index.php>

En espérant que vous aurez beaucoup de plaisir à (re-)écouter ces présentations passionnantes, nous vous souhaitons une excellente année 2016 !

Swiss Teacher Programme 2016

Cours de formation continue au CERN pour les enseignant(e)s en physique /
Weiterbildungskurs für Physiklehrkräfte am CERN

The **Swiss Teacher Programme 2016** will take place from **30 March to 1 April**.

Lectures, on-site visits and exhibitions and hands-on workshops as well will introduce its participants into cutting-edge particle physics. We hope our participants will go back as ambassadors, who pass on the subject to our next generation of physicists, engineers, IT specialists and and and ...

There are no costs involved other than travel, board (ca. 35.- / day) and lodging (58.- / night).

Registration is open form now on and closes on **16 February 2016**. Details for registration and all necessary information is provided via the following URL <https://indico.cern.ch/e/CHTP16> .

Le programme se déroulera en anglais, français et allemand, selon les participants mais avec l'anglais comme langue principale.

Das Programm wird auf Englisch, Deutsch und Französisch ablaufen, entsprechend den Teilnehmern, wobei Englisch hauptsächlich zur Anwendung kommt.



CERN: S'CoolLab

- Le laboratoire d'étudiants S'CoolLab au CERN

Le S'CoolLab au CERN, le nouveau laboratoire d'étudiants, invite les élèves âgés d'environ de 16 à 19 ans pour une journée dans le monde de la science fondamentale de plonger dans la physique des particules et de réaliser des expériences soi-mêmes. Détails sur ce sujet et comment vous pouvez participer avec votre classes ont expliquées sur le site web du CERN S'CoolLab:

<http://scool.web.cern.ch> → 'For Teachers'

Chaque année, il y a plusieurs périodes d'inscription pour visiter le S'CoolLab, veuillez noter vous-même les informations appropriées sur les pages web du S'CoolLab. Si vous souhaitez être informé directement, vous pouvez vous inscrire à la newsletter du S'CoolLab avec votre adresse e-mail:

<http://scool.web.cern.ch/content/latest-news>

- Schülerlabor S'CoolLab am CERN

Das neue Schülerlabor S'Cool Lab am CERN lädt Schüler der Altersgruppe von ca. 16 bis 19 Jahren einen Tag lang ein, um in die Welt der Grundlagenforschung und der Teilchenphysik einzutau-chen und dabei auch selber Experimente durchführen. Details hierzu und wie Sie mit Ihrer Klasse teilnehmen können, sind auf der Web-Seite des CERN S'Cool Lab erklärt:

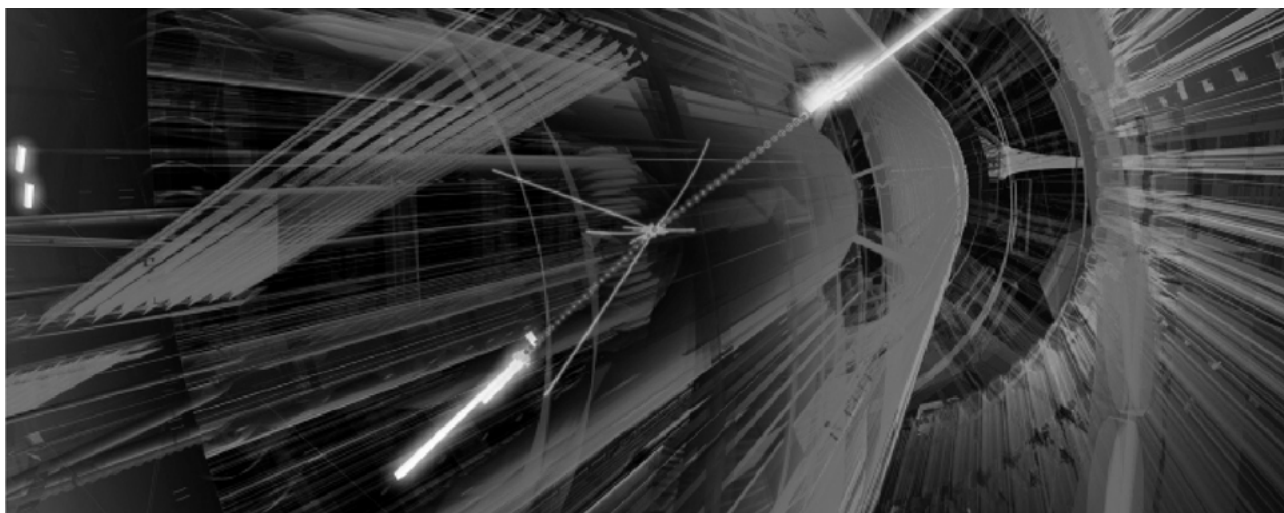
<http://scool.web.cern.ch> → 'For Teachers'

Jedes Jahr gibt es mehrere Anmeldeperioden zum Besuch des S'Cool Lab, bitte beachten Sie die entsprechende Information auf der Web-Seite des S'Cool Lab. Wenn Sie direkt informiert werden möchten, können Sie sich für den S'Cool Lab Newsletter mit Ihrer E-Mail-Adresse registrieren:

<http://scool.web.cern.ch/content/latest-news>

Hans Peter Beck

Swiss Physical Society - Education and promotion of physics



Computing im Physikunterricht

Aegidius Plüss, Bern, ehemaliges Mitglied der DPK, aegidius@pluess.name

DPK

Aus einer Publikation des Department of Energy der USA entnehme ich: "*Computational physics is necessary at all stages of High Energy Physics experiments – from the construction and development of accelerators and detectors, to theoretical modeling, to data acquisition, to management of data-intensive research and analysis, and to data sharing through complex, efficient network.*" (<http://science.energy.gov/>). Während also im Alltag des Physikers der Computer allgegenwärtig ist, sei es zur Steuerung und Datenauswertung seiner Experimente oder zur Simulation der Theorie in einem virtuellen Experiment, zeigt sich in dieser Beziehung im Physikunterricht unserer Mittelschulen ein düsteres Bild: Hier wird der Computer ausser zur Textverarbeitung und Datendarstellung nur sehr zögerlich eingesetzt, obschon es an Geräten und Software nicht fehlt.

Ein Grund mag sein, dass Physiklehrpersonen heutzutage ein eher gespaltenes Verhältnis zur Programmierung haben. Während es vor 30 Jahren selbstverständlich war, dass jeder Physiker wenigstens mit einer Programmiersprache wie Basic, Pascal, C oder sogar Maschinensprache vertraut war, gilt dies heute für die weit verbreiteten Programmiersprachen C++, C#, Pascal/Delphi und Java nicht mehr. Eine Umfrage unter Physiklehrpersonen zeigt, dass das Programmieren mit diesen Programmiersprachen vor allem auf Grund des grafischen Benutzerinterfaces und der Objektorientierung als zu schwierig und für den Physikunterricht ungeeignet betrachtet wird. Zudem kann man leider selten auf Programmierkenntnisse der Schülerinnen und Schüler zurückgreifen, da es (noch) keinen verbindlichen Informatikunterricht gibt oder dort nicht in einer für die Physik anwendbaren Programmiersprache unterrichtet wird. Die Verwendung von Tabellenkalkulation (Excel) oder des programmierbaren Taschenrechners ist eher ein Rettungsanker als eine ernstzunehmende Alternative, da das dabei erworbene Wissen zu wenig allgemeine Gültigkeit hat.

In den Jahren 1980 bis 2000 war der politische Willen und die persönliche Bereitschaft zur Weiterbildung in Schweiz besonders gross. Als Mitglied der DPK, aber auch als Fachdidaktiker Physik und später Informatik habe ich mich mit der Organisation und Durchführung von Weiterbildungskursen für Physiklehrpersonen rege beteiligt. Ich blicke dabei auf eine schöne Zeit zurück, in der es eine Selbstverständlichkeit war, dass sich PhysikerInnen für Mikroprozessoren, Computer und Programmieren interessierten. Es liegt mir daher viel daran, für die heutige Generation von Lehrpersonen ähnlich einfache, aber performante Werkzeuge für das Computing im Mathematik- und Physikunterricht zu entwickeln und in der Aus- und Weiterbildung anzubieten. Dabei bin ich von einer Programmiersprache ausgegangen, die bei den Physikern weltweit einen hervorragenden Ruf hat und in den letzten Jahren zu einem regelrechten Hype geworden ist. Es handelt sich um die Sprache **Python**, die als Interpreter ähnlich einfach wie Basic oder Pascal ist. Sie besitzt einen globalen Namensraum, sodass das mühsame Einbetten des kleinsten Programms in eine Klasse wegfällt.

Für Unterrichtende und Schülerinnen und Schüler spielt aber auch die Installationskomplexität und die kostenlose Verfügbarkeit eine wichtige Rolle. Dies wurde durch die Entwicklungsumgebung **TigerJython** von Tobias Kohn, Mathematiklehrer an der Kantonsschule Zürcher Oberland, sicher gestellt. Nach dem Herunterladen einer einzigen Datei kann auf jeder Plattform und ohne Administratorrechte sofort mit dem Programmieren losgelegt werden. TigerJython enthält auch viele für den Mathematik und Physikunterricht wertvolle Bibliotheken ohne Nachinstallation (Grafikfenster, Bildverarbeitung, Sound, FFT, usw.).

Bei vielen Lehrpersonen stehen Lehrmittel im Focus, die exemplarisch und sehr konkret mittels lauffähiger Programm zeigen, wie sich die Grundkonzepte der Informatik im Unterricht umsetzen lassen. Wir bieten mit TigerJython ein Online-Lehrmittel in Deutsch/Englisch und bald auch vollständig in Französisch an (www.tigerjython.ch), das sich sowohl für den Unterricht wie für das Selbststudium eignet. Beispiele für das Computing im Physikunterricht, die aus meiner langjährigen Tätigkeit als Gymnasiallehrer inspiriert sind, habe ich unter www.tigerjython.ch/unterrichtsmaterialien zusammengestellt.

Zeichnen mit dem Gartenschlauch

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, lieberhm@mng.ch

1 Einleitung

Im heissen Sommer 2015 hatte ich reichlich Gelegenheit, meinen Rasen zu giessen. Da der Rasen die Spielwiese meiner Kinder ist, verlor ich gelegentlich die Herrschaft über den Gartenschlauch und wurde das Opfer wässriger Fehlschüsse. Die Kinder können den Schlauch natürlich nicht ruhig halten. Eine (simulierte) Momentaufnahme des Strahls kann wie in Abbildung 1 aussehen.

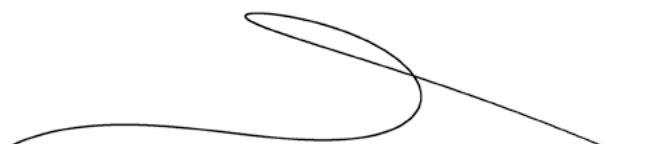


Abbildung 1: Wird ein Gartenschlauch in vertikaler Richtung geschüttelt, so kann der Wasserstrahl momentan eine Schlaufe bilden. In der zweidimensionalen Simulation wurde ignoriert, dass sich ein Strahl normalerweise in einzelne Tropfen zerlegt.

In Abbildung 1 bildet der Strahl eine Schlaufe. Kann man den Schlauch gezielt so bewegen, dass sich momentan ein perfekter Kreis bildet? Diese akademische Aufgabe ist eine Variation zum Thema schiefer Wurf.

2 Theorie

Die Wassertropfen folgen Wurfparabeln. Die gepunktete Linie in Abbildung 2 ist der geometrische Ort gleicher Flugzeiten. Der Abschuss erfolgt gleichzeitig im Nullpunkt des Koordinatensystems.

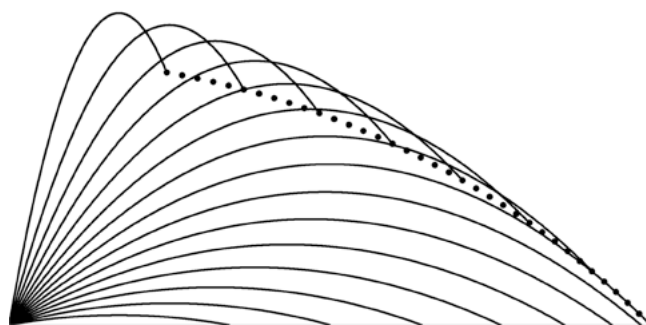


Abbildung 2: Wurfparabeln mit gleicher Abschussgeschwindigkeit für verschiedene Abschusswinkel. Die fetten Punkte sind Positionen gleicher Flugzeit. Es ist also möglich, verschiedene Punkte im Raum gleichzeitig zu treffen, wenn nur die Flugzeiten unterschiedlich genug sind. N.B. Aus dem Unabhängigkeitssatz folgt, dass die fetten Punkte auf einem Kreis liegen.

Mit Anfangsgeschwindigkeit v , Abschusswinkel α (gegen die Horizontale), Fallbeschleunigung g , Zeitpunkt t sowie den Koordinaten x und y erhalten wir die Wurfparabelgleichung (1) sowie die Koordinaten als Funktion der Zeit (2). Will man ein Ziel bei (x, y) treffen, so muss man die Wurfparabelgleichung nach dem Abschusswinkel auflösen. Kennt man den Abschusswinkel und das Ziel, so kann man die Flugdauer vom Nullpunkt

(Abschussort) bis zum Ziel berechnen.

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - g \cdot (gx^2 + 2v^2y)}}{gx} \quad (1)$$

$$x = tv \cos \alpha \rightarrow t = \frac{x}{v} \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \quad y = tv \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

3 Zielwasser

Mit den Gleichungen (1) - (2) kann man untersuchen, ob alle Punkte einer Zielmenge gleichzeitig erreichbar sind. In den Abbildungen 3 und 4 ist die Zielmenge eine vertikale Strecke respektive ein vertikaler Kreis. Den Rechnungen liegt $v = 10 \text{ m/s}$ und $g = 10 \text{ m/s}^2$ zugrunde.

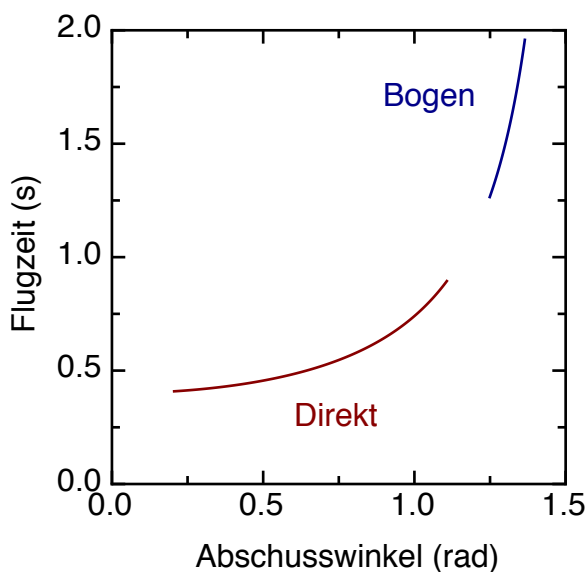


Abbildung 3: Flugzeit versus Abschusswinkel für den Direkt- und Bogenschuss, wenn das Ziel eine vertikale Linie ist: $x = 4 \text{ m}$, $y = 0 \dots 4 \text{ m}$

Der Flug ans obere Ende dieser Linie dauert länger als der Flug ans untere Ende. Schiesst man den Strahl zur Zeit $t = -0.89 \text{ s}$ unter dem Winkel $\alpha = 1.11 \text{ rad}$ ab, bewegt den Schlauch geeignet nach unten, bis er zur Zeit $t = -0.41 \text{ s}$ unter $\alpha = 0.21 \text{ rad}$ spritzt, so erreicht das Wasser gleichzeitig zur Zeit $t = 0$ die vertikale Linie im Direktschuss; analog geht man beim Bogenschuss vor.

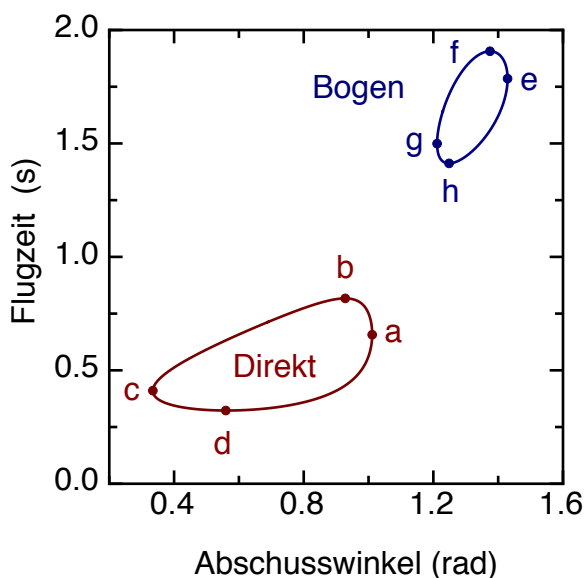


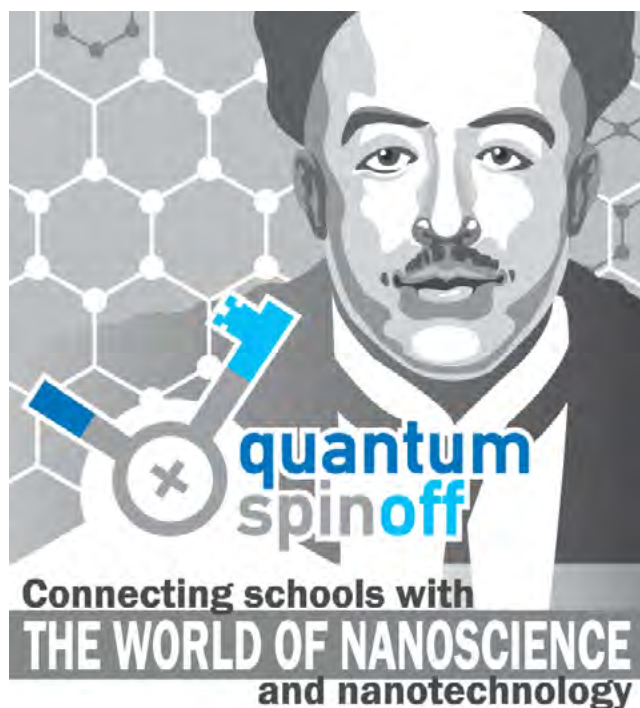
Abbildung 4: Flugzeit versus Abschusswinkel für den Direkt- und Bogenschuss, wenn das Ziel ein vertikaler Kreis ist: $x = x_z + r \cos \varphi$, $y = y_z + r \sin \varphi$, $r = 1.5 \text{ m}$, $x_z = 4 \text{ m}$, $y_z = 2 \text{ m}$, $\varphi = 0 \dots 2\pi$ (Polarwinkel)

Die Extrema a-h entsprechen folgenden Polarwinkeln:
 Direktschuss $\varphi_b = 0.93 \text{ rad}$, $\varphi_a = 1.92 \text{ rad}$,
 $\varphi_d = 3.71 \text{ rad}$, $\varphi_c = 4.63 \text{ rad}$
 Bogenschuss $\varphi_g = 0.56 \text{ rad}$, $\varphi_h = 1.25 \text{ rad}$,
 $\varphi_e = 3.32 \text{ rad}$, $\varphi_f = 4.52 \text{ rad}$ ($\pm 0.01 \text{ rad}$)

Es ist unmöglich, den ganzen Kreis im Direktschuss zu bilden, denn man müsste gleichzeitig in zwei verschiedenen Richtungen spritzen. Es lässt sich aber ein Abschnitt des Kreises im Direktschuss und ein anderer im Bogenschuss bilden. Die Abschnitte ergänzen sich leider nicht zum Vollkreis.

Der Abschusswinkel eines Wasserstrahls lässt sich so steuern, dass der Strahl zu einem bestimmten Zeitpunkt gewissen Figuren in der Luft bildet, aber ein Smiley dürfte schwierig werden.
 27. November 2015, Lie.

Quantum Spin-Off Projekt – Schulen mit Nano-Forschung vernetzen



Das Quantum Spin-Off Projekt ist erfolgreich abgeschlossen. Auf der Webseite des Projekts stehen für Physiklehrpersonen im Projekt erprobte Unterrichtsmaterialien zur Verfügung. Die Unterrichtsmaterialien ermöglichen den Schülerinnen und Schülern einen Einblick in die Quantenphysik, Nano-Forschung sowie Nanotechnologie.

Webseite: www.quantumspinoff.eu

Kontakt:

Miriam Herrmann

Zentrum für Naturwissenschafts- und Technikdidaktik

Pädagogische Hochschule der FHNW

miriam.herrmann@fhnw.ch

T: 061 228 50 13

DIE NEUEN VERNIER-PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

shop.educatec.ch/vernier

VERNIER DYNAMICS SYSTEM



Mit dem Vernier Dynamics System, einer für den Physikunterricht konzipierten Fahrbahn, wird es einfach Newtons zweites Gesetz, die Beschleunigung auf der schiefen Ebene und vieles mehr zu demonstrieren.

Vernier-Sensoren wie Bewegungsdetektor, Zweibereichkraftsensor, Wireless Dynamics Sensor System, Lichtschranke und Beschleunigungsmesser können leicht am Dynamics System befestigt werden. Weiterhin können Sie die Schiene zu einer optischen Bank verwandeln oder mit dem Schienenverbinder beliebig verlängern.



DIREKT
ZUM SHOP

VERNIER MOTION ENCODER SYSTEM

Der Motion Encoder Wagen ersetzt den Ultraschall-Entfernungsdetektor im Einsatz bei Versuchen zur Dynamik mit Wagen und Schiene. Ein optischer Sensor erfasst die Bewegung des Wagens über einen Lineal auf der Schiene. Die Position wird über ein kodierte Infrarot-Signal an einen Empfänger am Ende der Schiene übermittelt. Dieses Verfahren eliminiert Störungen durch Reflexionen und Störgeräusche, wie sie bei Ultraschallmessungen auftreten. Das optische System garantiert genaue und wiederholbare Ergebnisse.



DIREKT
ZUM SHOP

worlddidac
AWARD 2014

VERNIER OPTIK-SYSTEM



DIREKT
ZUM SHOP

Mit dem Erweiterungssatz Optik wird die Vernier-Schiene zur optischen Bank. Damit sind Experimente bis hin zum Aufbau eines einfachen Teleskops möglich. Das Optik-System kann zudem mit einem Farbmisch-Kit, einem Spiegel-Set, einem Apparat zur Lichtbrechung sowie einem Polarisator/Analysator-Set erweitert werden.


Vernier
Measure. Analyze. Learn.™

Möchten Sie mit uns in Kontakt bleiben und über unsere neusten Aktivitäten informiert werden? Dann registrieren Sie sich unter www.educatec.info für unseren Newsletter.

Alle unsere Kataloge finden Sie online unter shop.educatec.ch/werbematerial

EducaTec AG

Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63
contact@educatec.ch, www.educatec.ch


educatec

Ja - Oui - Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF - SSPMP - VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prenom/Nome:

Adresse/Indirizzo (privat/privato):

Plz-Ort/NP-Ville/CAP -Luogo:

(Land/Pays/Paese):

Email: (Tel):

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita):

Sprache/Langue/Lingua: D F I.

Schule/école/scuola: Kanton/canton/cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo passive/passif/passivo

Student/in, étudiant(e), studente/ssa.

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG -SSPES -SSISS, Sekretariat (Frau Doris Lazzeri), 3000 Bern

oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber — Éditeur
VSMP – SSPMP–SSIMF

Korrespondenz — Correspondance

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout — Mise en page

Samuel Byland samuel.byland@mng.ch
Rain 14 Tel. 032 512 50 84
5000 Aarau

Inserateverwaltung — Publicité

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:
ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–
Beilagen:
bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — Changement d'adresse

VSMP Mitglieder — *Membres de la SSPMP*:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
3000 Bern
Tel. 056 443 14 54 / Fax. 056 443 06 04
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — *autres abonnés*:
Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Auflage — Tirage

900 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Domenico Galli 44
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschschweizerische Mathemattikkommission

Daniela Grawehr grawehr@kfanet.ch
Schützenstrasse 36 Tel. 041 810 49 88
6430 Schwyz

Deutschschweizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Pestalozzistrasse 17 Tel. 034 423 46 43
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano tatiana.mantuano@gfbienne.ch
rue Louis-de-Meuron 4 Tél. 032 544 47 53
2074 Marin-Epagnier

Commission Romande de Physique

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 131	31.03.2016 (20.05.2016)
Nr. 132	31.07.2016 (20.09.2016)
Nr. 133	30.11.2016 (20.01.2017)

Druck und Versand — Imprimerie

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermannruck.ch

Internet-Adressen — Adresses Internet

www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch