

V S M P
S S P M P
S S I M F

Bulletin

Januar 2017 — Janvier 2017 — Gennaio 2017

N° 133



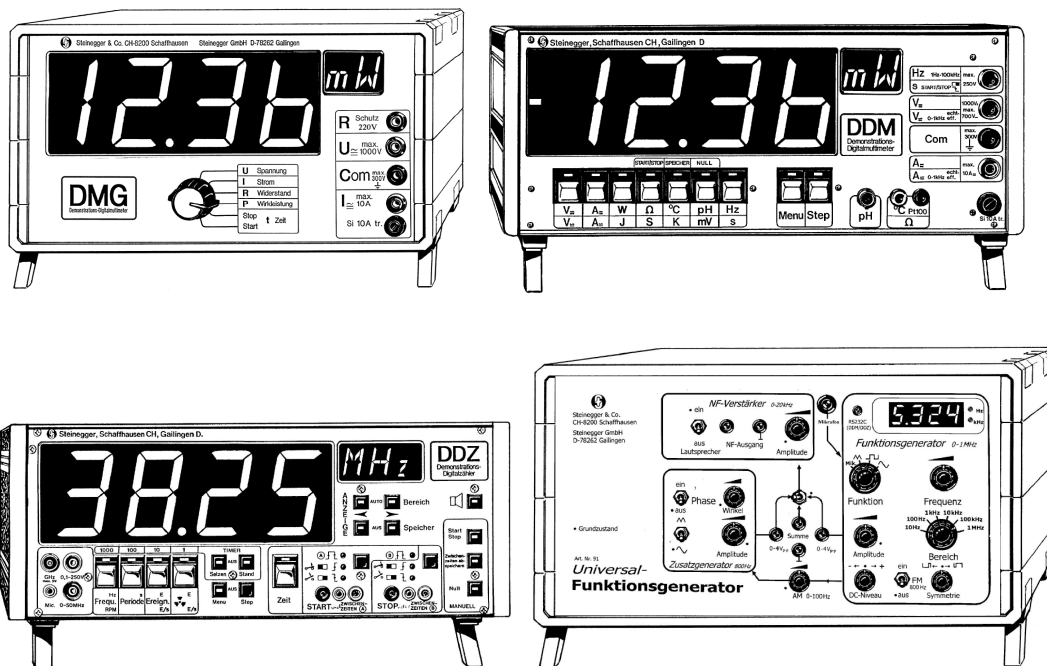
V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica

Steinegger und Co.

Auf dieser Seite erschien seit vielen Jahren bis zur letzten Ausgabe das Inserat der Firma Steinegger und Co.

Seit über vierzig Jahren stellt die Firma Steinegger und Co. hochwertige Geräte für Demonstrationsexperimente im Physikunterricht her, Geräte zur Messung von Spannungen, Stromstärken, Temperaturen, Leistungen, Zeiten, Frequenzen, Zählraten etc. Generationen von Physiklehrerinnen und -lehrern haben seine Geräte erfolgreich im Unterricht eingesetzt.



Jetzt, nach über 40 Jahren, stellt Herr Steinegger die Produktion ein. Für das Jahr 2017 wird er den Service für allfällige Reparaturen aufrecht erhalten – und vielleicht wird die Suche nach einem Nachfolger von Erfolg gekrönt.

Wir danken Herrn Steinegger herzlich für seinen wertvollen Beitrag für den Physikunterricht und für die jahrzehntelange Treue als Inserent und wünschen ihm für seinen wohlverdienten Ruhestand:

Alles Gute, Herr Walther Steinegger!

In dieser Ausgabe – Dans ce numéro

VSMP	4
Editorial – Éditorial – Editoriale	4
SVIA et SSPMP Mathématiques, physique et informatique au gymnase	7
SVIA und VSMP Mathematik, Physik und Informatik am Gymnasium	9
Matthias C. Gubler, Atelier typosalon Wie aus einem Dreieck, einem Quadrat und einem Kreis das neue Logo des VSMP entstand	11
Commission Romande de Mathématiques	13
Nicolas Louvet Les Appuis en Mathématiques au Gymnase Français de Bienne	13
José Luis Zuleta, Arno Gropengiesser Eadem mutata resurgo – L’héritage des Bernoulli	18
Commissione di Matematica della Svizzera Italiana	19
Maurice Froidcoeur, Andrea Pellegrinelli, Philip Hubert Poker AKQ	19
Deutschschweizerische Mathematikkommission	23
Das neue Geometrielehrmittel der DMK	23
Peter Gallin Rundfahrt mit dem Fahrrad bei Wind	24
Urs Kirchgraber Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing 2C	31
H.R. Schneebeli <i>Rezensión:</i> EAGLE-Malbuch, Zöpfe – Zerlegungen – Zehnecke	36
Marc von Wattenwyl Anregungen zur Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung	37

Commission Romande de Physique	43
Didier Roulet	
Congrès UdPPC Dijon	43
Deutschschweizerische Physikkommission	44
Martin Lieberherr	
Dichteste Spaghettipackung	44
<i>Kurs: Wissenschaftliches Visualisieren</i>	46

Internet-Adressen — *Adresses Internet*
www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — *Page de Titre*
Neues Logo des VSMP (Artikel ab Seite 11 in dieser Ausgabe)

Editorial

Liebe Mitglieder des VSMP,

das vergangene Kalenderjahr hat für den Vorstand, nebst den üblichen Geschäften, ein paar wichtige Herausforderungen gebracht, über die ich hier gerne kurz berichten möchte.

1.

Unser Verein war über Jahre durch das altbekannte Logo zu erkennen, während die Kommissionen sich durch ein eigenes kennzeichneten. Um sich dem Lauf der Zeit und den Gegebenheiten des digitalen Zeitalters anzupassen, aber auch um einer Harmonisierung der verschiedenen Logos anzustreben, wurde ein Graphiker damit beauftragt, ein neues zu gestalten. In dieser Ausgabe des Bulletin wird es offiziell eingeführt und wird schrittweise die alten ab diesem Jahr ersetzen. Auf Seite 11 erläutert der Graphiker Entstehung und Bedeutung des neuen Logos.

2.

Das Fortschreiten des digitalen Zeitalters macht auch vor dem Gymnasium nicht Halt. Immer lauter wird der Ruf, Informatik als obligatorisches Grundlagenfach einzuführen. Der VSMP hat daher, zusammen mit dem Schweizerischen Verein für Informatik in der Ausbildung SVIA (wie der VSMP Fachverband des VSG) eine Arbeitsgruppe ins Leben gerufen, um ein gemeinsames Positionspapier zu erarbeiten. Das auf Seite 9 abgedruckte Dokument wurde sehr breit gestreut und hebt hervor, dass die drei Fächer Mathematik, Physik und Informatik unterschiedliche, aber auch ergänzende und sich gegenseitig stärkende Fähigkeiten vermitteln; eine Einführung des neuen Faches auf Kosten der Mathematik oder der Physik wäre somit kontraproduktiv. Wir hoffen, mit diesem Dokument einen konstruktiven Diskussions-Beitrag zur Stärkung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer am Gymnasium zu leisten.

3.

Es ist sicher allgemein bekannt, dass die Plenarver-

Éditorial

Chères et chers membres de la SSPMP,

l'année qui s'est conclue a apporté au comité, parallèlement aux affaires habituelles, plusieurs défis importants que je rapporte brièvement ici.

1.

Pendant des années notre société était reconnaissable par son logo, alors que les commissions se distinguaient par leur propre sigle. Pour s'adapter à l'époque et à ses contraintes digitales, ainsi que pour harmoniser les différents logos, le Comité a chargé un graphiste d'en créer un nouveau. Il est officiellement introduit dans cette édition du Bulletin et se substituera progressivement aux anciens. À la page 12 son auteur raconte sa naissance et explique sa signification.

2.

La progression du numérique ne s'arrête pas aux portes des gymnases. Les voix qui demandent l'introduction de l'informatique comme branche fondamentale obligatoire deviennent de plus en plus insistantes. La SSPMP a constitué un groupe de travail avec la Société Suisse de l'Informatique dans l'Enseignement SSIE (Société de branche de la SSPES, comme la SSPMP) pour élaborer une prise de position commune. Il en résulte un document, publié à la page 7, qui a été envoyé à tous les cercles concernés par la politique scolaire. Il souligne que les trois branches, mathématiques, physique et informatique transmettent des savoirs différents, mais complémentaires - et que l'introduction de la nouvelle branche aux dépens de la dotation horaire des mathématiques et de la physique serait extrêmement contreproductive. Nous espérons, avec ce document, avoir stimulé une discussion constructive à propos du renforcement des branches des sciences exactes et expérimentales dans la formation gymnasiale.

3.

L'Assemblée plénière de la CDIP a émis, le 17 mars 2016, des recommandations pour garantir aux ti-

sammlung der EDK am 17. März 2016 Empfehlungen zur langfristigen Sicherung des prüfungsfreien Hochschulzugangs mit der gymnasialen Maturität verabschiedet hat. Die im Rahmen des Teilprojekts 1 der EDK (Bericht Eberle) erarbeiteten Basalen fachlichen Kompetenzen für allgemeine Studierfähigkeit in Mathematik und Erstsprache wurden in einem Anhang in den Rahmenlehrplan für Maturitätsschulen aufgenommen. Der VSMP hat sich, zusammen mit dem VSG, kritisch zu diesem Vorgehen in der „Anhörung“ geäußert. Der Vorstand ist nach wie vor der Auffassung, dass der Kanon-Mathematik (<http://www.math.ch/kanon/>), an welchem die CMSI, die CRM und die DMK aktiv beteiligt waren, ein besseres Instrument ist zur Sicherstellung der allgemeinen Studierfähigkeit der Maturandinnen und Maturanden. Da die Umsetzung der ‚basalen‘ Empfehlungen an die Kantone delegiert worden ist, wird der VSMP die Implementierung aufmerksam verfolgen und gegebenenfalls Stellung nehmen.

4.

Ab 1. Januar 2017 wird die schweizerische Weiterbildungszentrale WBZ nach 47 Jahren mit neuem Namen (Schweizerische Zentrum für die Mittelschule ZEM) und einem neuen Auftrag tätig sein. Der Vorstand, zusammen mit dem VSG, wird mit wachem Auge die Entwicklung im Bereich der Organisation von Weiterbildungsangeboten verfolgen.

Auch im Namen des VSMP-Vorstandes wünsche ich ein gutes, erfolgreiches und bereicherndes neues Jahr.

Locarno, Ende Dezember 2016

Arno Gropengiesser, Präsident

tulaires d'une maturité gymnasiale l'accès sans examen aux hautes écoles. Les compétences de base en mathématiques et en langue première, élaborées dans le cadre du sous-projet 1 de la CDIP (Rapport Eberle), ont été transposées dans une annexe du Plan d'études cadre pour les écoles de maturité. La SSPMP, conjointement à la SSPES, avait formulé des critiques au sous-projet 1. Le comité est toujours d'avis que le catalogue de connaissances fondamentales en mathématiques (voir <http://www.math.ch/kanon/>), auquel la CMSI, la CRM et la DMK ont contribué activement, constitue un instrument plus adéquat dans le but d'assurer les aptitudes générales nécessaires pour effectuer des études supérieures. La mise en œuvre des recommandations est déléguée aux cantons ; la SSPMP suivra avec une grande attention son évolution et le comité se réserve le droit de prendre position si nécessaire.

4.

À partir du 1er janvier 2017, et après 47 ans, le Centre suisse de formation continue CPS change son nom et devient le Centre suisse de l'enseignement secondaire II (CES). Le mandat du CES sera différent de celui de l'ancien CPS. Les comités de la SSPES ainsi que de la SSPMP suivront attentivement l'évolution dans le domaine de l'organisation des cours de formation continue.

Je vous souhaite, au nom du comité de la SSPMP aussi, à toutes et à tous une bonne nouvelle année, riche en satisfactions.

Locarno, fin de décembre 2016

Arno Gropengiesser, président

Editoriale

Care e cari membri della SSIMF,

l'anno appena trascorso ha comportato per il comitato, accanto agli abituali impegni, alcune sfide di cui riferisco brevemente qui di seguito.

1.

La nostra società è riconoscibile, ormai da anni, attraverso un suo logo mentre le commissioni si presentavano con il proprio. Per adattarsi all'evoluzione e alle esigenze dell'era digitale, ma pure per uniformarli coerentemente, un grafico è stato incaricato di proporre uno nuovo. In questo numero del Bulletin viene ufficialmente introdotto e progressivamente sostituirà i vecchi. A pagina 12 il suo ideatore ne illustra la nascita e il significato.

2.

La progressiva digitalizzazione non s'arresta davanti alle porte delle scuole liceali. Le voci che chiedono l'introduzione dell'informatica come disciplina fondamentale obbligatoria diventano sempre più insistenti. La SSIMF ha costituito un gruppo di lavoro insieme alla Società Svizzera per l'Informatica nell'Insegnamento SSII (Società affiliata alla SSISS, come la SSIMF) per elaborare una presa di posizione comune. Il documento che ne è scaturito appare a pagina 7 ed è stato inviato ad ampie cerchie interessate. In esso si sottolinea che le discipline matematica, fisica e informatica trasmettono delle abilità e delle conoscenze differenti - ma complementari - e che l'introduzione della nuova disciplina a scapito della dotazione oraria della matematica e della fisica sarebbe assolutamente controproducente. Speriamo d'aver stimolato con questo documento una discussione costruttiva sul tema del rafforzamento dell'insegnamento delle scienze esatte e sperimentali nella formazione liceale.

3.

L'Assemblea plenaria della CDPE ha emesso, il 17 marzo 2016, delle raccomandazioni per garantire ai possessori di una maturità liceale l'accesso senza esami alle alte scuole. Le competenze di base in matematica e nella prima lingua, elaborate nell'ambito

del sotto-progetto 1 della CDPE (Rapporto Eberle), sono state recepite in un'appendice al Piano quadro degli studi per le scuole di maturità. La SSIMF aveva, unitamente alla SSISS, formulato delle puntuali critiche a tale progetto. Il comitato ritiene tuttora che il catalogo delle conoscenze fondamentali in matematica (<http://www.math.ch/kanon/>), al quale la CMSI, la CRM e la DMK hanno contribuito attivamente, rappresenti uno strumento più adeguato per assicurare l'idoneità generale necessaria per affrontare degli studi superiori. L'attuazione delle raccomandazioni è stata affidata ai singoli cantoni; la SSIMF seguirà con attenzione lo sviluppo dell'implementazione e si riserva di prendere posizione in merito, se necessario.

4.

A partire dal 1° gennaio 2017 e dopo 47 anni il Centro svizzero di formazione continua CPS cambia nome e diventa Centro svizzero dell'insegnamento secondario II (CIS). Il mandato ha pure subito dei cambiamenti; i comitati della SSIMF e della SSISS seguiranno con attenzione l'evoluzione nell'ambito dell'organizzazione dei corsi di formazione continua.

Anche a nome del comitato della SSIMF, auguro a tutti un nuovo anno ricco di soddisfazioni.

Locarno, fine di dicembre 2016

Arno Gropengiesser, presidente

Mathématiques, physique et informatique au gymnase

Position de la SSIE (Société Suisse de l'Informatique dans l'Enseignement) et de la SSPMP (Société Suisse des Professeurs de Mathématiques et de Physique).

Christian Datzko, Arno Gropengiesser, Jean-Marc Ledermann, Andrea Leu, Peter Skrotzky, Hansjürg Stocker et Martina Vazquez, représentant-e-s SSPMP et SSIE.

L'informatique en tant que discipline fondamentale

Au cours des dernières décennies, notre monde a profondément changé du fait de l'avancée de la numérisation dans de nombreux domaines – une tendance qui ne semble pas devoir s'inverser. Les générations futures seront elles aussi confrontées au quotidien à l'informatique et à ses diverses applications. Il suffit pour s'en convaincre de mentionner l'e-banking, les systèmes de navigation, le radar météorologique, les codes-barres et les codes QR (Quick Response), le GPS, l'approvisionnement énergétique ou encore la régulation du trafic. Afin que nous puissions, aujourd'hui et à l'avenir, agir de manière autonome et réfléchie, il est important – pour ne pas dire indispensable – d'introduire dans les gymnases l'informatique en tant que discipline fondamentale obligatoire, comptant pour la promotion.

Les rapports entre les mathématiques, la physique et l'informatique

En tant que disciplines scolaires, les mathématiques, la physique et l'informatique partagent des racines communes et poursuivent des objectifs similaires. Elles profitent les unes des autres et se complètent. Ces trois disciplines recourent à la pensée abstraite et utilisent systématiquement un langage formel. Elles font de plus appel à des processus formels abstraits, basés sur un raisonnement algorithmique, et offrent donc un terrain d'entraînement à l'analyse systématique de problèmes, au développement de stratégies et à l'évaluation critique des solutions.

A côté de ces similarités, ces trois disciplines constituent trois sciences indépendantes, caractérisées par des modes de questionnement, une systématique et une méthode spécifiques. Alors que la physique s'occupe en priorité du monde réel, les mathématiques ont pour objet le monde abstrait et l'informatique le monde virtuel, toujours plus présent. Par conséquent, ces trois disciplines doivent chacune occuper une place indépendante dans le gymnase d'aujourd'hui.

Renforcement des sciences naturelles et des sciences exactes

L'introduction de l'informatique en tant que discipline fondamentale ne doit pas se faire aux dépens de la dotation horaire des mathématiques et de la physique, mais constituer un développement ainsi qu'un renforcement des sciences naturelles et des sciences exactes. La discipline fondamentale Informatique se distingue de l'enseignement de compétences liées aux ordinateurs. Condition préalable à des études gymnasiales, l'utilisation de programmes d'application (programmes d'écriture, tableurs, PowerPoint, ...) doit être enseignée au niveau secondaire I.

L'option complémentaire Informatique existante constitue une importante possibilité d'approfondissement pour les élèves intéressé-e-s par l'informatique, mais ne peut en aucun cas se substituer à la discipline fondamentale Informatique.

Des enseignant-e-s d'informatique pour enseigner l'informatique

En tant que discipline fondamentale, l'informatique est enseignée par des professeurs titulaires d'un diplôme universitaire en informatique et au bénéfice d'une formation didactique complémentaire dans cette matière.

Mathematik, Physik und Informatik am Gymnasium

Positionspapier des SVIA (Schweizerischer Verein für Informatik in der Ausbildung) und des VSMP (Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte).

Christian Datzko, Arno Gropengiesser, Jean-Marc Ledermann, Andrea Leu, Peter Skrotzky, Hansjürg Stocker und Martina Vazquez als Vertreterinnen und Vertreter des VSMP sowie des SVIA.

Informatik als Grundlagenfach

In den letzten Jahrzehnten hat sich unsere Welt durch die zunehmende Digitalisierung in vielen Lebensbereichen verändert – und eine Änderung dieser Tendenz ist nicht absehbar. Auch die zukünftigen Generationen werden mit der Informatik und deren vielseitigen Anwendungen im Alltag konfrontiert sein. Als illustrative Stichworte dazu mögen E-Banking, Auto-Navi, Wetter-Radar, Strich- & QR-Code (Quick Response), GPS, Energieversorgung und Verkehrsregelung genügen. Damit wir in der heutigen und zukünftigen Welt selbstbestimmt und reflektiert handeln können, ist es wichtig, ja unumgänglich, an den Gymnasien ein obligatorisches und promotionsrelevantes Grundlagenfach Informatik einzuführen.

Mathematik, Physik und Informatik im Verhältnis

Mathematik, Physik und Informatik als Schulfächer haben gemeinsame Wurzeln und ähnliche Zielsetzungen. Sie profitieren voneinander und ergänzen sich. Die drei Fächer denken in abstrakten Systemen und nutzen konsequent formale Sprachen. Zudem bauen sie auf formellen abstrakten Abläufen auf, denen ein algorithmisches Denken zugrunde liegt. Sie bieten darüber hinaus ein Trainingsfeld für eine systematische Problemanalyse, das Entwickeln von Lösungsstrategien und das kritische Evaluieren von Lösungen.

Neben allen Gemeinsamkeiten präsentieren die genannten Fächer drei eigenständige Wissenschaften mit jeweils spezifischen Fragestellungen sowie einer eigenen Fachsystematik und Fachmethodik. Die Physik beschäftigt sich im Kern mit der realen, die Mathematik mit der abstrakten und die Informatik mit der immer präsenteren virtuellen Welt. Daher müssen alle drei Fächer im heutigen Gymnasium ihren eigenständigen Platz haben.

Stärkung der Naturwissenschaften und der exakten Wissenschaften

Die Einführung des Grundlagenfachs Informatik darf die Stundendotationen von Mathematik und Physik nicht tangieren, sondern bedeutet einen Ausbau und eine Stärkung der Fächer in den Natur- und exakten Wissenschaften. Das Grundlagenfach Informatik muss sich von den anderen, mit dem Computer verbundenen Kompetenzen abgrenzen. Das Bedienen von Anwendungsprogrammen (Schreibprogramme, Tabellenkalkulation, Powerpoint, ...) ist eine Grundlage für den gymnasialen Unterricht, die in der Sekundarstufe I gelegt werden muss.

Das bereits bestehende Ergänzungsfach Informatik ist als Pflichtwahlfach eine wichtige Vertiefungsmöglichkeit für an Informatik interessierte Schülerinnen und Schüler, kann aber das Grundlagenfach Informatik nicht ersetzen.

Informatiklehrpersonen unterrichten Informatik

Das Grundlagenfach Informatik wird von Lehrpersonen unterrichtet, die über ein universitäres Informatikstudium mit zusätzlicher fachdidaktischer Ausbildung in Informatik verfügen.

Links und Literatur – Sources et références

Helmar Burkhart, Lukas Fässler, Werner Hartmann, Hans Hinterberger, Beate Kuhn: „*Informatische Kompetenzen für ein erfolgreiches Hochschulstudium*“. 2014. URL: <http://svia-ssii.ch/wp-content/uploads/2013/12/SIK-Kompetenzpapier-Langfassung.pdf>.

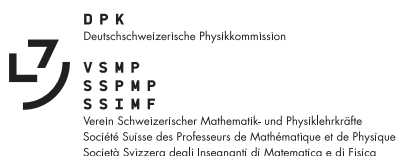
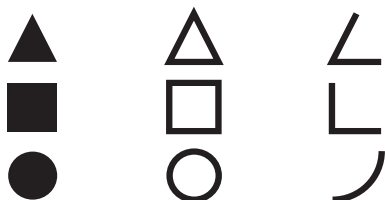
Martin Guggisberg, Christian Datzko: „Vorschlag zur Ausgestaltung der Algorithmik im gymnasialen Mathematikunterricht“. 2012. URL: https://christian.datzko.ch/lib/exe/fetch.php?media=mathematik:didaktik:vorschlag_zur_algorithmik.pdf.

Jürg Kohlas, Jürg Schmid, Carl August Zehnder (Hrsg.): „*informatik@gymnasium - Ein Entwurf für die Schweiz*“. 2013. URL: http://www.fit-in-it.ch/sites/default/files/downloads/informatik_d.pdf.

Verein Schweizer Mathematik- und Physiklehrkräfte (VSMP). URL: <http://www.vsmg.ch/>.

Schweizerischer Verein für Informatik in der Ausbildung (SVIA). URL: <http://www.svia-ssii.ch/>.

Wie aus einem Dreieck, einem Quadrat und einem Kreis das neue Logo des VSMP entstand



Bei der Entwicklung des neuen Logos für den «Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte» bediente sich der Grafiker und Typograf Matthias C. Gubler der geometrischen Grundformen «Dreieck, Quadrat und Kreis». Diese Basisformen sind Grundlage jeder Gestaltung. Zeichnet man nur die Kontur der drei Grundformen und entfernt in einem weiteren Schritt einzelne «Strecken» – ohne die Erkennbarkeit der Ursprungsform zu gefährden – wecken diese Linien Assoziationen von Winkel und Radius. So entstanden die drei Grundelemente für den Entwurf des neuen Signets.

Beginnt man nun mit Abbildungsstab, Rotation und Linienstärke der einzelnen Elemente zu arbeiten und stellt diese gezielt zueinander, erhält das Signet seinen Charakter. Die einzelnen Elemente entwickeln untereinander Spannungsfelder ohne sich zu konkurrenzieren. Beim fertigen Signet herrscht unter den drei Elementen eine demokratische Gleichstellung vor, vergleichbar mit einer mathematischen Gleichung. Jedes Element hat seine Berechtigung und Notwendigkeit in der Gesamtkomposition. Es verkörpert in abstrakter Form die Gefässe Mathematik und Physik des Vereins in allen drei Landesteilen.

Das Signet wird durch das Platzieren von Typografie – die Abkürzungen des Vereins in den drei Landessprachen – zum Logo. Die Abkürzungen sind als Monotype-Schrift in Versalbuchstaben streng im quadratischen Raster gesetzt. Die Oberlängenhöhe der ersten Schriftzeile steht im Fluchtpunkt zum Start des Viertelkreises und die Grundlinie der letzten deckt sich mit dem Ende. Die Typografie verleiht dem Signet Halt und Stärke ohne es in seiner Erscheinung zu tangieren. So besteht die Möglichkeit, die ausgeschriebenen Namen unterhalb der Abkürzungen zu platzieren sowie einer der fünf Kommissionen als «Kopfzeile» Platz einzuräumen, um den hohen Anforderungen der fünf Kommissionen in drei Sprachen gerecht zu werden.

Matthias C. Gubler, Atelier typosalon

... in Zürich geboren, in der Innerschweiz aufgewachsen, seit zehn Jahren lebt und arbeitet er als selbstständiger Gestalter in Zürich und unterhält zusammen mit Christof Nüssli das Gestaltungskollektiv typosalon. Das Spannungsfeld seiner Arbeiten und Aktivitäten bewegt sich vom klassischen Medium des Plakates bis hin zu experimentell animierter Typografie. Die stete Auseinandersetzung mit Form, Farbe, Raum & Zeit ist für ihn ein Muss und prägt sein Schaffen. Kompromisslos spürbar in seinem Wirken ist der Austausch, die Konfrontation wie aber auch seine persönliche Haltung mit dem Umgang von Aufgabe und Fragestellung. Seine typografische Arbeit im Plakatschaffen wurde national und international mehrfach ausgezeichnet und ausgestellt.

www.typosalon.ch | www.thisisthis.ch

Français

Un triangle, un carré et un cercle – naissance du nouveau logo SSPMP

Pour concevoir le nouveau logo de la Société Suisse des Professeurs de Mathématiques et de Physique SSPMP, le graphiste et typographe Matthias C. Gubler s'est servi des formes géométriques de base, à savoir le triangle, le carré et le cercle. Utilisant uniquement les contours de ces formes et éliminant certaines parties de leur périmètre – sans pour autant dénaturer la forme originale –, il a éveillé des associations d'angles et de rayons. C'est ainsi qu'est né le nouveau logo.

Le graphiste a commencé par travailler la représentation, la rotation et l'épaisseur des contours des trois formes géométriques, orientant celles-ci de manière ciblée pour conférer au logo un caractère propre. Au final, les différents éléments se profilent clairement, sans toutefois se concurrencer. Les trois figures sont en parfait équilibre, et l'ensemble est comparable à une équation mathématique dans laquelle chaque élément trouve sa place et contribue à la composition globale. Le logo symbolise dans le même temps la présence de la Société – et donc des mathématiques et de la physique – dans les trois régions du pays.

Le logo est complété par le sigle de la Société, dans les trois langues nationales. Les acronymes sont en caractères majuscules «monotype». Le haut de la première ligne concorde avec celui du quart de cercle, les bases reposent sur une ligne droite. En parfaite adéquation avec les formes géométriques, la typographie confère au logo toute sa force, et l'ensemble dégage une impression de stabilité. Il sera possible de placer le nom complet de la Société au-dessous des acronymes et de mettre en titre le nom de l'une des cinq commissions, et ce dans les trois langues nationales.

Matthias C. Gubler, atelier typosalon

Né à Zurich, le typographe a grandi en Suisse centrale. Il vit et travaille depuis dix ans à Zurich en tant que graphiste, et dirige avec Christoph Nüssli le collectif de conception graphique typosalon. Ses travaux vont de l'affiche classique à la typographie animée expérimentale. Une réflexion permanente sur la forme, la couleur, l'espace et au temps anime toutes ses recherches et créations. Celles-ci reflètent systématiquement l'échange, la confrontation, mais également une vision personnelle de la fonction de l'objet. En matière d'affiches, le travail typographique de Matthias C. Gubler a été primé et exposé à maintes reprises, autant en Suisse qu'à l'étranger.

www.typosalon.ch | www.thisisthis.ch

Italiano

Come da un triangolo, un quadrato e un cerchio è nato il nuovo logo della SSIMF

Per realizzare il nuovo logo della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica SSIMF Matthias C. Gubler, grafico e tipografo, s'è servito delle forme geometriche di base: il triangolo, il quadrato e il cerchio. Utilizzando soltanto i contorni di queste figure ed eliminando alcune loro parti senza snaturarne la forma originale, ha richiamato associazioni di angoli e di raggi ... e così è nata l'idea del nuovo logo.

Il grafico ha iniziato ad elaborare le proporzioni, l'orientamento e lo spessore dei contorni delle tre forme geometriche, disponendole in maniera mirata per conferire al logo un proprio carattere. Alla fine, i diversi elementi si profilano chiaramente, senza tuttavia prevalere uno sull'altro. Le tre figure sono in perfetto equilibrio e l'insieme è paragonabile ad un'equazione matematica nella quale ogni elemento trova il suo posto e contribuisce all'intera composizione. Il logo simboleggia astrattamente la presenza simultanea della Società – e quindi della matematica e della fisica – nelle tre regioni linguistiche della Svizzera.

Il logo è completato con le sigle della Società nelle tre lingue nazionali scritte in caratteri "monotype" maiuscoli. Il bordo superiore della prima sigla concorda con quello del quarto di cerchio e la linea di base del logo è sulla sua tangente. La scelta tipografica conferisce alla sigla stabilità e forza, in perfetta armonia con le forme geometriche. In questo modo diventa possibile inserire il nome completo della Società sotto le sigle e aggiungere come intestazione il nome di una Commissione nella lingua nazionale corrispondente, rispondendo così ad un'esigenza delle Commissioni stesse.

Matthias C. Gubler, atelier typosalon

Nato a Zurigo, è cresciuto nella Svizzera centrale. Vive e lavora da dieci anni a Zurigo come grafico indipendente e dirige, assieme a Christoph Nüssli, il collettivo di concezione grafica typosalon. I suoi lavori spaziano dal classico cartellone alla tipografia animata sperimentale. Una riflessione permanente sulle forme, il colore, lo spazio e il tempo anima le sue ricerche e creazioni. Esse riflettono sistematicamente il cambiamento e il confronto, come pure la sua visione personale della funzione dell'oggetto. Nell'ambito della cartellonistica, le opere tipografiche di Matthias C. Gubler sono state a più riprese esposte e premiate a livello nazionale e internazionale.

www.typosalon.ch | www.thisisthis.ch

Les Appuis en Mathématiques au Gymnase Français de Bienne

Nicolas Louvet, Gymnase Français de Bienne, nicolas.louvet@gfbienne.ch

En mars 2016, la CDIP rend publiques ses décisions concernant la mise en oeuvre de «Compétences de base» en mathématiques et langue première constitutives de l'aptitude générale aux études supérieures» sous la forme d'une annexe au plan d'étude cadre. Si le document se prononce sur les «exigences mathématiques de base» ainsi que sur les «thèmes mathématiques de base», la mise en pratique de dispositifs permettant aux élèves d'acquérir ces compétences est toutefois laissée à l'appréciation des cantons et des établissements.

Face à cette nouvelle mission, les enseignants de mathématiques des gymnases ont certainement de quoi s'interroger. Le dispositif des «appuis en mathématiques» qui existe au Gymnase Français de Bienne depuis plusieurs années pourra sans doute fournir quelques pistes de réflexion.

Genèse

À partir de 2010, l'idée d'édifier un socle de «compétences de base» en mathématiques est évoquée à divers niveaux (écoles, cantons, confédération) comme une possibilité de garantir à long terme un accès sans examen aux hautes écoles. Le collège de mathématiques du Gymnase Français de Bienne est alors régulièrement interpellé par ces questions. En parallèle, nous prenons conscience que certaines faiblesses persistent au cours de la scolarité de nos élèves. Nous tentons d'en dresser une liste et de formuler des hypothèses quant à leurs origines. Cette réflexion nous amène à poser la problématique qu'on pourrait résumer de la façon suivante : *les difficultés de lecture et d'écriture algébrique sont une des raisons qui handicapent les élèves dans l'apprentissage des contenus de notre plan d'étude*. Pour remédier à cette situation, nous proposons de mettre en place le dispositif d'appuis en mathématiques (APM) décrit ci-dessous. L'école nous en confie le mandat et la direction nous en accorde les moyens : projet pédagogique rémunéré, leçons d'appuis en marge de la grille horaire, soutien logistique de l'administration.

Un dispositif modulaire centré sur l'algèbre

Les APM prennent alors la forme de quatre modules semestriels. Chaque module est dispensé par un enseignant à raison de 60 minutes hebdomadaires. Les plages horaires de ces leçons d'appuis sont choisies à des moments de la semaine sans enseignement régulier durant lesquels tous les élèves de l'école sont disponibles.

Pour ces leçons, les groupes sont constitués de 10 à 15 élèves issus de classes différentes. Cela représente environ 20% de nos élèves pour le premier module. Les effectifs des élèves fréquentant les APM diminuent ensuite, passant de 10% pour les modules 2 et 3 à 5% pour le quatrième module.

La disponibilité de l'enseignant, essentielle au bon fonctionnement des ateliers, est garantie par la petite taille des groupes. L'expérience montre que dès que l'effectif approche une quinzaine d'élèves, il devient difficile d'assurer convenablement le suivi de chacun.

Les modules contiennent divers ateliers thématiques conçus en amont, encadrés par un enseignant, qui proposent des activités de différents types et des résumés théoriques. Les élèves, seuls ou en petits groupes, passent plus ou moins de temps sur chaque atelier, selon leurs besoins. L'idée est que l'élève se sente responsable de l'identification de ses difficultés et de la planification de son travail et qu'il puisse gérer son avancement de façon relativement autonome.

Répartition des modules

Semestre 1	Semestre 2	Semestre 3	Semestre 4	Semestre 5	Semestre 6
	Module 1	Module 2	Module 3	Module 4	
	Calcul algébrique	Fractions	Fonctions	Equations (modélisation)	

Le choix des thèmes abordés dans les leçons d'appuis est volontairement en décalage avec le plan de progression pratiqué pour l'enseignement régulier des mathématiques, ceci afin d'éviter de fournir des cours de soutien ou des séances de devoirs surveillés fréquentés par les élèves soucieux d'améliorer leurs performances pour le prochain test de mathématique.

Des approches variées

Sans prétendre faire preuve d'une grande originalité pédagogique dans la préparation des modules d'appuis en mathématiques, nous y abordons les thèmes traditionnels de l'algèbre avec des approches différentes des leçons classiques de discipline fondamentale.

Conscients que les élèves qui fréquentent les APM ne sont pas tous naturellement passionnés par les mathématiques, voire qu'une majorité d'entre eux a déjà une histoire difficile avec cette discipline, notre premier souci était de retrouver les élèves sur des idées suffisamment élémentaires pour que «ça marche» encore pour eux. C'est paradoxalement la source d'un de leur reproche récurrent : «Ça, on sait le faire. Pourquoi revenir là-dessus?».

Pour éviter de mettre l'élève en difficulté parce qu'il ne sait pas *comment* écrire ce qu'il observe, nous lui soumettons des exercices comme celui de ce premier exemple. Face à une telle consigne, l'élève a naturellement des idées à proposer.

Exemple 1 : Observer

Exercice
Souligner d'une même couleur les expressions équivalentes

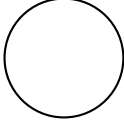
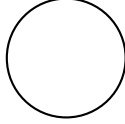
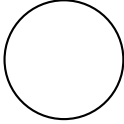
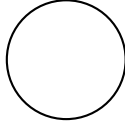
(a) $\frac{1}{5}$ 0,5 $\frac{1}{2}$ 0,2 $\frac{2}{10}$ $\frac{5}{10}$	(b) $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{3}{12}$ $3 \cdot \frac{1}{4}$ $2 \cdot \frac{3}{4}$ $3 \cdot \frac{1}{12}$	(c) $\frac{5x}{7}$ $5 \cdot \frac{3x}{7}$ $\frac{15x}{21}$ $3 \cdot \frac{5x}{7}$ $\frac{20x}{28}$ $\frac{15x}{7}$	(d) $\frac{7xy^2}{x^3y}$ $\frac{7xy}{x^2y}$ $\frac{7x}{y}$ $7 \cdot \frac{y}{x}$ $\frac{21x^2y}{3x^4}$ $\frac{y^2}{7x}$
--	--	---	--

Dans ces ateliers, il s'agit aussi de re-donner du sens à des règles ou des opérations que l'élève connaît pour des raisons légales (par exemple, «pour comparer deux fractions on *doit* les écrire avec le même dénominateur»), mais applique sans discernement. Nous encouragerons alors l'élève à se créer des images mentales associées au calcul algébrique.

Exemple 2 : Illustrer

Exercice

Répondre aux questions. Donner un argument géométrique et un argument algébrique.

Alice mange $\frac{1}{2}$ pizza	Bernard mange $\frac{2}{5}$ pizza	Qui en mange le plus ?
		
Alice mange $\frac{3}{4}$ pizza	Bernard mange $\frac{4}{5}$ pizza	Qui en mange le plus ?
		

Sur ces deux points les appréciations des élèves sont plutôt positives. Enfin, même si ce n'est pas le premier objectif, les ateliers proposent des exercices d'entraînement pour consolider les acquis dans l'espoir que l'élève puisse les utiliser de manière adaptée dans d'autres circonstances.

Exemple 3 : consolider

Exercice

Effectuer et simplifier

$$(a) \quad \frac{\left(\frac{x^2 - 9}{x + 2}\right)}{x - 3} \quad (b) \quad \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{x - 2}\right) \cdot \frac{1}{2x - 1} \quad (c) \quad \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}\right) \cdot \left(\frac{x + 2}{x^2 - 4}\right)$$

Des observations précieuses

Une question essentielle autour de ce dispositif est de déterminer quel élève peut (ou doit) bénéficier des appuis en mathématiques. Nous avons postulé que les personnes les mieux placées pour déceler les lacunes de base chez nos élèves sont les enseignants de mathématiques. Ceux-ci côtoient leurs élèves quotidiennement, peuvent observer leur travail en classe, leurs productions lors de devoirs formatifs ou d'évaluations écrites. À partir de ces éléments, l'enseignant va proposer à ceux de ses élèves qu'il pense concernés de rejoindre le prochain module d'APM. Cela provoque en général une discussion avec l'élève autour des enjeux, ce qui constitue un des points le plus intéressant du dispositif. La décision est prise ensuite en concertation avec l'élève.

On imagine sans peine que la fréquentation des cours d'appuis est corrélée aux notes de mathématiques. Ce n'est pourtant pas le premier critère de sélection aux APM. D'abord, les enjeux sont différents : une moyenne insuffisante dans une discipline n'empêche pas d'obtenir un certificat de maturité mais des lacunes basiques en mathématiques peuvent prêter à la réussite des études supérieures. Ensuite, la note obtenue par un élève mesure bien d'autres choses que ses compétences de base (par exemple, un manque de préparation pour l'évaluation ou une mauvaise compréhension d'une notion en cours d'acquisition).

Cette question de la sélection est posée chaque semestre et les besoins d'un élève régulièrement réévalués. Ainsi, un élève peut entrer ou sortir du dispositif au début ou à la fin de chaque module.

Il n'y a donc aucun outil centralisé (du type batterie de tests en ligne ou en classe) qui mesurerait, à un instant donné, quels élèves ont acquis quelles compétences. Le système fonctionne sur la base des observations des enseignants et de la relation pédagogique. Ceci n'empêche pas de réaliser en classe des petits tests diagnostiques spécifiques qui permettent de faire le point et d'entamer le dialogue avec l'élève sur une base concrète.

Un succès mitigé

La majorité des élèves qui fréquentent nos cours d'appuis subit déjà les leçons obligatoires de mathématiques comme une corvée : il est clairement difficile de les convaincre de s'astreindre à une leçon hebdomadaire supplémentaire de mathématiques et de s'y engager pour un semestre.

Nous leur proposons un travail de fond et à long terme dont peu d'élèves sont en mesure de saisir les enjeux en l'absence d'effet immédiat sur leur moyenne de mathématiques.

Les élèves qui fréquentent les APM souhaiteraient voir se concrétiser leur investissement à court terme. C'est parfois le cas, mais il arrive que les effets bénéfiques de ce travail supplémentaire n'apparaissent qu'un ou deux ans plus tard, voire lorsque les élèves ont quitté l'école. Nous observons parfois des améliorations qui concernent l'attitude en classe, la confiance en soi ou des erreurs qui ne sont plus commises sans que la note de mathématiques n'ait favorablement évolué pour autant. Ces situations sont sources de frustrations pour les élèves et ils ne manquent pas de nous le faire savoir.

Si nos intentions sont louables mais bien loin des préoccupations de nos élèves cela tend à montrer l'importance de la concertation avec l'élève lors de la discussion initiale, mais aussi plus tard. C'est un sujet sur lequel les élèves reviennent souvent tout au long des modules («qu'est ce que je fais là?, pourquoi on doit faire ça?») et qui nous permet d'insister sur le fait qu'on attend plus d'un bachelier que de simplement remplir les conditions de promotion.

L'évaluation des compétences et la sélection des élèves aux APM reposent essentiellement sur les épaules de l'enseignant de mathématiques. C'est une responsabilité importante qui s'ajoute à ses missions pédagogiques. C'est aussi un levier intéressant dans la relation avec les élèves qui auraient tendance à trop vite «laisser tomber» les mathématiques. En fait, l'effet des APM dépasse de loin le cadre des leçons d'appuis.

Il n'en reste pas moins que les leçons d'APM offrent une véritable opportunité aux élèves d'aborder les mathématiques dans un cadre protégé et à un rythme adapté. Ce travail en profondeur, quasiment individualisé, n'est évidemment pas possible en classe entière. Il ne peut pas vraiment être remplacé par des leçons individuelles privées, qui poursuivent d'autres objectifs, et n'en revêtent pas le caractère institutionnel. En ce sens, les opportunités de remédiation offertes dans le cadre de ces appuis sont uniques, même si tous les élèves n'en retirent pas le profit maximal.

Une réponse à l'annexe au PEC ?

Il ne faut pas perdre de vue que les compétences de base s'acquièrent d'abord et surtout durant l'enseignement des mathématiques comme discipline fondamentale. D'ailleurs, nos plans d'études garantissent que ces thèmes soient traités en bonne place dans notre enseignement. Un dispositif d'appuis existe essentiellement pour permettre à quelques élèves de ne pas se laisser dépasser.

La première idée qui vient à l'esprit, si l'on essaye d'imaginer le dispositif d'APM du Gymnase Français de Bienne comme une mise en oeuvre possible des exigences que posent l'annexe au plan d'étude cadre, est que tous les «thèmes mathématiques de base» listés dans ce document n'apparaissent pas tels quels comme thèmes traités dans nos appuis. On peut clairement faire évoluer le contenu de nos modules afin de mieux les faire coïncider avec les «thèmes de base». Le danger serait de perdre le travail de fond que nous proposons sur la «langue» algébrique. Le gain espéré serait d'être plus proche des préoccupations de nos élèves. C'est une réflexion en cours dans l'école actuellement.

Les appuis en mathématiques constituent un dispositif actif : observation du travail des élèves en amont et en aval, dialogue régulier entre professeurs et élèves, sélection argumentée, travail en présence d'un enseignant. La responsabilité de l'acquisition des compétences de base est partiellement prise en charge par le corps enseignant et pas uniquement dévolue aux élèves.

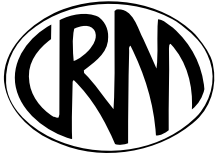
Les modules d'APM apportent des éléments supplémentaires par rapport à l'enseignement des mathématiques comme discipline fondamentale, tant au niveau des contenus que des approches méthodologiques. Ils peuvent sans doute permettre à nos élèves les moins heureux en mathématiques de sortir des impasses dans lesquelles ils se trouvent, voire de leur offrir un peu de plaisir à faire des mathématiques... ce qui serait un succès en soit.

L'existence d'un système positif (il s'agit de résoudre, pas de stigmatiser), dans lequel les enseignants sont fortement engagés, participe à sensibiliser les élèves à l'importance des mathématiques au delà de l'obtention d'une note ou d'un diplôme. Il nous semble que c'est exactement dans ce cadre que s'inscrit l'annexe au PEC visant à garantir un accès sans examen aux hautes écoles.

Une objection courante consiste à remarquer que notre dispositif ne mesure pas que *tous* les élèves sortant du Gymnase aient acquis *toutes* les compétences de base listées dans l'annexe au PEC. Nous sommes convaincus que ce n'est pas dans cet esprit que les compétences de bases ont été envisagées. L'annexe a été conçue comme un des facteurs pouvant influencer une bonne transition entre le gymnase et les hautes écoles universitaires. Cette transition recouvre des réalités bien plus complexes que la mesure de telle ou telle compétence à un instant donné.

Une solution parmi d'autres

Au Gymnase Français de Bienne, nous avons opté pour la solution des appuis en mathématiques décrite ci-dessus car elle nous semble plus constructive que normative. Nous espérons pouvoir la pérenniser en tant que dispositif de mise en oeuvre de l'annexe au plan d'étude cadre, avec l'appui de la direction d'école et des autorités cantonales. Elle ne constitue pas à nos yeux l'unique modèle à suivre. C'est le fruit de réflexions et d'expériences que nous tenons à partager pour nourrir le débat et encourager d'autres établissements à trouver le dispositif qui leur convient le mieux.



Cours de perfectionnement 2016

Eadem mutata resurgo – L'héritage des Bernoulli

Septante-deux enseignants de Suisse romande et du Tessin ont participé au deuxième cours de perfectionnement organisé conjointement par la Commission Romande de Mathématique et la Commissione di Matematica della Svizzera Italiana au Centre des congrès du magique Monte Verità à Ascona entre le 20 et le 23 septembre 2016. Le cours a bénéficié du support logistique du Centre suisse de formation continue des professeurs de l'enseignement secondaire.

Le cours a commencé par un exposé de Gerhard Wanner sur le rôle joué par Johann Bernoulli dans le développement de la mécanique et l'optimisation. Par la suite, Emanuele Delucchi a donné, en italien, une introduction très originale et fort appréciée aux aspects combinatoires dans l'œuvre de Jakob Bernoulli. Le lendemain, Jean-Pierre Gabriel a présenté le travail fondateur de l'épidémiologie mathématique de Daniel Bernoulli sur la variole. Philippe Henry a ensuite discuté l'étude de Johann B. sur les enveloppes et les courbes transcendentes, laissant à G. Wanner le soin de présenter les travaux fondateurs de Johann B. sur la cycloïde. Le troisième jour du cours, Martin Mattmüller a montré le travail précurseur de Jakob B. dans la classification des courbes cubiques et Hans-Christoph Im Hof a tout d'abord présenté la Société Bernoulli-Euler et le Bernoulli-Euler-Zentrum et ensuite a discuté, pas à pas, les calculs qui ont permis à Jakob B. de trouver les propriétés de la *Spira mirabilis*. Le dernier jour du cours a commencé par une présentation de M. Mattmüller sur la naissance difficile de la stochastique et l'origine de l'œuvre *Ars Conjectandi* de Jakob B. et s'est terminé par un exposé de J.-P. Gabriel sur les derniers pas de Jakob B. en théorie des probabilités (la loi des grands nombres).

José Luis Zuleta

Il secondo corso di aggiornamento organizzato congiuntamente dalla Commissione di matematica della Svizzera italiana e dalla Commissione romanda di matematica dal 20 al 23 settembre 2016 nel magico luogo del Monte Verità ha visto la partecipazione di settantadue insegnanti romandi e ticinesi. Il corso ha beneficiato del sostegno logistico del Centro svizzero di formazione continua per insegnanti delle scuole secondarie.

Il corso è stato aperto da una relazione di Gerhard Wanner sul ruolo avuto da Johann Bernoulli nello sviluppo della meccanica e l'ottimizzazione. Nel seguito, Emanuele Delucchi ha presentato, in italiano, un'introduzione molto originale e apprezzata agli aspetti combinatoriali dell'opera di Jakob Bernoulli. Il giorno seguente, Jean-Pierre Gabriel ha poi illustrato il lavoro, fondante, dell'epidemiologia matematica di Daniel Bernoulli sul variolo. Philippe Henry ha poi discusso gli studi di Johann B. sugli involucri e le curve trascendenti, lasciando poi nuovamente a G. Wanner il compito di presentare i fondamentali lavori di Johann B. sulla cicloide. Il terzo giorno del corso, Martin Mattmüller ha mostrato il lavoro precursore di Jakob B. nella classificazione delle curve cubiche e Hans-Christoph Im Hof, dopo aver presentato la Società Bernoulli-Euler e il Bernoulli-Euler-Zentrum, ha discusso, passo per passo, i calcoli che hanno condotto Jakob B. a trovare le proprietà della *Spira mirabilis*. L'ultimo giorno del corso è iniziato con una presentazione di M. Mattmüller sulla difficile nascita della stocastica e la genesi dell'opera *Ars Conjectandi* di Jakob B. e s'è concluso con una relazione di J.-P. Gabriel sugli ultimi passi di Jakob B. nella teoria delle probabilità (la legge dei grandi numeri).

Arno Gropengiesser

POKER AKQ

MAURICE FROIDCOEUR, ANDREA PELLEGRINELLI, PHILIP HUBERT

1. INTRODUZIONE.

J.-P. Delahaye tiene la rubrica *Logique et calcul* nel mensile *Pour la Science*. Presenta temi diversi di matematica, scritti per un largo pubblico, che sovente hanno il pregio di invogliare il lettore un poco più cognito a voler capire qualcosa di più per conto proprio. Nelle mie letture di fine estate mi sono imbattuto nell'articolo intitolato *Comment jouer parfaitement au poker* nel numero 453 della rivista (luglio 2015). Mi ha particolarmente intrigato un riquadro nell'articolo intitolato *La stratégie optimale pour le micro-poker à trois cartes (poker AKQ)*. Mi sono messo allora a fare i calcoli in dettaglio per il valore atteso, appena accennati nel testo, che ho cercato di mettere in forma leggibile.

2. IL GIOCO.

Due giocatori pescano ognuno una carta da un mazzo di 3, composto dall'asso (A), dal re (K) e dalla regina (Q), dopo aver messo ognuno 1 CHF nel piatto. La forza delle carte è quella consueta nel poker: A è la più forte, e Q la più debole.

Una volta pescate le carte il primo giocatore, che chiamiamo L , decide sulla base della carta che ha se ritirarsi dal gioco o se rilanciare di 1 CHF. Se si ritira, il secondo giocatore, che indichiamo con V , vince il piatto e la partita si conclude. Se invece L rilancia, tocca a V decidere sulla base della sua carta se, puntando a sua volta 1 CHF, vedere la carta di L (nel qual caso vince il piatto il giocatore che ha la carta più alta), oppure ritirarsi, lasciando il piatto al giocatore L .

3. PRIME OSSERVAZIONI.

Vi sono solo 6 situazioni di gioco possibili, che possiamo elencare con coppie di lettere, la prima indicante la carta pescata da L e la seconda quella presa da V :

$$AK, \quad AQ, \quad KA, \quad KQ, \quad QA, \quad QK.$$

Ci sono alcune decisioni evidenti:

- se L ha pescato A non esiterà a rilanciare;
- se V ha pescato A certamente vorrà vedere;
- se V ha pescato Q abbandonerà.

4. L PESCA A .

In questo caso certamente L rilancia. Se V ha in mano Q rinuncia subito, quindi L guadagna 1 CHF, mentre se ha K deve decidere cosa fare. Se rilancia, L vince 2 CHF, mentre se non rilancia L vince 1 CHF. Supponiamo che V decida di vedere con probabilità p . Il guadagno atteso di L è quindi $2p + 1(1 - p) = p + 1$.

5. L PESCA K .

Qui ci si può chiedere se L debba sistematicamente rilanciare oppure se debba scegliersi una strategia probabilistica per decidere (ad esempio rilanciando in media una volta su due). Ma considerando che se non rilancia L perde comunque 1 CHF, mentre che se rilancia V vede solo quando ha in mano A , quindi con una probabilità $\frac{1}{2}$. Rilanciando, L ha quindi un valore atteso pari a $1 \cdot \frac{1}{2} + (-2) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, cioè una perdita media di 0,50 CHF. Gli conviene quindi rilanciare sempre. Se gli va bene guadagna 1 CHF, mentre se gli va male perderà 2 CHF.

6. L PESCA Q .

È se, si vuole, la situazione più intrigante per L. Infatti deve decidere se bluffare oppure no. Sia b la probabilità di un bluff da parte di L, quando questi ha pescato una regina. Se V ha in mano l'asso, certamente vorrà vedere. In questo caso L perde 2 CHF. Se V invece ha il re, dovrà a sua volta decidere se vedere o no. Supponiamo che anche qui la decisione di vedere avvenga con probabilità p . Possiamo quindi fare un poco di calcoli sul valore atteso per il giocatore L.

Nella mano QA abbiamo -2 con probabilità b e -1 con probabilità $1 - b$. Il valore atteso è quindi $-2b - 1 \cdot (1 - b) = -b - 1$.

Nella mano QK il calcolo è un poco più complesso. Disegnando l'albero ci si rende subito conto che L perde 2 CHF se entrambi decidono di giocare, quindi con probabilità bp . Se invece L bluffa, ma V ha non ci sta, allora L vince 1 CHF, e ciò avviene con probabilità $b(1 - p)$. Infine se L decide di rinunciare subito perde 1 CHF, con probabilità $1 - b$. Possiamo quindi determinare il valore atteso per L, in funzione di b e p , come segue:

$$-2bp + 1b(1 - p) - 1 \cdot (1 - b) = -2bp + b - bp - 1 + b = -3bp + 2b - 1.$$

7. IL VALORE ATTESO COMPLESSIVO DEL GIOCO.

Ricapitoliamo quanto sin qui calcolato sulla variabile aleatoria X che ci fornisce, in funzione di b e p , il guadagno di L.

mano	AK	AQ	KA	KQ	QA	QK
guadagno di L	$1 + p$	1	-2	1	$-1 - b$	$-3bp + 2b - 1$

Siccome immaginiamo che la partita si svolga correttamente, ognuna delle sei mani ha la stessa probabilità, pari quindi a $\frac{1}{6}$, di presentarsi. La speranza complessiva del gioco è quindi:

$$E[X] = \frac{1 + p + 1 - 2 + 1 - 1 - b - 3bp + 2b - 1}{6} = \frac{-3bp + b + p - 1}{6}.$$

Prima di andare oltre con l'analisi, possiamo vedere immediatamente cosa succede con alcune strategie estreme:

- L rilancia sempre e V vuole sempre vedere, cioè $b = p = 1$: $E[X] = -\frac{1}{3}$;
- L rilancia sempre e V non vede mai, cioè $b = 1, p = 0$: $E[X] = 0$;
- L non bluffa mai e V vede sempre, cioè $b = 0, p = 1$: $E[X] = 0$;
- L non bluffa mai e V non vede mai, cioè $b = p = 0$: $E[X] = -\frac{1}{6}$;
- L bluffa la metà delle volte e V vede la metà delle volte, cioè $b = p = \frac{1}{2}$: $E[X] = -\frac{1}{8}$.

La situazione non pare molto interessante per il primo che parla, cioè per L. Cerchiamo allora di vedere se ci sono strategie che diano una speranza positiva. Vogliamo quindi vedere se esistono situazioni nelle quali $-3bp + b + p - 1 > 0$. Ricordiamo che $b, p \in [0; 1]$, questo ci permetterà di semplificare grandemente lo studio della disequazione. In effetti:

$$-3bp + b + p - 1 > 0 \iff b(1 - 3p) > 1 - p.$$

Considerando il caso $b \in]0; 1[$ e $p \in [0; 1[$ otteniamo direttamente

$$\frac{1 - 3p}{1 - p} = 1 - \frac{2p}{1 - p} > \frac{1}{b} > 1,$$

disequazione manifestamente sempre falsa con $(b; p) \in]0; 1[\times [0; 1[$.

Ci rimangono due casi da analizzare:

- $b = 0$: otteniamo subito $0 > 1 - p$, che pure è impossibile per $p \in [0; 1]$;
- $p = 1$: otteniamo subito $-2b > 0$, comunque impossibile per $b \in [0; 1]$.

Nei calcoli immediati tuttavia abbiamo visto che in almeno due situazioni il gioco è onesto, cioè $E[X] = 0$: si tratta dei casi $(b; p) \in \{(1; 0); (0; 1)\}$. Vogliamo studiare infine se esistono altre possibilità di scelta della strategia per realizzare un gioco onesto. In altre parole dobbiamo risolvere l'equazione $b(1 - 3p) = 1 - p$. Il caso $p = \frac{1}{3}$ porta immediatamente ad una equazione impossibile in b . In tutti gli altri casi per avere $E[X] = 0$ occorre avere

$$b = \frac{1 - p}{1 - 3p}.$$

Un rapido studio della funzione $f(p) = \frac{1-p}{1-3p}$ ci indica che

$$f(p) = \begin{cases} = 1, & \text{per } p = 0 \\ > 1, & \text{per } p \in]0; \frac{1}{3}[\\ < 0, & \text{per } p \in]\frac{1}{3}; 1[\\ = 0, & \text{per } p = 1 \end{cases}$$

Siccome vogliamo $b \in [0; 1]$, non esistono quindi altre strategie, al di fuori delle due già viste, per le quali $E[X] = 0$.

Quindi il giocatore L, il primo che parla, è sempre svantaggiato, tranne nei due casi $b = 1, p = 0$ (L bluffa sempre quando ha Q, e V lascia sistematicamente) e $b = 0, p = 1$ (L non bluffa mai avendo Q, mentre V quando deve scegliere, vede sempre). In questi due casi il gioco è onesto.

8. ALCUNE OSSERVAZIONI SUL GRAFICO DELLA FUNZIONE $z = E[X](b, p)$.

- Vi è un'evidente simmetria rispetto al piano verticale $b = p$.
- Vi è una seconda simmetria rispetto al piano verticale $b + p = \frac{2}{3}$, in effetti

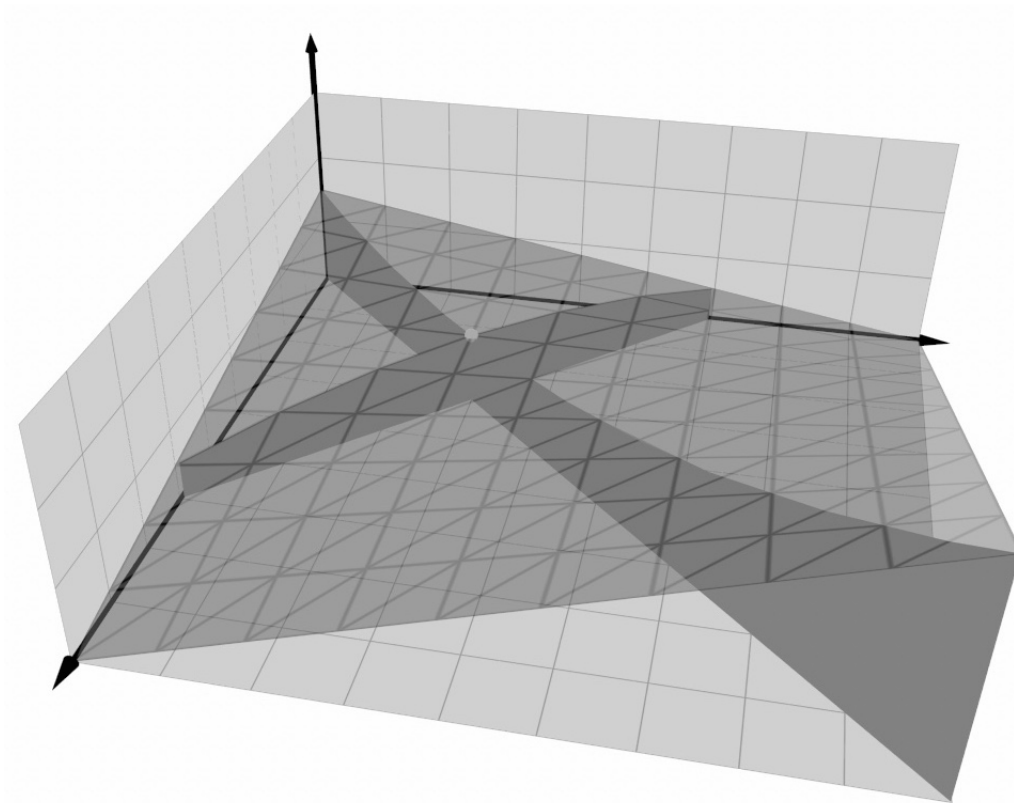
$$-3 \left(\frac{2}{3} - p \right) \left(\frac{2}{3} - b \right) + \left(\frac{2}{3} - p \right) + \left(\frac{2}{3} - b \right) - 1 = -3pb + b + p - 1.$$

- Il punto $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9})$, incontro tra i due piani e la superficie $z = E[X](b, p)$, è un punto sella.

Il grafico seguente evidenzia questi aspetti. Per comodità abbiamo rappresentato la funzione:

$$z = \frac{3bp - b - p + 1}{6}$$

che è il valore atteso del giocatore V, in modo che con $(b, p) \in [0; 1] \times [0; 1]$ la funzione rimanga positiva, quindi il grafico sia sopra il piano $z = 0$.



9. OSSERVAZIONI CONCLUSIVE.

Delahaye segnala che l'equilibrio di Nash che dà la strategia mista ottimale per i due giocatori si ottiene nel punto dove le due derivate parziali della speranza rispetto a b e rispetto a p si annullano. In questo punto, se L modifica la sua strategia scegliendo un altro valore per b , allora V può aumentare la sua speranza (che è ovviamente l'opposto di quella di L) aggiustando p , e viceversa. Nella situazione di equilibrio nessuno dei due giocatori ha interesse cambiare la sua strategia. Il calcolo indica che questo equilibrio ha luogo con $b = p = \frac{1}{3}$ e quindi $E[X] = -\frac{1}{9}$. È il punto trovato con le considerazioni di natura geometrica sopra esposte.

Non ho purtroppo potuto approfondire questo tema per le mie troppo scarse conoscenze relative all'equilibrio di Nash, ma penso vi sia qui argomento per ulteriori riflessioni.

Das neue Geometrie-Lehrmittel der DMK

Die Geometrie als Wissenschaft der Erd- oder Landmessung blickt auf eine 5000 Jahre alte Geschichte zurück und hatte schon immer eine stark anwendungsorientierte Ausrichtung. So entstanden die Pyramiden von Gizeh (ca. 2900 v. Chr.) und die Tempel der alten Griechen (1. Jahrtausend v. Chr.) nicht ohne ausgeprägtes geometrisches Wissen. Die antiken Denker nahmen sich aber auch der theoretischen Herausforderungen dieser Wissenschaft an. Dies führte u.a. zum Satz des Pythagoras, der Bestimmung des Erdumfangs durch Eratosthenes und zur Formulierung der Euklid'schen Geometrie.

Auch heute bilden die Lehren Euklids die Basis für den Geometrie-Unterricht an Schweizer Gymnasien. Zeitgemässe Lehrmittel in diesem Fach gehen jedoch weiter als die Elementargeometrie und bieten Einblicke in erweiterte Fragestellungen und schneiden modernere Bereiche an, um auch neueren Entwicklungen des Faches gerecht zu werden. So auch das neue Geometrie-Lehrmittel der Deutschschweizerischen Mathematikkommission (DMK), welches auf der Euklid'schen Geometrie basiert, aber auch erweiterte Fragestellungen und Einblicke in Bereiche wie bspw. die Graphentheorie bietet.

Die didaktische Ausrichtung des Lehrmittels ist im Vorwort der Autoren genau beschrieben: Durch die Auseinandersetzung mit geometrischen Problemstellungen sollen Lernende zum Nachdenken und Forschen angeregt werden. Dabei tauchen immer wieder Aufgaben auf, die gezielt das räumliche Vorstellungsvermögen schulen und grundlegende Fertigkeiten – wie das Zeichnen, Messen, Konstruieren, Begründen und Widerlegen – vermitteln. Lernaufgaben führen in zentrale Konzepte des Fachs ein und fördern dadurch selbständiges Lernen und entdeckendes Üben. Dabei steht die Eigenaktivität der Lernenden im Vordergrund. Die Kapitel des Lehrmittels bieten eine reichhaltige Sammlung von thematischen Aufgaben und werden durch vermischte Aufgaben und weiterführende Problemstellungen ergänzt. Dieses abgestufte Angebot führt zur Festigung des Pflichtstoffs und ermöglicht Begegnungen mit weiterreichenden Aspekten dieses vielseitigen Faches.

Mit diesem Lehrmittel ist es der DMK und ihren Autoren gelungen, einen wichtigen Beitrag zu leisten, um dem Jahrtausende alten Fach der Geometrie ihren gebührenden Platz am Gymnasium einzuräumen.

Geometrie 1 (Aufgaben und kommentierte Lösungen) erscheint im Februar 2017, Geometrie 2 im Frühjahr 2019. Zusammen decken sie die Lerninhalte der Geometrie an Schweizer Gymnasien vollumfänglich ab.

Geometrie 1

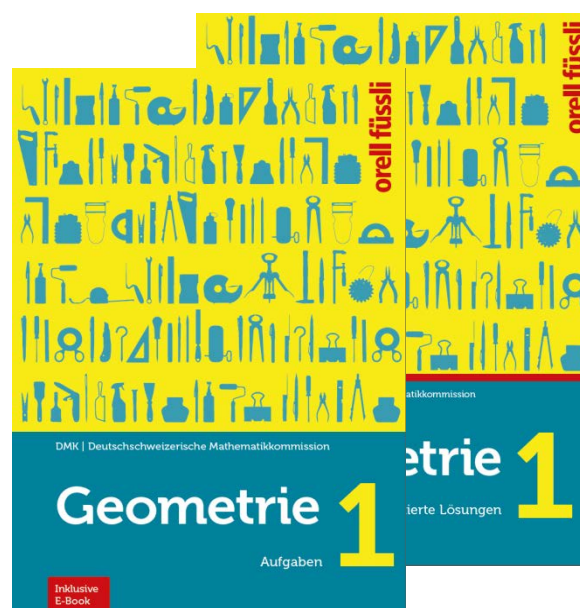
Aufgaben

inklusive E-Book
 Heinz Klemenz, Michael Graf
 1. Auflage 2017
 128 Seiten, 18.4 x 26.5 cm, broschiiert
 ISBN 978-3-280-04135-2
 Preis: CHF 32.-

Kommentierte Lösungen

inklusive E-Book
 Heinz Klemenz, Michael Graf
 1. Auflage 2017
 192 Seiten, A4, broschiiert
 ISBN 978-3-280-04136-9
 Preis: CHF 87.-

Orell Füssli Verlag
 Bestellungen: www.ofv.ch/lernmedien



Rundfahrt mit dem Fahrrad bei Wind

Peter Gallin, p.gallin@sunrise.ch

Gegenwind beim Fahrradfahren ist unangenehm. Gerne tröstet man sich damit, dass man sich für die Rückfahrt Rückenwind verspricht. Dass dieser aber niemals die bei der Hinfahrt verlorene Zeit wettmachen kann, wird in der Schule manchmal explizit berechnet, allerdings meistens mit dem Beispiel eines Schwimmers in einem Fluss.

Zunächst wollen wir ein paar Annahmen festlegen, damit eine möglichst einfache Modellierung und anschliessende Rechnung möglich wird. Der Fahrradfahrer mitsamt Fahrrad fährt auf einer perfekten horizontalen Ebene und soll die Form eines vertikalen Zylinders haben. Damit erreichen wir, dass er bei einer als horizontal angenommenen Windrichtung immer den gleichen Widerstandsbeiwert besitzt, unabhängig von der Richtung, aus der der Wind weht.

1. Unrealistische Vorstudie: Fahrradfahrer mit Propellerantrieb

Um den Zusammenhang mit einem Schwimmer in einem Fluss oder einem Zeppelin in bewegter Luft zu erkennen, wollen wir zuerst die unrealistische Annahme treffen, dass der Fahrradfahrer wie auf einem Luftkissen reibungsfrei längs einer Schiene gleitet und nur durch einen Propeller sich antreiben kann. Das hat zur Folge, dass er gegenüber der stehenden Luft stets die gleiche Geschwindigkeit v_0 erreicht. Weht ein exakter Gegenwind mit der Geschwindigkeit w , so wird er, falls der Antrieb abgeschaltet ist, mit der Luftmasse mit der Geschwindigkeit w gegenüber dem Boden weggetragen, genauso wie das bei einem Zeppelin in bewegter Luft oder einem Schwimmer im Fluss der Fall ist. Mit eingeschaltetem Antrieb bewegt sich dieser abstrakte Fahrradfahrer also bei Gegenwind mit der Geschwindigkeit $v_0 - w$ und bei Mitwind mit der Geschwindigkeit $v_0 + w$ gegenüber dem Boden. Nun nehmen wir an, der Fahrradfahrer bewege sich zuerst eine gewisse Strecke s mit genau seiner Richtung entgegengesetztem Wind ($0 \leq w < v_0$) und anschliessend die gleiche Strecke zurück. Er benötigt bei der Hinfahrt die Zeit $t_a = \frac{s}{v_0 - w}$ und bei der Rückfahrt die Zeit $t_b = \frac{s}{v_0 + w}$. Für die zwei Etappen mit Hin- und Rückfahrt zusammen ergibt sich also die Gesamtzeit

$$T_2 = t_a + t_b = \frac{s}{v_0 - w} + \frac{s}{v_0 + w} = \frac{2sv_0}{v_0^2 - w^2} = \frac{2s}{v_0} \cdot \frac{v_0^2}{v_0^2 - w^2} = \frac{2s}{v_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{w}{v_0}\right)^2} .$$

Da der zweite Faktor für $0 \leq w < v_0$ stets grösser oder gleich 1 ist, besagt diese Formel, dass die Zeit bei Windstille ($w = 0$) stets die kleinste ist, nämlich $\frac{2s}{v_0}$.

2. Realistischere Modellierung: Fahrradfahrer mit konstanter Tretleistung¹

Nach wie vor soll der Fahrradfahrer reibungsfrei auf einer Schiene rollen, aber dank der Haftung auf der Schiene durch Treten eine Vorwärtsbewegung generieren. Die Leistung P , welche er erbringt, soll konstant sein. Ist F die Kraft, mit der er sich vorwärts bewegt, so kann die Energie auf einem kleinen Wegstück Δs innerhalb des Zeitabschnitts Δt durch $F \cdot \Delta s = P \cdot \Delta t$ ausgedrückt werden. Das bedeutet $F \cdot v = P$, wobei v die Geschwindigkeit des Fahrradfahrers gegenüber dem Boden bedeutet. Der Luftwiderstand ist die Kraft F , welche der Fahrradfahrer aufbringen muss. Sie ist proportional zum Quadrat der Relativgeschwindigkeit $(v - w)$ zwischen

¹Die Gegenüberstellung der zwei Modelle ist dank einer intensiven Diskussion mit Martin Lieberherr entstanden.

Fahrradfahrer und Luft. Wir messen hier die Geschwindigkeiten gegenüber dem Boden und in gleicher Richtung, d.h. positives w ist Rückenwind, negatives w ist Gegenwind, und es gelte $0 < |w| < v$. Damit gilt insgesamt $(v-w)^2 \cdot v = a \cdot P$ mit einem Proportionalitätsfaktor a . Da wir die Leistung P als konstant angenommen haben, können wir bei gegebener Windgeschwindigkeit und gegebenen Konstanten a und P durch die Beziehung $(v-w)^2 \cdot v = k$ ($k = \text{const.}$) die Geschwindigkeit des Fahrradfahrers berechnen. Leider lässt sich diese Gleichung nicht nach $v(w)$ auflösen, die Umkehrung $w(v)$ jedoch schon:

$$w = v - \sqrt{\frac{k}{v}}$$

Vor der Wurzel steht nur das Minuszeichen weil $v > w$ ist gemäss unserer Annahme $0 < |w| < v$. Die nachfolgende Graphik zeigt die Funktion $w(v)$ für die Parameterwerte $k = 1, 2, \dots, 16$.

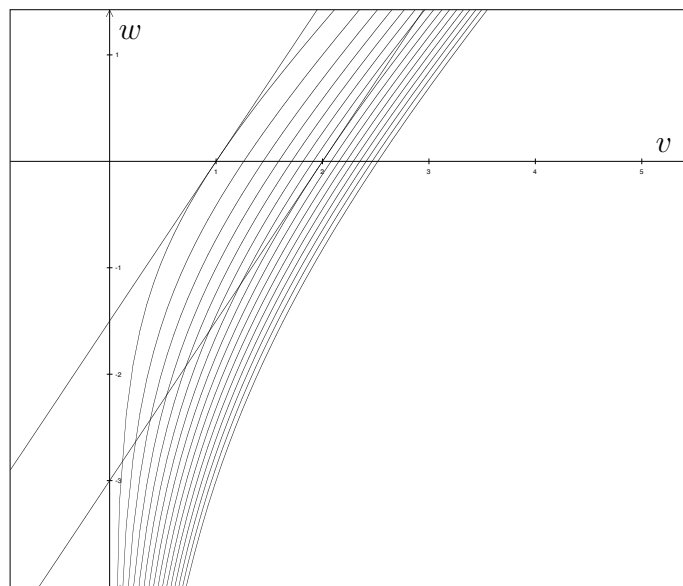


Abb. 1: Zusammenhang zwischen Wind- und Fahrradgeschwindigkeit

Da wir nur an einer qualitativen Beurteilung des Zeitbedarfs bei einer Rundfahrt mit Wind interessiert sind, können wir uns erlauben, eine lineare Näherung als Zusammenhang zwischen w und v anzunehmen, insbesondere für den Bereich $-v_0 < w < v_0$, wobei $v_0 = \sqrt[3]{k}$ die Fahrradgeschwindigkeit bei Windstille ($w = 0$) bedeutet. Der Gegen- oder Mitwind soll also nicht stärker blasen als der Fahrtwind bei Windstille.

Nun ergibt sich für die Ableitung von $w(v)$ nach v :

$$w'(v) = 1 + \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{v^3}}$$

Und für $v = v_0 = \sqrt[3]{k}$ erhalten wir $w'(v_0) = \frac{3}{2}$ und dies erstaunlicherweise für alle k , wie sich dies in der Abb. 1 an den parallelen Tangenten in den Nullstellen zeigt. Damit können wir in erster Näherung die Geschwindigkeit v als Funktion der Windgeschwindigkeit angeben:

$$v(w) = v_0 + \frac{2}{3}w$$

Wir stellen fest, dass der Wind hier einen etwas geringeren Einfluss auf die Geschwindigkeit hat als mit der Beziehung $v(w) = v_0 + w$, die im unrealistischen Fall des 1. Abschnitts zum Zug kam. Besser noch: Aus Abb. 1 folgt, dass man auch bei sehr starkem Gegenwind und gegebener Leistung zwar langsam aber immerhin vorwärts kommt, während dies ja beim Zeppelin- oder Schwimmermodell nicht möglich ist.

3. Rundfahrt längs eines gleichseitigen Dreiecks

Nun stellt sich die Frage, wie sich der Zeitbedarf T_3 für eine Rundfahrt bei Wind längs eines gleichseitigen Dreiecks verhält.

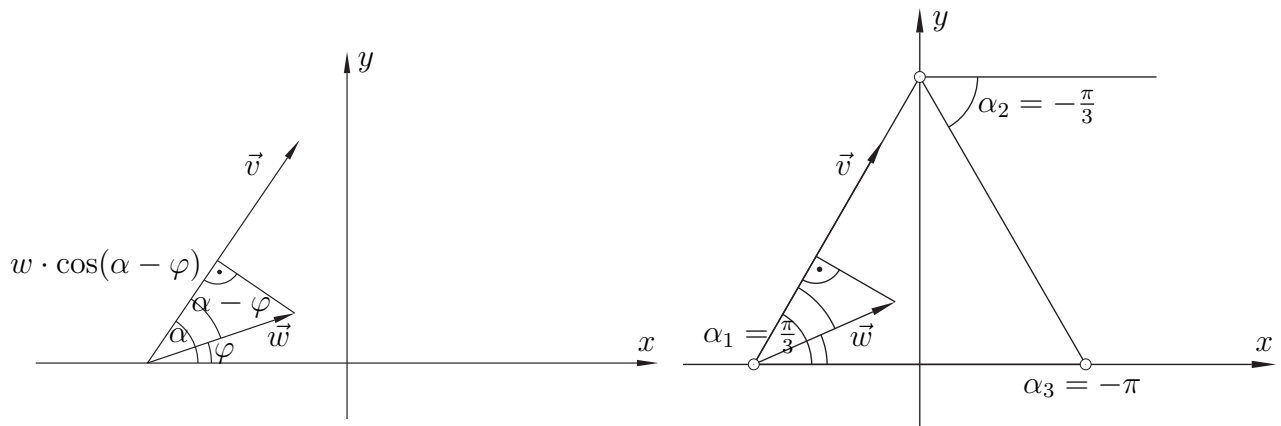


Abb. 2: Fahrgeschwindigkeit \vec{v} und Windgeschwindigkeit \vec{w} bei einer Dreiecksrundfahrt

Wir verzichten jetzt der schlichten Notation halber auf den Index 0 und wählen die Fahrgeschwindigkeit bei Windstille als Vektor \vec{v} mit dem Betrag v und dem Argument α gegenüber der positiven x -Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Analog sei \vec{w} der Vektor, der die Windgeschwindigkeit für das unrealistische Modell im 1. Abschnitt angibt oder aber — gemäss dem 2. Abschnitt — zwei Drittel der realen Windgeschwindigkeit im linearisierten Modell mit konstanter Tretleistung. Der Vektor \vec{w} habe das Argument φ . Die Geschwindigkeit v wird jetzt nur von der Windkomponente in Richtung \vec{v} beeinflusst. Nun betrachten wir rechts in Abb. 2 eine Rundfahrt über ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge s . Wir wählen das Argument der ersten Seite $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$. Anschliessend seien $\alpha_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$ und $\alpha_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}$ die Argumente der zweiten und dritten Seite. Gemäss unserer Annahme muss zu jeder Geschwindigkeit auf den drei Seiten noch der Windanteil $w \cdot \cos(\alpha_i - \varphi)$ (links in Abb. 2) addiert werden. Damit ergibt sich als Totalzeit T_3 für eine vollständige Rundfahrt längs des gleichseitigen Dreiecks:

$$T_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{s}{v + w \cdot \cos(\alpha_i - \varphi)} = \sum_{i=1}^3 \frac{s}{v + w \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - (i - 1) \cdot \frac{2\pi}{3} - \varphi\right)}$$

Um vergleichbare Darstellungen zu erhalten, wählen wir die Gesamtlänge der Rundfahrt als Einheit, d. h. $s = \frac{1}{3}$ und ausserdem soll die Grundgeschwindigkeit bei Windstille den Betrag $v = 1$ haben. Damit können wir für die Parameterwerte $w = 0, w = 0.1, \dots, w = 0.9$ die Gesamtzeit

$$T_3(\varphi) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1 + w \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)} + \frac{1}{1 + w \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3} - \varphi\right)} + \frac{1}{1 + w \cdot \cos(-\pi - \varphi)} \right)$$

in Abhängigkeit von φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) graphisch darstellen:

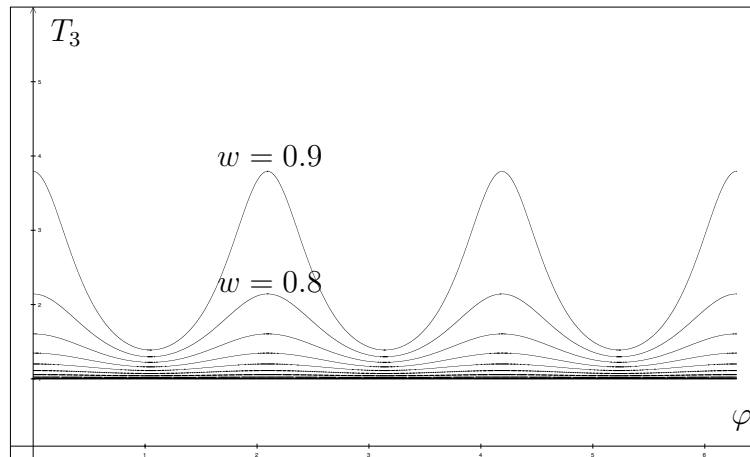


Abb. 3: Zeitbedarf T_3 bei Dreiecksrundfahrt und Wind in Richtung φ

Hier entsprechen die Parameterwerte $w = 0.7$, $w = 0.8$ und $w = 0.9$ nicht mehr der geforderten Einschränkung im realen, linearisierten Modell, sondern wurden bloss der Deutlichkeit halber einbezogen. Es war nämlich gefordert, dass der Betrag der Windgeschwindigkeit kleiner als die Geschwindigkeit der Fahrradfahrers bei Windstille sein soll. Daher dürfte der Parameter w für dieses Modell nur bis $\frac{2}{3}$ laufen. Für das unrealistische Modell im 1. Abschnitt sind die höheren Werte zulässig.

Jetzt wird deutlich, dass bei einem Wind in Richtung positiver x -Achse ($\varphi = 0$) der Zeitbedarf maximal ist. Das bedeutet, dass man auf der dritten Seite des Dreiecks direkten Gegenwind hat. Die beiden anderen Maxima entsprechen den Windrichtungen $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ und $\varphi = \frac{4\pi}{3}$, d. h. direktem Gegenwind auf der zweiten resp. ersten Seite des Dreiecks. Zusammenfassend kann man also sagen, dass der direkte Gegenwind auf einer Seite zu vermeiden, der direkte Rückenwind bei $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = \frac{3\pi}{3}$ oder $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ dagegen optimal ist.

4. Hin- und Rückfahrt längs einer Strecke

Jetzt betrachten wir eine Rundfahrt auf einer Strecke längs der x -Achse, zuerst nach rechts, anschliessend zurück nach links. Die Gesamtzeit berechnet sich dann mit der Formel

$$T_2(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 + w \cdot \cos(-\varphi)} + \frac{1}{1 + w \cdot \cos(-\pi - \varphi)} \right),$$

welche für $\varphi = 0$ in die im 1. Abschnitt angegebene Formel mit $s = \frac{1}{2}$ und $v_0 = 1$ übergeht. Die zugehörige graphische Darstellung präsentiert sich wie erwartet: Die beiden Fälle mit direktem Gegenwind ($\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$) ergeben den grössten Zeitbedarf während bei genauem Seitenwind ($\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$) kein Zeitverlust im Vergleich zu Windstille auftritt.

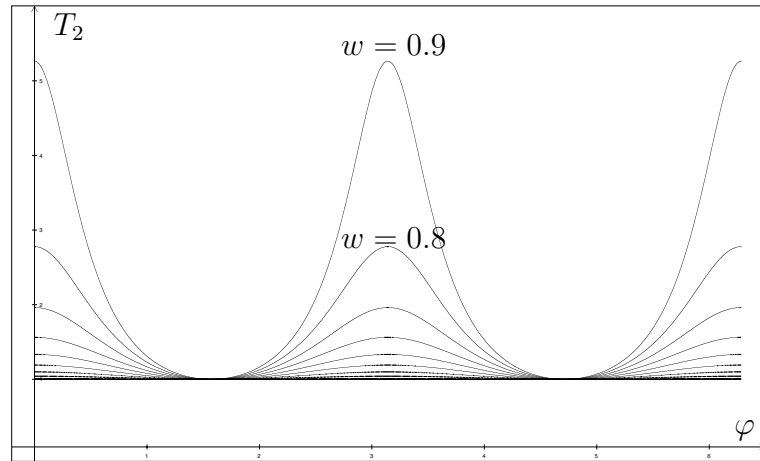


Abb. 4: Zeitbedarf T_2 bei Streckenrundfahrt und Wind in Richtung φ

5. Vom regelmässigen Fünfeck zum Kreis

Bevor wir zu einer kreisförmigen Rundfahrt übergehen, wollen wir noch eine Fünfecksrundfahrt betrachten, um eine Idee zu erhalten, in welche Richtung sich das Problem entwickelt. Zur Orientierung hier zuerst die Lage des regelmässigen Fünfecks im Koordinatensystem

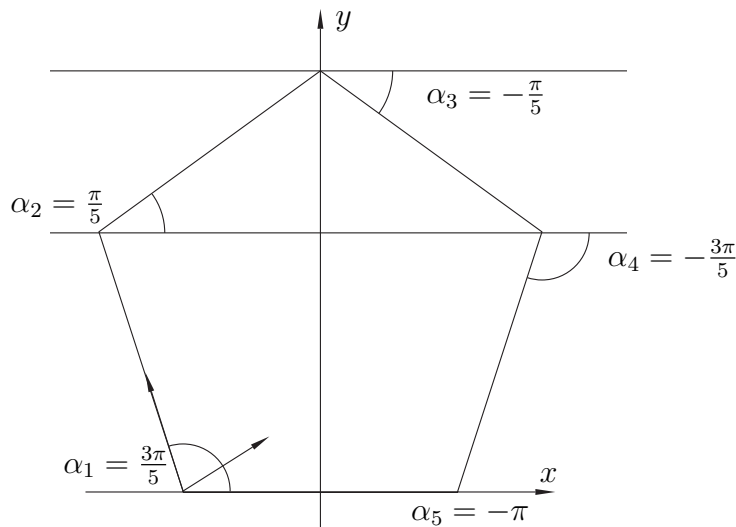


Abb. 5: Fünfecksrundfahrt

Für die Gesamtzeit T_5 erhalten wir:

$$T_5(\varphi) = \frac{1}{5} \cdot \left(\sum_{i=1}^5 \frac{1}{1 + w \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{5} - (i-1) \cdot \frac{2\pi}{5} - \varphi\right)} \right)$$

Die zugehörige graphische Darstellung zeigt das bereits bekannte Phänomen, dass der direkte Gegenwind auf irgend einer der fünf Seiten zu vermeiden ist.

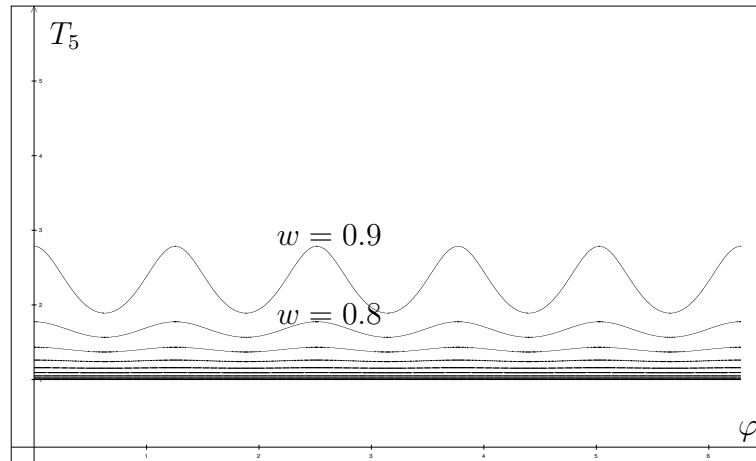


Abb. 6: Zeitbedarf T_5 bei Fünfecksrundfahrt und Wind in Richtung φ

Ausserdem erkennt man, dass die Maxima mit zunehmender Eckenzahl weniger hoch werden. Das lässt erahnen, wie der Grenzfall der Kreisrundfahrt nun aussehen wird.

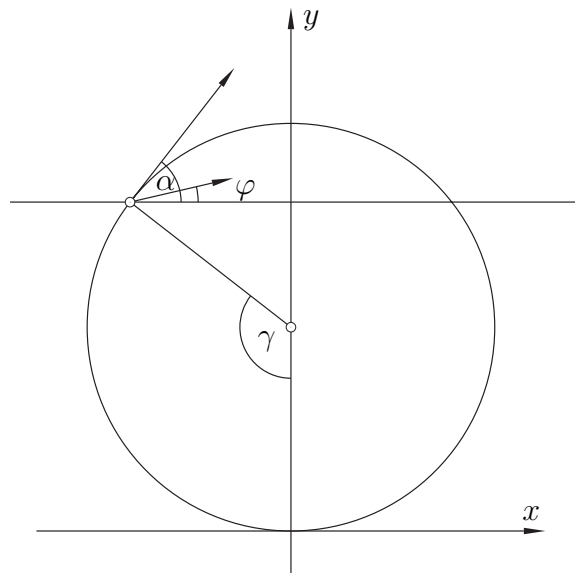


Abb. 7: Kreisrundfahrt

Für die Rundfahrt lassen wir nun den Zentriwinkel γ von 0 bis 2π wachsen. Daraus ergibt sich der Richtungswinkel $\alpha(\gamma) = \pi - \gamma$. Damit die Länge der Rundfahrt wiederum 1 beträgt, muss der Radius des Kreises $r = \frac{1}{2\pi}$ gewählt werden. Das infinitesimale Längenelement auf dem Kreis ist $r \cdot d\gamma$. Damit erhalten wir für die Gesamtzeit T wiederum mit $v = 1$:

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{r \cdot d\gamma}{1 + w \cdot \cos(\alpha - \varphi)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{1 + w \cdot \cos(\pi - \gamma - \varphi)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{1 - w \cdot \cos(\gamma + \varphi)}$$

Setzen wir vorübergehend $u = \frac{1}{w}$ ($u > 1$), so ergibt sich

$$T = \frac{u}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{u - \cos(\gamma + \varphi)} = \left[\frac{u}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \cdot \arctan \left(\tan\left(\frac{\gamma + \varphi}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{u + 1}{u - 1}} \right) \right]_0^{2\pi} .$$

Die mit dem Taschenrechner TI-89 ermittelte Stammfunktion des positiven und stetigen Integranden ist als Funktion von γ periodisch mit Periodenlänge 2π . Das hat zur Folge, dass die Funktionswerte für $\gamma = 0$ und $\gamma = 2\pi$ gleich sind. Damit versagt das Standardverfahren mit dem Einsetzen der oberen und unteren Grenze in die Stammfunktion. Es liegt nämlich wegen der Singularität der Tangensfunktion an der Stelle $\gamma = \pi - \varphi$ ein Sprung vor. Der Betrag des Sprungs ist jedoch immer gleich gross, weil der Summand φ nur eine Verschiebung des Graphen der Stammfunktion in γ -Richtung bewirkt. Da nun für beliebiges positives c die Grenzwerte

$$\lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} (\arctan(c \cdot \tan(x))) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow \frac{\pi}{2}} (\arctan(c \cdot \tan(x))) = -\frac{\pi}{2}$$

gelten, springt diese Funktion an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ um den Wert π nach unten. Damit beträgt die Sprunghöhe der Stammfunktion an irgend einer Stelle, je nach φ , immer gleich viel, nämlich

$$\frac{u}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \cdot \pi \quad .$$

Somit ist das der Wert, den unser bestimmtes Integral annimmt. Es gilt also mit Rücksubstitution von $u = \frac{1}{w}$ schliesslich unabhängig von φ :

$$T = \frac{u}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \cdot \pi = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}}$$

Es überrascht nicht, dass diese Gesamtzeit unabhängig von der Windrichtung φ ist, denn bei einer Kreisbahn spielt es für die Gesamtzeit keine Rolle, aus welcher Richtung der Wind weht. Zum Vergleich mit T_5 stellen wir die horizontalen Geraden, welche den Parameterwerten $w = 0, w = 0.1, \dots, w = 0.9$ in der konstanten Funktion $T(\varphi)$ entsprechen, zusammen mit den Kurven aus Abb. 6 dar. Man erkennt also, dass mit zunehmender Eckenzahl die Wellenlinien gegen diese Geraden konvergieren.

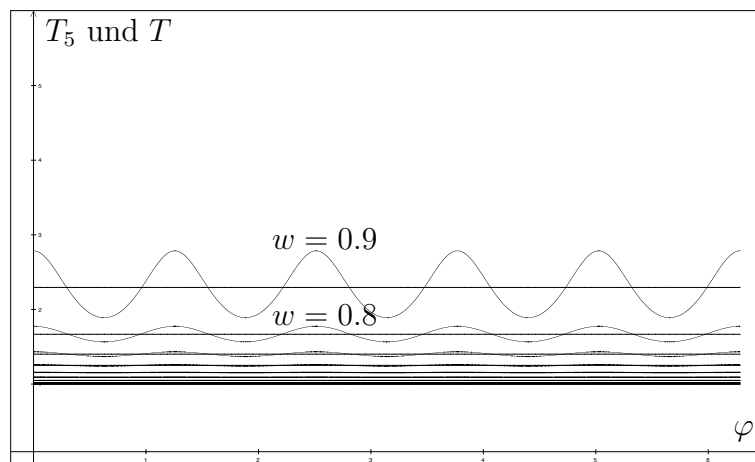


Abb. 8: Zeitbedarf T bei einer Kreisrundfahrt im Vergleich mit T_5 einer Fünfecksrundfahrt

Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2C

Urs Kirchgraber, kirchgra@math.ethz.ch

Dies ist die Fortsetzung der Artikel *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2A* und *Teil 2B*, erschienen in den VSMP-Bulletins 131 und 132. Abschnitte und Gleichungen aus diesen Teilen werden in dieser Fortsetzung mit der entsprechenden Nummer, ergänzt durch den Zusatz “2A” bzw. “2B”, zitiert.

Wie man sich *erinnert* befassen wir uns in dieser Artikel-Reihe mit der Differenzialgleichung von G. Duffing in der Form:

$$\ddot{y} + y = \epsilon [2\nu y - 2\delta \dot{y} + \gamma y^3 + 2 \cos(t)] \quad (32), 2A$$

Dabei sind ν, δ, γ und ϵ *Parameter*¹ der Gleichung. Die sogenannte *Mittelwert-Methode* (engl. *Method of Averaging*) erlaubt es, das Verhalten der Lösungen der Dgl (32), 2A – jedenfalls in gewissem Ausmass und für *hinreichend kleine, positive Werte* des *Störungsparameters* ϵ (mehr dazu in Abschnitt 7, 2A) – anhand des sogenannten “*gemittelten Systems*” zu untersuchen. Dieses lautet²:

$$\begin{cases} \bar{x}'_1 &= -\delta \bar{x}_1 + \nu \bar{x}_2 - \kappa (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) \bar{x}_2 \\ \bar{x}'_2 &= -\nu \bar{x}_1 - \delta \bar{x}_2 + \kappa (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) \bar{x}_1 - 1 \end{cases} \quad (30), 2A$$

In Teil 2B wurde das Verhalten der Lösungen des Systems (30), 2A untersucht und Beziehungen zum Verhalten der Lösungen der Duffing-Gleichung (32), 2A unter der Voraussetzung hergestellt, dass ϵ positiv, aber *hinreichend klein* ist. Das soll weiterhin gelten.

1

In diesem letzten Teil der Artikel-Reihe soll zum Schluss noch ein Phänomen aufgezeigt werden, von dem man sagen kann, dass es *berühmt* ist.

Ich erkläre das Phänomen anhand des gemittelten Systems (30), 2A. Es tritt im Fall $\kappa^2 > \frac{64}{27}\delta^6$ auf, also wenn der Parameter κ der Nichtlinearität in der Duffing-Gleichung (32), 2A einen Wert oberhalb des kritischen Schwellwerts $\kappa_{krit} := \frac{8}{3\sqrt{3}}\delta^3$ hat. Diese Bedingung ist im Fall erfüllt, der durch das Bifurkationsdiagramm von Abbildung 2 c), 2 d), 2B dargestellt wird. Diese Abbildung ist, aus Gründen der bequemerer Lesbarkeit, in Abbildung 1 unten nochmals wiedergegeben.

Die *Fragestellung* lautet:

Wie verhält sich der Duffing-Schwinger bei einer adiabatischen Veränderung des Parameters ν ?

¹ γ ist ein Mass für die Stärke der Nichtlinearität der Rückstellkraft, die durch y^3 modelliert wird, $\delta > 0$ für die Stärke der Dämpfung. Für die Bedeutung von ν siehe Abschnitt 3, 2B. Der sogenannte Störparameter ϵ wird als klein und positiv gedacht. Damit stellt die Duffing-Gleichung eine “*Störung*” des *harmonischen Oszillators* $\ddot{y} + y = 0$ dar.

²Die Herleitung findet sich in den Abschnitten 5, 2A und 6, 2A. Wie schon dort bedeutet ‘ die Ableitung nach τ , wobei τ und die Zeit t durch $\tau = \epsilon t$ miteinander verknüpft sind, und κ und γ durch $\kappa = -(3/8)\gamma$.

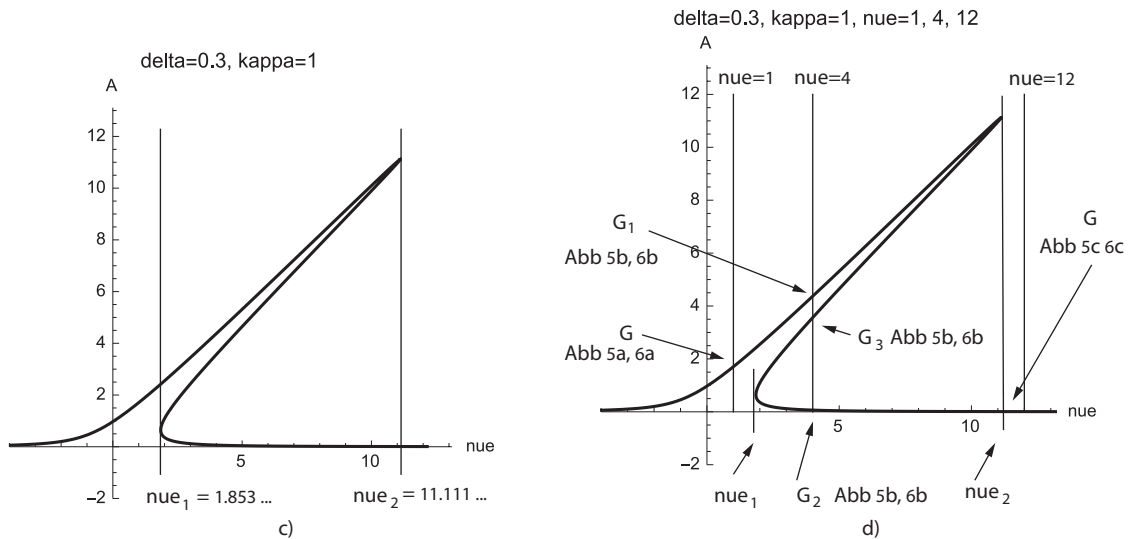


Abbildung 1: Wiederholung von Abbildung 2 c), d), 2B

Im Fremdwörter-Duden wird adiabatisch mit “nicht hindurchtretend” umschrieben. Hier soll adiabatisch bedeuten, dass der Parameter ν in ganz kleinen Schritten und quasi unendlich langsam verändert wird.

Was beobachtet jemand bei diesem (Gedanken-)Experiment?

Gehen wir wieder von $\delta = 0.3, \kappa = 1$ aus und beginnen wir mit $\nu = 1$, siehe Abbildung 1 und entsprechend Abbildung 6 a), 2B. An welchem (Anfangs-) oder Start-Punkt in der \bar{x}_1 - \bar{x}_2 -Ebene das System am Anfang, sagen wir zur Zeit $t = 0$, auch ist, nach genügend langer Zeit befindet es sich (fast) im Gleichgewicht G , siehe Abbildung 6 a), 2B.

Nun denken wir uns ν ein *klein wenig* über 1 hinaus *erhöht*. Das Phasenportrait zu diesem neuen Wert von ν wird sich kaum von demjenigen in Abbildung 6 a), 2B unterscheiden: Der Gleichgewichtspunkt wird sich ein wenig verschoben haben, und zwar nach aussen, denn sein A -Wert³ ist etwas grösser, wie aus Abbildung 1 folgt. Und in dieses geringfügig verschobene Gleichgewicht schwingt sich das System ein, denn auch dieses Gleichgewicht ist ein globaler Attraktor⁴. Im Hinblick auf die Diagramme in Abbildung 1 kann man sagen: Indem wir ν , beginnend mit $\nu = 1$ und wenn das System im entsprechenden Gleichgewichtszustand ist, erhöhen, folgen wir dem *oberen Ast* in Abbildung 1 a), b).

Und so geht es weiter: ν *wird in sehr kleinen Schritten und sehr langsam vergrößert*. Dabei wandert der Gleichgewichtspunkt, in den sich das System jeweils einschwingt, immer etwas weiter nach aussen – weil sein A -Wert gemäss Abbildung 1 kontinuierlich wächst.

Wenn bei diesem Vorgang die *kritische Schwelle* ν_1 , siehe Abbildung 1 b), *überschritten* ist, ändert sich sozusagen die “Grosswetterlage”, denn nun gibt es neben dem Gleichgewichtspunkt G_1 , der an Stelle von G tritt, zwei *zusätzliche* Gleichgewichtspunkte: Das Phasenportrait hat jetzt die Gestalt von Abbildung 6 b), 2B. Ist ν nur geringfügig grösser als ν_1 liegen die Gleichgewichtspunkte G_2 und G_3 nahe beieinander und “weit weg” von G_1 . Die Person, die unser Experiment beobachtet, merkt von der (im Grunde genommen dramatischen) Veränderung (einstweilen) nichts: Das System schwingt sich auf den nur unwesentlich (weiter aussen) liegenden Gleichgewichtspunkt G_1 ein.

³Pro memoria: $A := X_1^2 + X_2^2$, siehe (6), 2B; dabei bezeichnen X_1, X_2 die Koordinaten des Gleichgewichts.

⁴Zum Begriff “globaler Attraktor” siehe Abschnitt 6, 2B.

Es werde weiter im Text verfahren und ν *adiabatisch erhöht*. Unsere *Beobachterin* stellt nichts besonderes fest: Für sie schwingt das System ständig auf eine Gleichgewichtslösung ein, die sich fortwährend langsam (adiabatisch) ein wenig nach aussen verschiebt. *Wir* wissen: Qualitativ gilt das Phasenportrait von Abbildung 6 b), 2B, wobei sich das System (vorläufig) immer (fast) im Gleichgewicht G_1 befindet.

Irgend wann kommt der *Moment*, in dem ν die *nächste kritische Schwelle* ν_2 überschreitet, siehe Abbildung 1.

Abbildung 2 zeigt *Schnappschüsse* von den *Lagen der Gleichgewichte* für Werte von ν etwas unterhalb von ν_2 und für einen Wert etwas oberhalb.

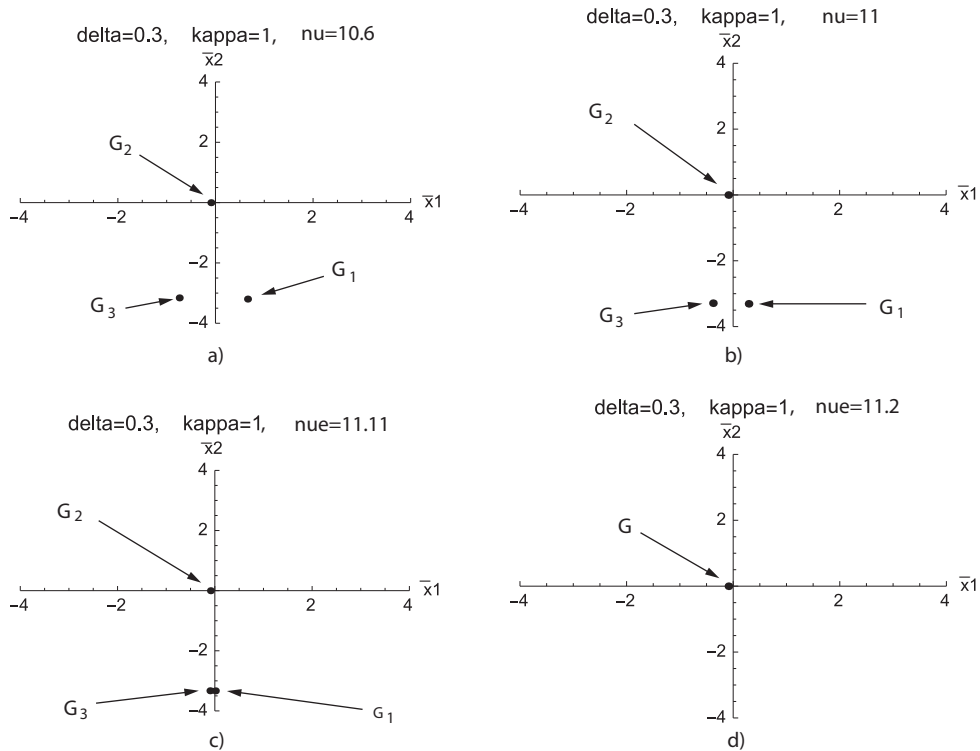


Abbildung 2: Die Entwicklung der Gleichgewichtslagen des gemittelten Systems (30), 2A, wenn der Parameter ν den kritischen Wert ν_2 passiert

Man sieht: G_3 und G_1 rücken sukzessive zusammen und beim Erreichen des kritischen Wertes ν_2 “fressen” sie sich gewissermassen auf und *verschwinden*.

Und jetzt der *springende Punkt*: Wenn ν einen Wert etwas oberhalb von ν_2 erreicht hat, siehe Abbildung 2 d), ist der Systemzustand noch ungefähr dort, wo G_3 und G_1 grad noch waren⁵, ehe sie verschmolzen und verschwanden!

Für $\nu > \nu_2$ gibt es nur noch den einen Gleichgewichtspunkt, der in Abbildung 2 d) (wieder) mit G bezeichnet ist und nahe beim Nullpunkt liegt. Da G ein globaler Attraktor ist, siehe Abschnitt 6, 2B, *erfährt der Systemzustand nun eine grosse Änderung*: Für ν etwas kleiner als ν_2 lag er ungefähr am Punkt⁶ $(0, -3.3)$. Ist der Wert von ν auf etwas über ν_2 angewachsen, schwingt sich das System auf den

⁵Also ungefähr am Punkt $(0, -3.3)$.

⁶Das bedeutet für die Duffing-Gleichung (32), 2A, dass der Schwinger mit einer Amplitude von etwa $\sqrt{A} \approx \sqrt{0^2 + (-3.3)^2} \approx 3.3$ schwingt.

einzigem dann vorhandenen Gleichgewichtspunkt G ein (was durchaus einige Zeit in Anspruch nehmen kann), wird also schliesslich nahe dem Nullpunkt zu liegen kommen⁷.

Das ist ein *überraschendes Phänomen*. Normalerweise gehen wir davon aus, dass sich das Verhalten eines Systems nur geringfügig ändert, wenn einer seiner Parameter geringfügig verändert wird: “Das System verhält sich *stetig*.”

Das trifft, wie unsere Analyse zeigt, auch für alle ν -Werte von $\nu = 1$ bis ν_2 zu. An der Stelle $\nu = \nu_2$ aber verhält sich das System *unstetig*: *Es tritt eine starke Veränderung im Systemverhalten ein*.

Die Tatsache, dass ein solches Phänomen in einem (einfachen) Modell eines schwingenden Systems auftritt, untersucht und (zumindest in gewisser Weise) verstanden werden kann, hat *erkenntnistheoretische* Bedeutung. Man lernt: Wohl verhalten sich Systeme in Bezug auf Parametervariation *typischerweise* stetig, das heisst eine kleine Parameteränderung bewirkt *meistens* auch nur eine geringfügige Verhaltensänderung des Systems. Meistens. Aber nicht immer: Das demonstriert die Duffing-Gleichung.

Ob uns das nachdenklich machen sollte? Was, wenn solche Phänomene zum Beispiel im Weltumweltsystem auftreten? Vielleicht denken Sie – ja, dann muss man halt den entsprechenden Parameter wieder etwas unter den kritischen Wert zurückfahren. Doch genügt das? Es ist interessant die Abbildungen 1 und Abb 6, 2B noch unter diesem Gesichtspunkt zu betrachten. Vielleicht tun Sie das?

Untersuchungen von unstetigem Systemverhalten hatten in den späten 1960-iger und 1970-iger Jahren unter der (werbewirksamen) Bezeichnung “*Katastrophentheorie*” Konjunktur. Berühmte Exponenten waren *R. Thom* (1923-2002) und Sir *E. C. Zeeman* (1925-2016).

2 Epilog

Die Differenzialgleichung

$$\ddot{y} + y = \epsilon [2\nu y - 2\delta \dot{y} + 2 \cos(t)] \quad (1)$$

lässt sich mit den Mitteln der Differenzialrechnung, wie sie Gymnasiastinnen und Gymnasiasten kennen lernen, lösen und es ist lohnend die Lösungen zu diskutieren, was ebenfalls mit den Instrumenten der Schulmathematik gelingt. Das zeigt ja der Teil *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 1*, erschienen im VSMP-Bulletin 130, siehe p. 24-31. Dass das Problem (1) mit verhältnismässig einfachen Mitteln vollständig analysiert werden kann liegt daran, dass (1) eine *lineare* (Differenzial-)Gleichung ist.

Die Situation ist *schlagartig* anders, wenn man die Feder, die im Schwinger (1) (physikalisch gesprochen) die Rückstellkraft erzeugt, nur schon ‘ein bisschen’ *nichtlinear* macht. Dann lautet die Gleichung bei einer naheliegenden Wahl der Nichtlinearität neu

$$\ddot{y} + y = \epsilon [2\nu y - 2\delta \dot{y} - \frac{8}{3}\kappa y^3 + 2 \cos(t)] \quad (2)$$

Wie in dieser Artikelreihe gezeigt wird, treten nun ganz neue Phänomene auf, wobei die mathematischen Anforderungen sprunghaft ansteigen. Die heutigen mathematischen Instrumente erlauben es, eine Vielzahl von Teilresultaten zu etablieren, aber sie sind noch nicht mächtig genug, um eine Differenzialgleichung, wie die (eigentlich harmlos anmutende ?!) Duffing-Gleichung (2), die vor nunmehr fast hundert Jahren das Licht der Welt erblickte, umfassend und abschliessend zu analysieren.

⁷Das bedeutet für die Duffing-Gleichung (32), 2A, dass der Schwinger nun nur mehr mit einer sehr kleinen Amplitude schwingt, also fast im Ruhezustand ist.

Hier endet der Streifzug in die Theorie der nichtlinearen Schwingungen, der seinen Ausgangspunkt hatte, als Martin Lieberherr's (damals) noch kleiner Sohn auf einem Spielplatz eine Art erster Flugerrfahrten machte.

Literatur

- [1] G. Duffing: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlichen Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, 1918.
- [2] U. Kirchgraber: *Schwingungen I oder wenn der Vater mit dem Sohn*, VSMP-Bulletin Nr. 128, Mai 2015, p. 24-30, *Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol*, VSMP-Bulletin Nr. 129, September 2015, p. 10-19, *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 1*, VSMP-Bulletin Nr. 130, Januar 2016, p. 24- 31.
- [3] M. Lieberherr: *Duffing-Oszillator*, VSMP-Bulletin Nr. 119, Juni 2012, p. 30-32.

Walser, Hans. EAGLE-Malbuch, Zöpfe – Zerlegungen – Zehnecke, 78 Seiten, CHF 11.60, Edition am Gutenbergplatz Leipzig EAGLE, 2016, EAGLE 094, ISBN 978-3-95922-094-1

Hans Walser hat oft gezeigt, wie Mathematik erfahrbar, fassbar, verstehbar gemacht werden kann. Er macht Tiefgründiges in der einfachst möglichen Gestalt dingfest. Im Malbuch erreicht uns seine mathematische Botschaft überraschend – aber es geht nicht ohne unser Zutun. Das Malbuch muss beim Lesen bearbeitet und transformiert werden. Beim Ausmalen erzeugen wir selbst Muster. *Mathematics, the Science of Patterns*, heisst ein Buch von Keith Devlin, das diese Sicht vertieft.

Der Text ist also auf partizipatives Lernen am Beispiel angelegt. Wir bestimmen beim Ausmalen mit, welche Muster entstehen und damit welche Mathematik es zu entdecken gibt. Es stimmt, auch Kinder können sich mit diesem Malbuch vergnügen – aber es braucht einen wachen Geist und etwas mathematisches Flair, um die Ergebnisse nach dem Ausmalen mathematisch zu würdigen, sie in einen beziehungsreichen mathematischen Zusammenhang einzuordnen: Knoten oder Zöpfe, Möbiusbänder oder Zylinder, Geflechte oder Origami, Goldener Schnitt oder $\sqrt{2}$...

Ausmalen ist notwendig aber nicht hinreichend für den Zugang zu der hier kodierten Mathematik. Sich verblüffen lassen, staunen, verstehen wollen, analysieren und begründen – das ist ein Weg zu mathematischen Einsichten, die Walser uns aus seinem grossen Fundus an Beispielen samt didaktischer Aufarbeitung anbietet.

Im Umschlagsbild mag man eine Anspielung auf das grafische Werk von M.C. Escher sehen: ein Händepaar, das sich gegenseitig als Selbstbezug zeichnet. Wenn höchste Komplexität zu Eschers Ausdrucksform gehört, so befasst sich Hans Walser mit sehr einfachen, doch nichttrivialen Beispielen. Sein mathematikdidaktisches Geschick wird erfahrbar in den Überraschungen, welche der Autor und die malende Leserin zusammen erzeugen.

H.R. Schneebeli, Wettingen

Anregungen zur Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

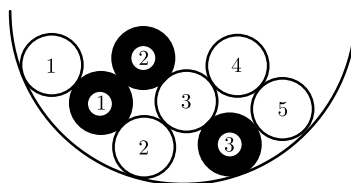
Marc von Wattenwyl, Swiss International School Zürich,
marc.vonwattenwyl@swissinternationalschool.ch

In diesem Beitrag wird für Zufallsversuche mit zwei Ereignissen eine vereinte grafische Darstellung des Mengendiagramms und der beiden Baumdiagramme präsentiert und zur Problemlösung eingesetzt. Es wird gezeigt, dass eine vertiefte Behandlung der Zufallsversuche mit zwei Ereignissen zu interessanten Problemstellungen für den Unterricht führt.

1 Grafische Darstellung für Zufallsversuche mit zwei Ereignissen

Bei einem Zufallsversuch mit zwei Ereignissen treten ganz natürlich acht bedingte Wahrscheinlichkeiten auf, die sich in zwei Baumdiagrammen grafisch darstellen lassen. Das Mengendiagramm und diese beiden Baumdiagramme lassen sich in einem räumlichen Modell vereint darstellen, wenn man eine geschickte Anordnung der Pfade in den Baumdiagrammen wählt.

Beispiel 1 - In einer Urne sind 5 weisse und 3 schwarze Kugeln. Die weissen Kugeln sind von 1 bis 5 nummeriert, die schwarzen von 1 bis 3. Es wird eine Kugel gezogen, wobei die Wahl zufällig und für alle Kugeln gleichwahrscheinlich ist.



Wir betrachten die Ereignisse

A : Die gezogene Kugel ist schwarz.

B : Die gezogene Kugel hat die Nummer 1.

Durch Abzählen findet man

$$P(A) = \frac{3}{8} \quad \text{und} \quad P(B) = \frac{2}{8}$$

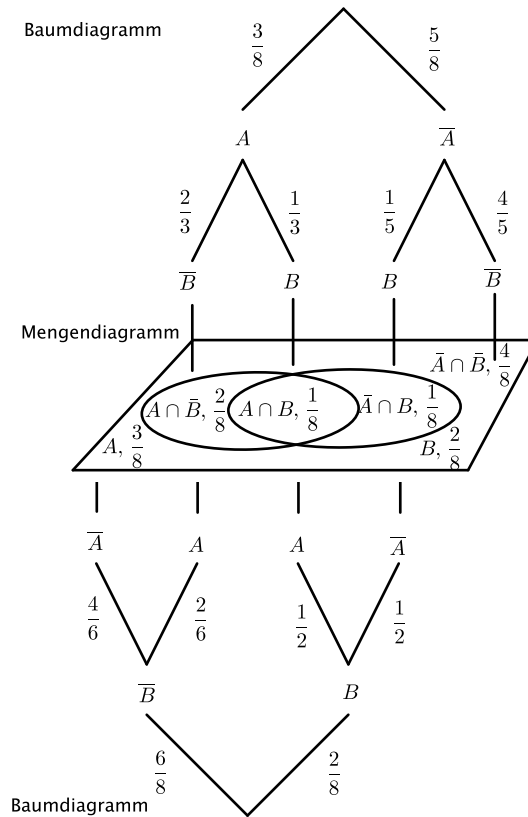
$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{8} \quad \text{und} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{4}{8}$$

sowie

$$P(B|A) = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad P(\bar{B}|A) = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad P(B|\bar{A}) = \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{4}{5}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(\bar{A}|B) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(A|\bar{B}) = \frac{2}{6} \quad \text{und} \quad P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{4}{6}$$

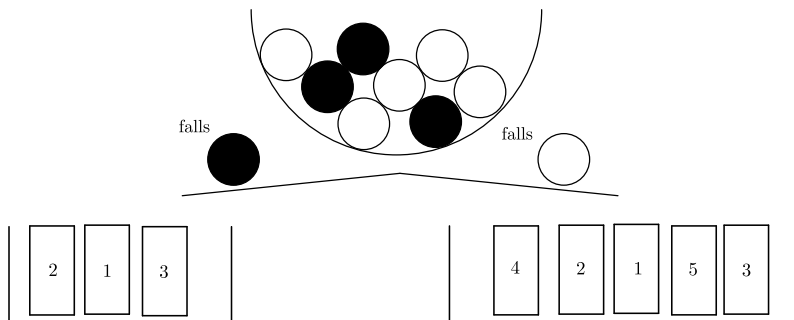
Diese Wahrscheinlichkeiten lassen sich in einem räumlichen Modell, das man Baum-/Mengendiagramm nennen mag, darstellen.



2 Berechnungen im Baum-/Mengendiagramm

Die im Baum-/Mengendiagramm geltenden rechnerischen Zusammenhänge sind bekanntlich die Beziehungen $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ respektive $P(E|F) + P(\bar{E}|F) = 1$, der Satz über bedingte Wahrscheinlichkeiten $P(F) \cdot P(E|F) = P(E \cap F)$ (1. Pfadregel) sowie die axiomatische Bedingung $P(E \cup F) = P(E) + P(F) \Leftrightarrow E, F$ disjunkt (2. Pfadregel).

Beispiel 2 - In einer Urne sind 5 weiße und 3 schwarze Kugeln. In Schachtel 1 sind 3 Karten, die von 1 bis 3 nummeriert sind, in Schachtel 2 sind 5 Karten, die von 1 bis 5 nummeriert sind. Aus der Urne wird eine Kugel gezogen. Wenn diese Kugel schwarz ist, so nimmt man aus Schachtel 1 eine Karte, wenn die Kugel weiss ist, so nimmt man aus Schachtel 2 eine Karte.



Beispiel 2 ist eine zweistufige Variante von Beispiel 1. Betrachten wir die Ereignisse

A: Die bei der 1. Ziehung gezogene Kugel ist schwarz.

B: Die bei der 2. Ziehung gezogene Karte hat die Nummer 1.

Durch Abzählen lassen sich nun lediglich Wahrscheinlichkeiten im oberen Baumdiagramm angeben

$$P(A) = \frac{3}{8} \quad \text{sowie} \quad P(B|A) = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad P(B|\bar{A}) = \frac{1}{5}$$

Die Wahrscheinlichkeiten im Mengendiagramm und im unteren Baumdiagramm müssen mit den Pfadregeln berechnet werden.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{8}$$

$$\text{und somit} \quad P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$$

$$\text{sowie} \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{6}{8}} = \frac{2}{6}$$

Wie zu erwarten war, erhält man exakt dieselben Wahrscheinlichkeiten wie in Beispiel 1. Aus Sicht der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist es nämlich unerheblich, ob der Zufall nur einmal oder zweimal wirkt.

Bemerkung - In Lehrbüchern sind oft nur Beispiele vom Typ des Beispiels 2 vertreten. Bei diesen Beispielen stammen die gegebenen Wahrscheinlichkeiten alle aus dem oberen Baumdiagramm. Interessante Rechenbeispiele entstehen aber erst, wenn man diese Einschränkung fallen lässt.

Beispiel 3 - Joe kommt hin und wieder zu spät zur Schule. Grund sei der verspätete Zug, so Joe, und begründet

- Wenn der Zug Verspätung hat, schaffe ich es nur jedes dritte Mal rechtzeitig zur Schule.
- Wenn ich rechtzeitig bin, war der Zug mit 94%-iger Wahrscheinlichkeit auch pünktlich.
- Der Fall, dass der Zug rechtzeitig ist und ich zu spät zur Schule komme, kommt durchschnittlich nur einmal alle 15 Tage vor.

Die Lehrerin ist skeptisch. Zu Recht? Wir definieren folgende Ereignisse:

A: Der Zug ist pünktlich.

B: Joe kommt rechtzeitig zur Schule.

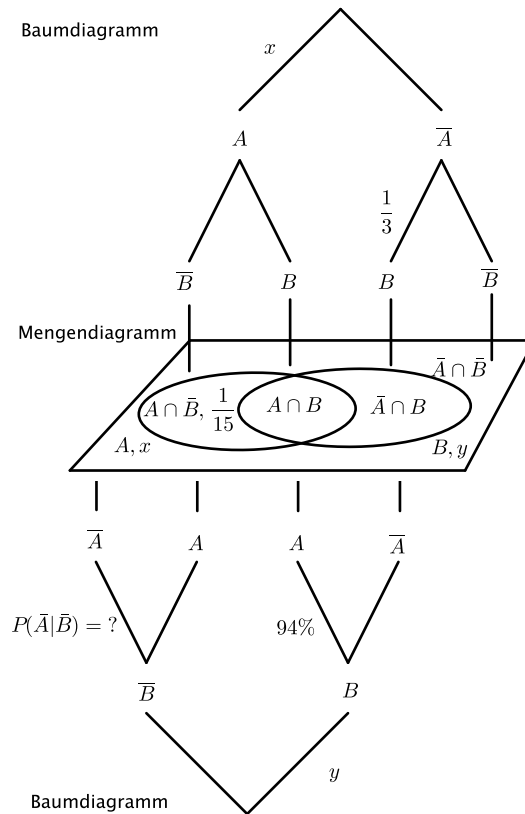
Die gegebenen Wahrscheinlichkeiten sind

$$P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3}, \quad P(A|B) = 94\%, \quad P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{15}$$

Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zug Verspätung hatte, wenn Joe zu spät zur Schule kommt, also die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(\bar{A}|\bar{B})$$

Die gegebenen Wahrscheinlichkeiten und die gesuchte Wahrscheinlichkeit werden nun im Baum-/Mengendiagramm eingetragen. Beim vorliegenden Problem muss zunächst ein Gleichungssystem mit den Hilfsvariablen $x = P(A)$ und $y = P(B)$ gelöst werden, bevor die gesuchte Größe berechnet werden kann.



Die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ lässt sich sowohl durch x als auch durch y ausdrücken

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}) = x - \frac{1}{15} \quad \text{und} \quad P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = y \cdot 94\%$$

Daraus erhalten wir eine erste Gleichung in x und y . Ebenso lässt sich $P(\bar{A} \cap B)$ durch x und auch durch y ausdrücken

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) = (1 - x) \cdot \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad P(\bar{A} \cap B) = P(B) \cdot P(\bar{A}|B) = y \cdot 6\%$$

Daraus erhalten wir die 2. Gleichung in x und y und somit folgendes lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} I \quad x - \frac{1}{15} = y \cdot 94\% \\ II \quad (1 - x) \cdot \frac{1}{3} = y \cdot 6\% \end{array} \right\}$$

mit der Lösung $(x/y) = (\frac{17}{20}/\frac{5}{6})$ und somit

$$P(A) = \frac{17}{20} \quad \text{und} \quad P(B) = \frac{5}{6}$$

Nun gilt

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{10}$$

und somit die gesuchte Grösse

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{5}{6}} = 60\%$$

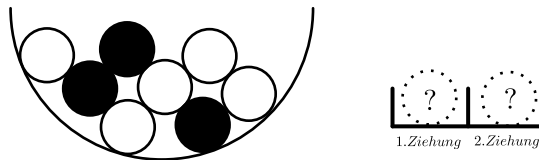
ein Wert, der den Schüler Joe nur teilweise entlastet

Bemerkung - Die beiden Beispiele zeigen, dass sich alle Wahrscheinlichkeiten im Baum-/Mengendiagramm berechnen lassen, wenn drei Wahrscheinlichkeiten vorgegeben sind. Diese Beobachtung lässt sich an vielen weiteren Beispielen bestätigen und schliesslich auch formal beweisen.

3 Vereinfachungen des Baum-/Mengendiagramms

Beispiel 4 - Eine Urne enthält 3 schwarze und 5 weiße Kugeln. Man zieht nacheinander zwei Kugeln und legt sie beiseite. Wir betrachten die Ereignisse

- S1: Die Kugel, die als erstes gezogen wird, ist schwarz.
- S2: Die Kugel, die als zweites gezogen wird, ist schwarz.



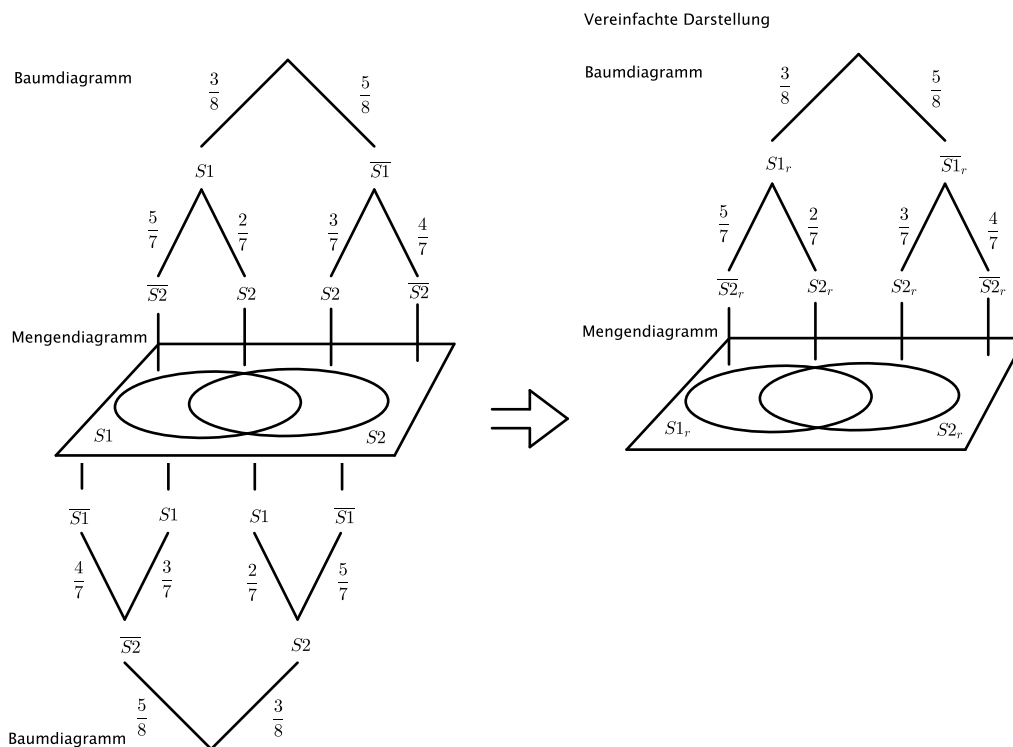
Durch Abzählen lassen sich die Wahrscheinlichkeiten im oberen Baumdiagramm angeben

$$P(S1) = \frac{3}{8} \quad \text{sowie} \quad P(S2|S1) = \frac{2}{7} \quad \text{und} \quad P(S2|\bar{S1}) = \frac{3}{7}$$

Es gilt dann

$$P(S2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{8} = P(S1)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine schwarze Kugel gezogen wird, ist somit bei beiden Ziehungen gleich gross¹. Das vollständige Baum-/Mengendiagramm sieht dann wie folgt aus (links)

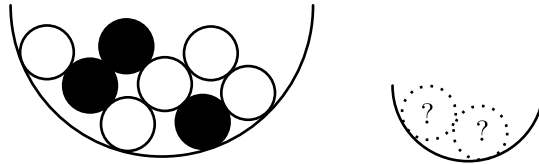


Die beiden identischen Baumdiagramme bringen zum Ausdruck, dass die Unterscheidung zwischen der ersten und zweiten Ziehung unwesentlich ist. Dies motiviert eine Neudefinition der Ereignisse

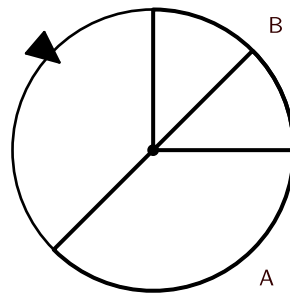
- S1_r: Die Kugel, deren Farbe als erstes registriert wird, ist schwarz.
- S2_r: Die Kugel, deren Farbe als zweites registriert wird, ist schwarz.

¹Wenn wir die 1. Kugel ziehen *ohne* deren Farbe zu registrieren, beträgt die Wahrscheinlichkeit, bei der zweiten Ziehung eine schwarze Kugel zu ziehen also $\frac{3}{8}$. Der Umkehrschluss, dass im Moment der zweiten Ziehung 3 von 8 Kugeln schwarz sind, ist jedoch nicht zulässig. Paradox ?

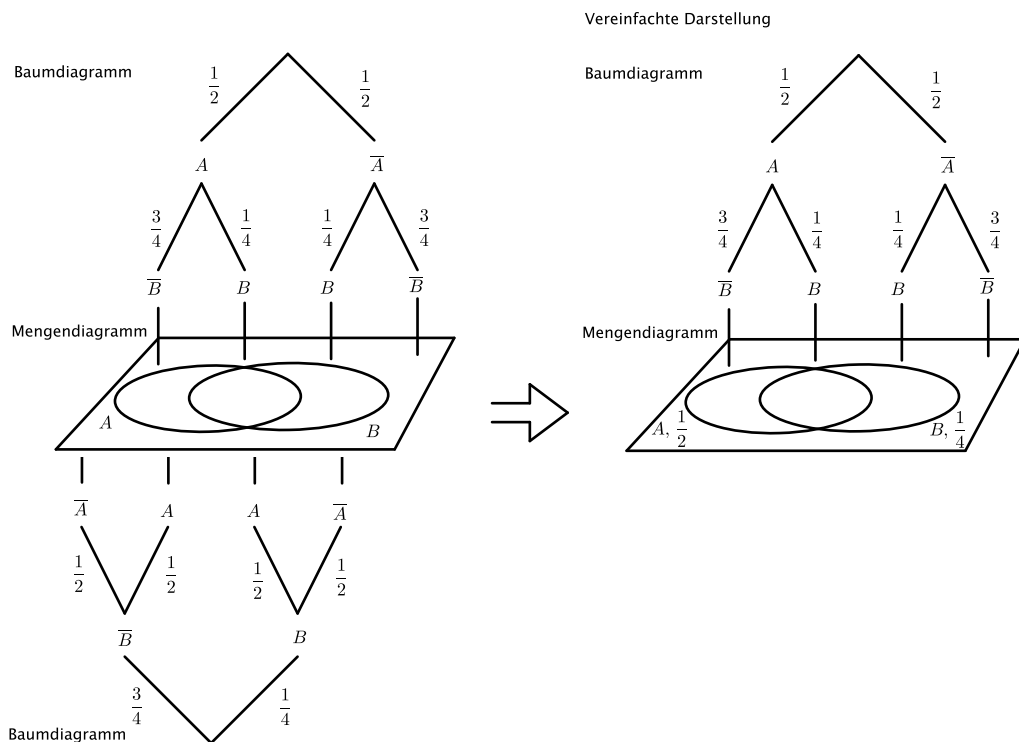
und eine veränderte Sichtweise des Zufallsversuchs. Die beiseite gelegten Kugeln werden nicht in der Reihenfolge der Ziehung abgelegt, sondern blind in eine zweite Schale gelegt. Die Farbe registrieren wir erst, wenn wir die Kugeln aus dieser zweiten Schale nehmen und anschauen. Zu den Ereignissen $S1_r$ und $S2_r$ gehört dann die vereinfachte Darstellung mit nur einem Baumdiagramm. Das zweite Baumdiagramm kommt nicht vor, da $S2_r$ per Definition nicht vor $S1_r$ eintreten kann.



Beispiel 5 - Auf einem Glücksrad sind die Sektoren A und B gezeichnet. Sektor A ist ein Halbkreis, Sektor B ein Viertelkreis. Zudem halbiert Sektor A den Sektor B . Ein Ereignis, etwa das Ereignis A , tritt ein, wenn der Zeiger bei Stillstand auf den entsprechenden Sektor zeigt. Das Glücksrad werde einmal gedreht.



Wegen $P(A) = P(A|B) = \frac{1}{2}$ sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig. In diesem Fall verlieren die Baumdiagramme ihren eigentlichen Zweck - die grafische Darstellung bedingter Wahrscheinlichkeiten - und das Mengendiagramm wäre ausreichend zur grafischen Darstellung der wesentlichen Wahrscheinlichkeiten. Um grafisch ersichtlich zu machen, dass die Ereignisse stochastisch unabhängig sind, ist es dennoch sinnvoll, eines der beiden Baumdiagramme zu zeichnen.



Congrès UdPPC Dijon, 26-27-28 octobre 2016

Roulet Didier, didier.roulet@infomaniak.ch

Le congrès de l'Union des professeurs de Physique et Chimie Français avait lieu cette année sur le site de l'université de Bourgogne à Dijon. C'est un très vaste campus, puisque 27000 étudiantes et étudiants le fréquentent. Fort heureusement pour nous, la congrès se déroulait durant les vacances, si bien que la circulation était partout très agréable.

Le congrès, organisé comme d'habitude par l'équipe régionale de l'UdPPC, était traditionnellement partagé entre conférences plénières et petites conférences ou ateliers, auxquels on participait sur inscription, mais contrairement à ce que nous pratiquons d'ordinaire dans nos formations continues, il n'y avait pas de thème général.

J'ai ainsi pu en savoir davantage sur les ondes gravitationnelles, sur les satellites d'observation astronomique, sur les ciments et bétons, sur le vin, sur la genèse de la loi d'Ohm, sur la dynamique des fluides, et j'ai même pu réaliser un hologramme. A ce programme il faut ajouter la possibilité de découvrir les nouveautés des fabricants de matériel d'expériences, de discuter avec eux, et d'aller sur les stands des éditeurs pour y feuilleter une grande partie de leurs collections.

A côté de cette abondance de connaissances offertes, un aspect dont il ne faut pas négliger l'importance est celui des rencontres entre collègues, toujours cordiales, et qui parfois peuvent aboutir sur des amitiés durables. Soulignons que ces rencontres sont internationales, puisque l'UdPPC invite des représentants d'Allemagne, de Belgique, d'Italie et de Suisse. Il est très appréciable de pouvoir ainsi rencontrer une fois l'an des collègues de l'étranger.

Merci donc à l'UdPPC pour son invitation; puisse cette tradition se poursuivre encore longtemps.

Dichteste Spaghettipackung

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Wie viel Luft ist eigentlich noch zwischen den Spaghetti in der Packung? Lässt sich das von aussen ohne Röntgentomograph feststellen? Es kommt nicht in Frage, das Bündel ins Wasser zu tauchen, weil dann die Spaghetti quellen. Aber da ich gerade das Thema Dichte mit meinen Zweitklässlern abgeschlossen hatte, stand mir ja die Technologie zur Verfügung!

2 Experiment

Eine Packung getrockneter Spaghetti wog 523.14 g, wovon etwa 1 % auf die Plastikfolie fiel. Bündelte ich die Spaghetti zu einem Kreiszylinder und mass mit einem Rollmeter den Umfang, so erhielt ich 16.0 cm. Ich habe am metallischen Messband gezogen, um das Bündel etwas zu komprimieren.

Ich zupfte zehn Spaghetti heraus, mehr wollte ich nicht opfern. Sie wogen zusammen 9.95 g, waren im Durchschnitt 24.3 cm lang und hatten 1.95 mm Durchmesser. Alle Angaben sind auf Grössenordnung 1 % genau.

Aus den genannten Angaben erhält man eine mittlere Bündeldichte von 1.06 g/cm^3 und eine Spaghettodichte von 1.37 g/cm^3 . Das Dichteverhältnis beträgt 0.77, d.h. ein kompaktes Spaghettibündel besteht zu etwa $3/4$ aus getrocknetem Teig.

3 Theorie

Die Spaghetti sind etwas unregelmässig im Bündel angeordnet. Welches Verhältnis würde man denn nach Theorie erwarten, wenn die Anordnung regelmässig wäre? In Anlehnung an die Kristallographie habe ich die Anordnungen in Abbildung 1 als kubisch und in Abbildung 2 als hexagonal bezeichnet, aber ich rechne nur zweidimensional, d.h. ein Spaghetto erscheint im Querschnitt als Kreis.

Abbildung 1: Kubische Anordnung von Spaghetti auf einem periodischen Gitter

Wenn ein Spaghetto Durchmesser d hat, so ist d^2 die Fläche der Einheitszelle und $\frac{\pi}{4}d^2$ die (braun gefärbte) Fläche des Teigs in der Zelle. Das Verhältnis ist somit $\pi/4 = 0.785$.

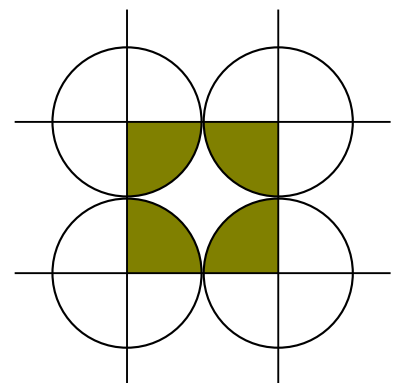
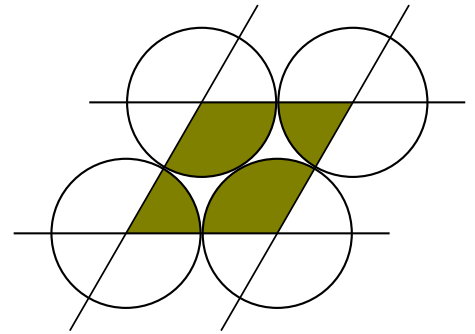


Abbildung 2: Hexagonale Anordnung von Spaghetti auf einem periodischen Gitter

Die braune Fläche stellt den Teiganteil $\frac{\pi}{4}d^2$ der Spaghetti in der Einheitszelle dar, welche ihrerseits Fläche $\frac{\sqrt{3}}{2}d^2$ hat. Der relative Anteil der braunen Fläche beträgt somit $\pi/(2\sqrt{3}) = 0.907$.



4 Diskussion

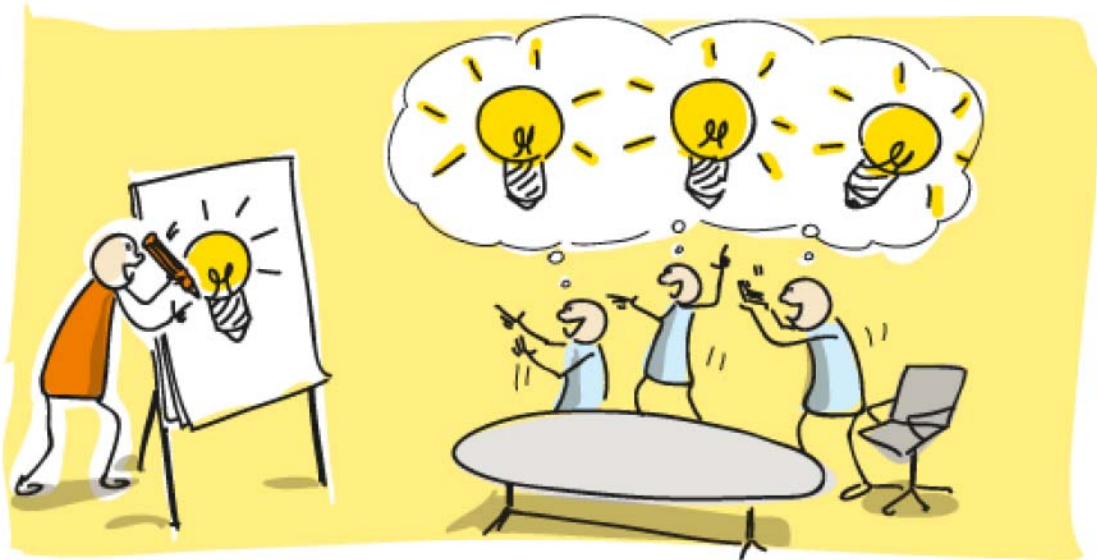
Der Vergleich von Theorie und Experiment zeigt, dass die Dichte der Spaghetti im Bündel im Bereich jener eines “kubischen Gitters” liegt (mit einer recht grossen Fehlerschranke). In Wirklichkeit sind die Spaghetti unregelmässig angeordnet. Leider habe ich keine passende Methode gefunden, wie man Kreisscheiben in der Ebene zufällig verteilen kann unter der Nebenbedingung, dass sie sich teilweise berühren und nicht überschneiden, sonst hätte ich das simuliert.

Die zweidimensionale Rechnung ist so einfach, dass sie im Anfangsunterricht durchgeführt werden könnte. Wer noch den Schritt ins Dreidimensionale wagen möchte, kann die dichteste Kugelpackung oder die – jetzt vermutlich bewiesene [1] – Keplervermutung vorstellen.

Literatur

- [1] https://de.wikipedia.org/wiki/Keplersche_Vermutung (Abruf am 25. November 2016)
25. November 2016, Lie.

Weiterbildungs-Veranstaltung: *Wissenschaftliches Illustrieren*



Im naturwissenschaftlichen Unterricht stellt sich uns immer wieder das Problem, Theorien, Experimente und die dazugehörigen Vorgänge möglichst einfach aber doch korrekt so darstellen zu können, dass die wesentlichen Punkte deutlich werden. Sei dies auf makroskopischer, mikroskopischer oder molekularer Ebene. Eine „Begabung“ zum Zeichnen ist dabei nicht entscheidend, vielmehr geht es um die richtige Technik!

Diese wird uns Roland Siegenthaler (www.echtpraktisch.ch) im Kurs vermitteln. Er ist ein Visualisierungsprofi, der seit Jahren naturwissenschaftliche Illustrationen erstellt und regelmässig entsprechende Kurse anbietet.

Der Workshop soll uns nicht nur beibringen, wie Illustrationen grundsätzlich angegangen werden können; die Teilnehmer sollen möglichst schon mit konkreten „Problemen“ an den Kurs kommen, welche dann unter Anleitung bildlich umgesetzt werden. Alle für den Naturwissenschaftsunterricht relevanten Darstellungen werden dann gesammelt und den Kurs-Teilnehmern zur Verfügung gestellt.

Datum, Zeit, Ort

Montag, 20. März 2017 – 9.00 bis 16.30 – MNG Rämibühl, Zürich

Programm

Morgen	Input: Wo helfen Bilder? Eine Idee aufs Papier bringen! Visuell denken: Auf gute Bildideen kommen, komplexe Prozesse überschaubar machen
Mittagessen	In der Mensa Rämibühl (inbegriffen)
Nachmittag	In die Praxis: Ideen visualisieren: Neue Konzepte fassbar machen Komplexe Prozesse überschaubar machen Story Telling: Mit einer Geschichte überzeugen Strategien zum Weiterzeichnen

Kosten

Für DCK/VSN oder VSMP-Mitglieder kostet der Kurs 220, für Nichtmitglieder 250 Franken. Nichtmitglieder können auch mit der Anmeldung den Beitritt zum VSN und/oder der DCK oder zum VSMP erklären, dann kostet der Kurs natürlich ebenfalls 220 Franken. Im Kursgeld inbegriffen sind Pausenverpflegungen, Mittagessen und Zeichenmaterial.

Veranstalter

Deutschschweizer Chemielehrerkommission (DCK) des VSN (www.vsn.ch)
Deutschschweizerische Physikkommission DPK (www.dpk.ch) des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte VSMP (www.vsmpp.ch)

Anmeldung

Anmeldung per Mail an Lorenz Marti, MNG Rämibühl, Zürich: enzo.marti@c3d.ch. Bitte angeben, ob DCK/VSN oder VSMP-Mitglied.

DIE NEUEN VERNIER-PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

educatec.ch/vernier

VERNIER DYNAMICS SYSTEM



Mit dem Vernier Dynamics System, einer für den Physikunterricht konzipierten Fahrbahn, wird es einfach Newtons zweites Gesetz, die Beschleunigung auf der schiefen Ebene und vieles mehr zu demonstrieren.

Vernier-Sensoren wie Bewegungsdetektor, Zweibereichkraftsensor, Wireless Dynamics Sensor System, Lichtschranke und Beschleunigungsmesser können leicht am Dynamics System befestigt werden. Weiterhin können Sie die Schiene zu einer optischen Bank verwandeln oder mit dem Schienenverbinder beliebig verlängern.

Ein ausführlicher Beschrieb des Systems ist mit Experimenten als PDF unter educatec.ch/dynamic-track-system einsehbar.



DIREKT
ZUM SHOP

VERNIER MOTION ENCODER SYSTEM

Der Motion Encoder Wagen ersetzt den Ultraschall-Entfernungsdetektor im Einsatz bei Versuchen zur Dynamik mit Wagen und Schiene. Ein optischer Sensor erfasst die Bewegung des Wagens über einen Lineal auf der Schiene. Die Position wird über ein kodiertes Infrarot-Signal an einen Empfänger am Ende der Schiene übermittelt. Dieses Verfahren eliminiert Störungen durch Reflexionen und Störgeräusche, wie sie bei Ultraschallmessungen auftreten. Das optische System garantiert genaue und wiederholbare Ergebnisse.



DIREKT
ZUM SHOP

worlddidac
AWARD 2014

VERNIER OPTIK-SYSTEM



Mit dem Erweiterungssatz Optik wird die Vernier-Schiene zur optischen Bank. Damit sind Experimente bis hin zum Aufbau eines einfachen Teleskops möglich. Das Optik-System kann zudem mit einem Farbmisch-Kit, einem Spiegel-Set, einem Apparat zur Lichtbrechung sowie einem Polarisator/Analysator-Set erweitert werden.



DIREKT
ZUM SHOP


Measure. Analyze. Learn.™

Möchten Sie mit uns in Kontakt bleiben und über unsere neuesten Aktivitäten informiert werden? Dann registrieren Sie sich jetzt unter educatec.ch/account in unserem Online Shop.

Alle unsere Kataloge finden Sie online unter educatec.ch/katalogs

EducaTec AG

Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63
contact@educatec.ch, www.educatec.ch



Herausgeber — *Éditeur*
VSMP — SSPMP — SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
Weinbergstrasse 48b Tel. 079 728 63 97
5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 032 512 0 128
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
3000 Bern
Tel. 056 443 14 54 / Fax. 056 443 06 04
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnés:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Auflage — *Tirage*

900 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Domenico Galli 44
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Daniela Grawehr grawehr@kfanet.ch
Schützenstrasse 36 Tel. 041 810 49 88
6430 Schwyz

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Strandweg 17 Tel. 034 423 46 43
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano tatiana.mantuano@gfbienne.ch
rue Louis-de-Meuron 4 Tél. 032 544 47 53
2074 Marin-Epagnier

Commission Romande de Physique

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 134	31.03.2017 (20.05.2017)
Nr. 135	31.07.2017 (20.09.2017)
Nr. 136	30.11.2017 (20.01.2018)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch