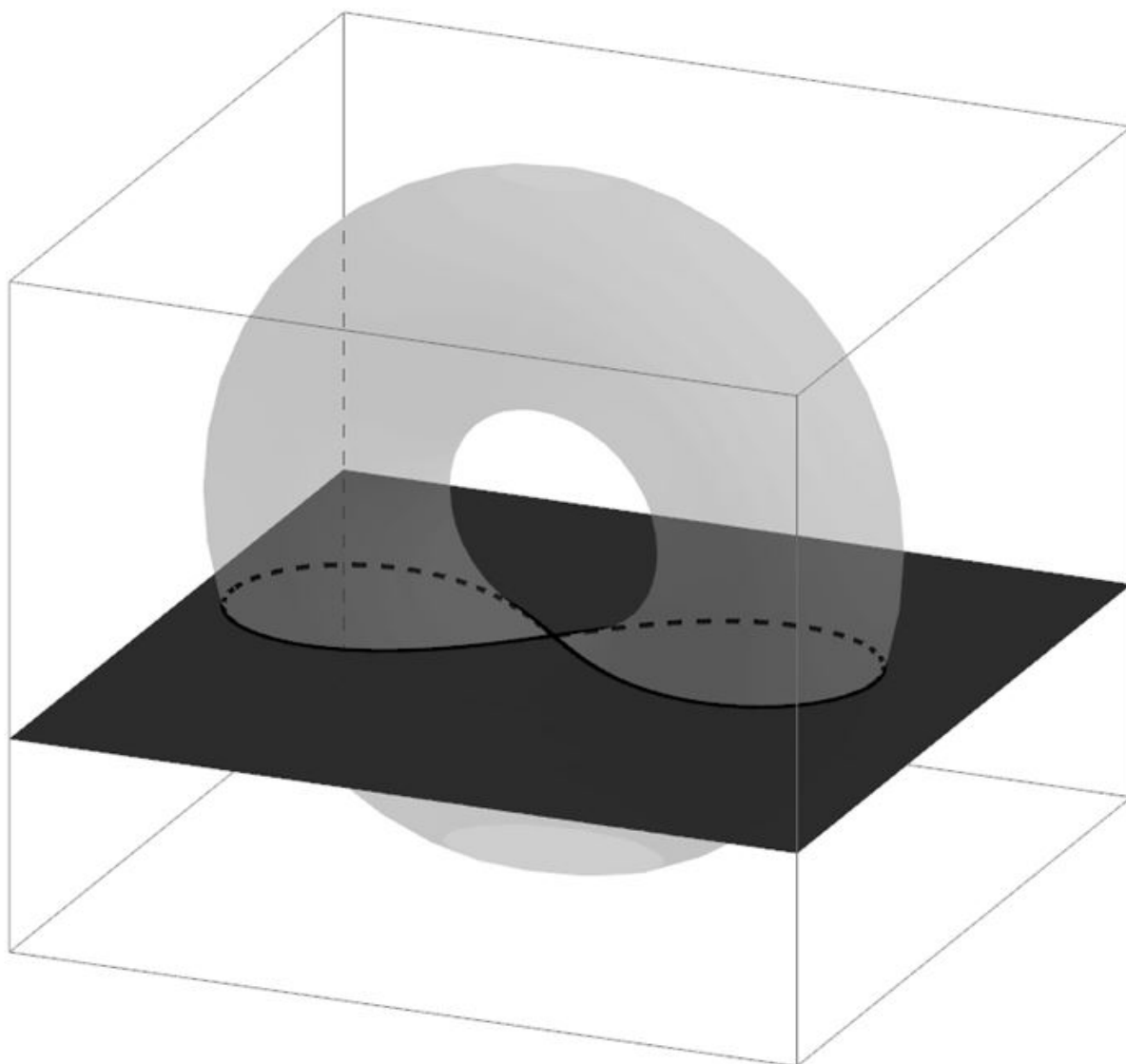


V S M P
S S P M P
S S I M F

Bulletin

Januar 2020 — Janvier 2020 — Gennaio 2020

N° 142



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica

Internet-Adressen — *Adresses Internet*
www.vsmp.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — *Page de Titre*
Lemniskate als Schnittfigur (Artikel auf Seite 6 in dieser Ausgabe)

In dieser Ausgabe — *Dans ce numéro*

VSMP – SSPMP – SSIMF	2
Arno Gropengiesser Jahresbericht 2018/19 des VSMP	2
Deutschschweizerische Mathematikkommission	6
Juan Läuchli Die Bernoulli'sche Lemniskate im Unterricht	6
<i>Kurs: GeoGebra 1: Grundlagen der Bedienung</i>	12
<i>Kurs: GeoGebra 2: Anschuliche Zugänge zur Analysis</i>	13
Nina Stumpf, Ondrej Budac Bereit für Náboj 2020?	14
Marco Gerber Was sagt eine Medaille über den späteren Berufserfolg aus?	16
<i>Kurs: Elliptische Kurven und ihre Anwendung in der Kryptographie</i>	18
Schweizerische Mathematische Gesellschaft Matura Awards 2020	19
Deutschschweizerische Physikkommission	20
Martin Lieberherr Einheiten 2.0	20
Hans Kammer Im Gedenken an Aegidius Plüss	23
Commission Romande de Mathématique	24
Alexandre Junod Le nombre d'Euler	24
Damien Dobler Mathématiques et Société	28
Hans Walser Le théorème d'Eddy	30
Société Mathématique Suisse Matura Awards 2020	33

Jahresbericht 2018/19 des VSMP

Im abgelaufenen Vereinsjahr (November 2018 bis Oktober 2019) fanden – einmal abgesehen von der GV vom 30. November 2018 in Neuchâtel – wiederum zwei Nachmittagsitzungen (23. Januar 2019 in Bern; 8. Mai 2019 in Zürich) und die gleichermaßen traditionelle wie ersehnte Weekend-Sitzung in Obergesteln (Samstag/Sonntag, 7./8. September 2019) statt. Ergänzt wurden unsere Sitzungsarbeiten durch die Mitwirkung einiger Mitglieder des Vorstandes bei verschiedenen Veranstaltungen des VSG (Verein Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Gymnasiallehrer), so zum Beispiel Präsidenten-Treffen oder Präsidenten-Konferenzen oder Konferenz Übergang Sek I/II.

Die Hauptthemen, die sich der VSMP vornahm, waren die Mitgliederwerbung, die Probleme bei Entlastungen von Kommissionsmitgliedern, die Umsetzung der Einführung des obligatorischen Faches Informatik in den Kantonen und die Zusammenarbeit mit dem ZEM-CES.

Zu den sowohl alltagsnahen wie schulwirksamen Aktivitäten der 5 Kommissionen gehören einige zusätzliche Weiterbildungskurse und -tagungen, Exkursionen, mathematische Wettbewerbe und Camps. Und nicht vergessen möchte ich die diversen Fachartikel, Rezensionen, Berichte und Veranstaltungshinweise in unserem «Bulletin», das dreimal jährlich erscheint (jeweils Ende Januar, Mai und September).

Zusammensetzung des Vorstandes

Folgende Kolleginnen und Kollegen gehörten (samt Kommissionszugehörigkeit; VSMP-Funktion) in der Berichtsperiode dem VSMP-Vorstand an: Samuel Byland (DPK; Webmaster und Redaktor des Bulletins), Stéphane Davet (président de la CRP); Arno Gropengiesser (CMSI; presidente); Tatiana Mantuano (présidente de la CRM); Franz Meier (DMK; Sekretär); Andrea Pellegrinelli (CMSI); Yves Roisin (CRM; caissier); Luca Rovelli (presidente della CMSI); Didier Roulet (CRP); Hansjürg Stocker (DMK; Vizepräsident); Christian Stulz (DPK-Präsident); Patrick Turtschy (CRM; vice-président); Stefan Walser (DPK; Inserate-Verwalter); Josef Züger (DMK-Präsident).

Mutationen

- Fürs laufende Vereinsjahr gibt es folgende personelle Veränderung im 14-köpfigen Vorstand. Stefan Walser tritt nach langjährigem Engagement aus dem Vorstand aus. Er tritt die Funktion des Inserate-Verwalters an Hansjürg Stocker (DMK) ab, welcher diese Aufgabe interimistisch übernehmen wird. Der Vorstand, der auf 13 Personen schrumpft, bemüht sich, einen neuen Inserate-Verwalter zu finden.
- Unser Fachverein zählt derzeit 546 Mitglieder (Stand Dezember 2018, Vorjahr 555). Die leichte Abnahme bestätigt den mehrjährigen Trend: Die Neumitgliedschaften (meist durch Werbung an Weiterbildungs-Veranstaltungen) kompensieren die Austritte (hauptsächlich wegen Pensionierung) nicht. Daher hat der Vorstand weitere Anstrengungen unternommen und ein Strategiepapier entworfen. Einige davon konnten schon umgesetzt werden, um neue (junge) Mitglieder zu gewinnen. Die Verteilung des neuen Flyers gekoppelt mit Präsentationen des VSMP an Weiterbildungsveranstaltungen haben im letzten Herbst erste erfreuliche Zahlen bei den Neumitgliedschaften gebracht. Diese Aktionen sollen im nächsten Jahr erweitert und ausgedehnt werden (Versand an Fachschaften und Schulen). Mit dem VSG und dessen Fachvereinen bzw. Kantonalverbänden sind auch Gespräche im Laufen, um gemeinsame und koordinierte Anstrengungen bei der Mitgliederwerbung zu realisieren.

Aktuelle Projekte

- Die in den letzten Jahren schwindenden Mitgliederzahlen – die pensionsbedingten Austritte werden nicht immer ausreichend durch Neueintritte von (jungen) Kolleginnen und Kollegen ausgeglichen – haben nach einer Strategie und nach Überlegungen gerufen, wie der Verband wirksamer auftreten kann. Erste Anzeichen einer Trendwende sind jetzt, nach den eingeleiteten Massnahmen, erfreulicherweise sichtbar. Der Vorstand ist dennoch überzeugt, dass weitere Anstrengungen nötig sind: Der neue Flyer (in den drei Landessprachen und mit Gründen für einen Eintritt in den VSMP) steht seit Anfang 2018 zur Verfügung und wird eine flächendeckendere Mitgliederwerbung ermöglichen. Strategien hierzu wurden erarbeitet und die ersten wurden schon in diesem Verbandsjahr umgesetzt (weiterhin Werbung anlässlich von Weiterbildungskursen, verschiedenartige Beilagen für das GH und das Bulletin, Werbematerialien für die Schulen, Zusammenarbeit mit den Organisatoren der Schweizer Olympiaden (Physik und Mathematik), wirksame Platzierung des VSMP-Logos bei Zusammenarbeiten und Veranstaltungen, Vorrang für VSMP Mitgliedern an Weiterbildungskursen der Kommissionen, usw.). Der VSG, der unsere Mitgliederdaten verwaltet, ist dabei, die ganze Datenbank zu erneuern und zu aktualisieren (Schulhaus, unterrichtete Fächer, usw.),

welche uns demnächst voll zur Verfügung stehen sollte. Dies wird uns ermöglichen, gezielt Fachschaften, Schulen oder Institutionen anzusprechen, um dort für unseren Verein zu werben. So können wir auch aktive Mitglieder zu Boten oder Werbeträgern bei (jüngeren) Kollegen im Schulhaus verpflichten. Auch den 5 Kommissionen sei an dieser Stelle für ihre intensivierten diesbezüglichen Anstrengungen ausführlich gedankt. Eine regelmässige Evaluation der eingeleiteten Anstrengungen soll auch weiterhin dafür sorgen, dass wir den Erfolg beurteilen und eventuelle Kurskorrekturen anbringen können. Dieses zentrale Thema hat uns in allen Sitzungen beschäftigt, auch bei den Kontakten mit dem VSG.

- Die Einführung der Informatik als obligatorisches Fach in der gymnasialen Ausbildung ist nun beschlossene Sache und die Umsetzung läuft in den meisten Kantonen. Der VSMP hat sich seit Beginn der politischen Diskussion für das Thema interessiert (Stichwort Einführung des Faches I auf „Kosten“ von M oder P). Seit März 2015 hat sich die gemeinsame Arbeitsgruppe unter der Leitung von Andrea Leu (Senarclens & SVIA) regelmässig getroffen und zwei gemeinsame Positionspapiere erarbeitet (wurden von den Vorständen des VSMP und der SVIA genehmigt). Die Herausgabe an ein breites Publikum geschah im November 2016, und stiess auf positives Echo, wie die Antworten der EDK, der SMAK, des SBFI (Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation), des Erziehungsdepartementes des Kanton Basel Stadt und der Bildungsdirektion des Kanton Zürich zeigten. Der VSMP wurde explizit zur Anhörung zum neuen Rahmenlehrplan und der Einführung des Faches Informatik eingeladen und gab seine Stellungnahme im Mai 2017 ab. Am 27. Oktober 2017 beschloss die Plenarversammlung der EDK, Informatik als obligatorisches Fach (aber nicht als Grundlagenfach, wie vom VSMP bevorzugt) einzuführen. Es ist als Teil des Lernbereichs „Naturwissenschaften und Mathematik“ vorzusehen. Der Rahmenlehrplan Informatik wurde auch verabschiedet und ersetzt den Rahmenlehrplan Informatik für die Maturitätsschulen vom 12. Juni 2008. Die AG mit der SVIA bleibt weiter bestehen (Mitglieder für den VSMP: Arno Gropengiesser, Jean-Marc Ledermann und Hansjürg Stocker), um die Umsetzung der Einführung zu verfolgen und insbesondere darauf zu achten, dass dies nicht auf Kosten der Fächer Mathematik und Physik erfolgt. Auch den zu erwartenden Vorschlägen im Bereich der Lehrerinnen- und Lehrerbildung soll unser Augenmerk geschenkt werden. Hierfür hat der VSMP eine von der SVIA lancierte Umfrage bei Schulen und Lehrkräften tatkräftig aber auch finanziell unterstützt. Die ersten Ergebnisse liegen vor und zeigen ein tendenziell positives Bild. Dennoch wurde der VSMP aktiv, zusammen mit der CRP, weil im Kanton Wallis die Einführung der Informatik wohl eine Kürzung um eine Jahreslektion bei der Physik-Dotation zur Folge haben wird. Auf den gemeinsamen Brief an das kantonale Mittelschulamt ist noch keine Antwort eingetroffen.
- Der VSMP wurde vom ZEM-CES gebeten, an einem Pilotprojekt für eine landesweite E-Plattform für Weiterbildung Angebote teilzunehmen. Der Vorstand hat zugesagt (Stichwort wirksame Werbung des Vereins und dessen Angebote) und das Projekt wird im Jahr 2020 getestet. Gleichzeitig sollen die Weiterbildungskurse der Kommissionen auch noch zusätzlich einheitlich auf der Homepage des VSMP erscheinen.
- Bezüglich weiterer Projekte und Weiterbildungsveranstaltungen verweise ich auf die Jahresberichte der 5 Kommissionen.

VSG, ZEM-CES, SMG, SPG, SCNAT und EDK

- Der Kontakt zum VSG wickelt sich vor allem über die Präsidentenkonferenzen ab, die halbjährlich angesetzt sind (in der Regel Mitte März und Mitte September). Hinzu kommt das alljährliche Präsidententreffen im Mai, das mehr dem informellen Gedankenaustausch dient und jeweils von einem Kantonalverband organisiert wird. Derzeit stehen verschiedene politische Forderungen des VSG im Zentrum (Weiterentwicklung der gymnasialen Maturität, Anhörung zum Bericht „Zukunft der gymnasialen Maturität“, Eckwerte des VSG zur Revision des Maturitätsanerkennungsreglements (MAR), Studien des VSG zum Beschäftigungsgrad, zur Lohnentwicklung und zur Motivation, das GH informiert regelmässig). Zusätzlich hat der Zentralvorstand des VSG sich bei einem wichtigen Anliegen des VSMP engagiert: der zunehmenden Kürzung oder gar Streichung der Entlastungen oder Freistellungen bei der Teilnahme an den Kommissionsarbeiten. Ein aktueller Fall aus dem Kanton Wallis (Streichung tout-cour der Freistellung, Zwang unbezahlten Urlaub zu nehmen) bewog den VSG, einen Brief an den Vorsteher des Walliser Erziehungsdepartementes zu schreiben, mit der Bitte auf die Entscheidung zurückzukommen. Eine Antwort ist bis dato noch nicht eingetroffen. Der VSG hat diese Anliegen diesen Herbst auch bei der SMAK und der EDK eingebracht. Wir sind gespannt, ob sich diesbezüglich Verbesserungen zeigen werden, beziehungsweise ob die wichtige Arbeit in den Kommissionen gebührend anerkannt wird oder werden wird.
- Als Weiterbildungsdelegierter des VSMP (Bindeglied zwischen dem VSMP und der WBZ) fungierte bis zur Umwandlung der WBZ in die ZEM-CES Hansjürg Stocker; ebenso ist er Kontaktperson zur SCNAT. Dort ist er auch Mitglied der «Kommission für Nachwuchsförderung».

- Im Beirat der ZEM-CES ist Arno Gropengiesser im Jahr 2018 als Vertreter des VSG (und indirekt auch des VSMP und des Kantons Tessin) gewählt worden. Wir können so unsere Anliegen über die Organisation von Weiterbildungen in diesem wichtigen Gremium der EDK direkt einbringen.
- In der SMG (Schweizerische Mathematische Gesellschaft) sind Tatiana Mantuano (CRM) und Hansjürg Stocker (DMK) die beiden Delegierten „en relation des gymnases“.
- Mit der SPG (Schweizerische Physikalische Gesellschaft), mit der vor zwei Jahren ein Doppelmitgliedschaftsabkommen abgeschlossen wurde, ist eine konkrete Zusammenarbeit wiederholt worden: das Symposium „Von Bürgis Uhren zur Femtosekunde. Eine kurze Geschichte der Zeitmessung“ in Lichtensteig (Toggenburg) am 4. Mai 2019. Als Delegierte bei der SPG für Themen gemeinsamen Interesses fungieren Samuel Byland, Stefan Büchler (beide DPK) und Stéphane Davet (CRP).

Abschliessen will ich meinen Jahresrückblick mit einem aufrichtigen und grossen Dank an alle meine Vorstandskolleginnen und -kollegen. Ihr engagierter Einsatz für die Physik und Mathematik sowie den dazugehörigen Unterricht, ebenso deren äusserst konstruktive Zusammenarbeit im Vorstand über die sprachlichen und fachlichen Unterschiede hinweg – und dies kann niemals genügend unterstrichen werden – verdienen starke Anerkennung und grossen Respekt. Diesbezüglich sei hier nochmals Stefan Walser für seine langjährige Arbeit als Inserateverwalter des «Bulletin» und für seine immerwährende und geschätzte Freundschaft ganz herzlich gedankt.

Seinem interimistischen Nachfolger Hansjürg Stocker, der sich bereits vielfältig dafür eingebracht hat, wünsche ich viel Erfolg beim Erwerben neuer Inserate für das «Bulletin».

Locarno, Ende November 2019

Arno Gropengiesser, Präsident des VSMP/SSIMF/SSPMP

- Die illustrierte Aufgabensammlung, passend zum Lehrmittel.
- Mehr als 400 Aufgaben auf verschiedenen Schwierigkeitsstufen.
- Erworbene Physik-Kenntnisse festigen und Lerninhalte gezielt anwenden.



Symposium «Berufsbild
Physik – Jugendliche für
die Materie begeistern»,
27. Februar 2020
[www.hep-verlag.ch/
symposium-physik](http://www.hep-verlag.ch/symposium-physik)



kompetent bilden.

hep verlag ag
Gutenbergstrasse 31
Postfach
CH-3001 Bern

Tel. 031 310 29 29

info@hep-verlag.ch
www.hep-verlag.ch

Hans Kammer, Irma Mgeladze

Physik für Mittelschulen. Aufgaben

1. Auflage 2019

280 Seiten, 17 x 24 cm, Broschur

ISBN 978-3-0355-1436-0

CHF 38.–

Die Bernoulli'sche Lemniskate im Unterricht

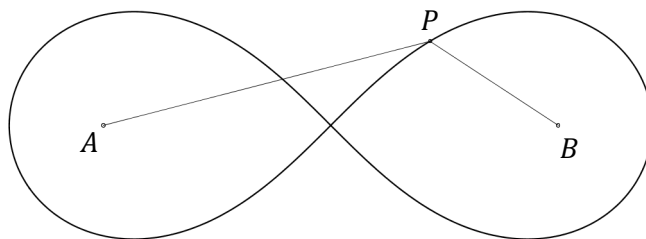
Juan Läuchli, Kantonsschule Frauenfeld, juan.laeuchli@kftg.ch

Um die üblichen Lehrplaninhalte zu vertiefen ist es wünschenswert, den Lernstoff mit kurzen Ausblicken zu erweitern. Die faszinierende Bernoulli'sche Lemniskate bietet auch für das Grundlagenfach Mathematik einige Anknüpfungsmöglichkeiten. In diesem Artikel geht es darum, wie und in welchen Zusammenhängen man diese schöne Kurve im Mittelschulunterricht einsetzen könnte. Siehe dazu auch [1].

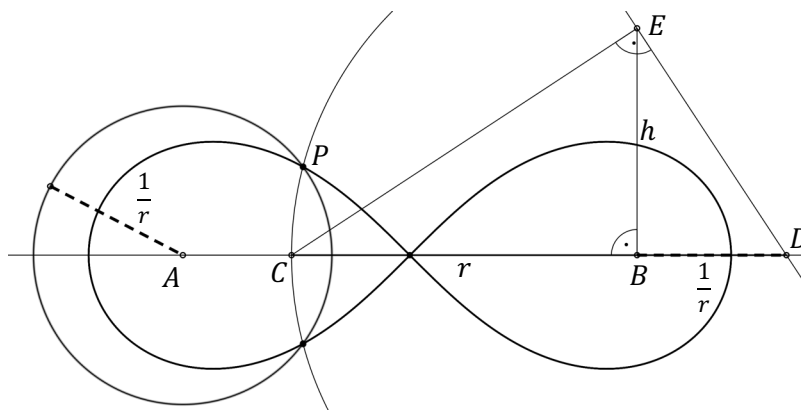
1 Die Bernoulli'sche Lemniskate als geometrischer Ort

Wir betrachten zwei feste Punkte A und B . Der geometrische Ort aller Punkte P , mit $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 1$, ist die Mittelsenkrechte von \overline{AB} . Gilt $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = k$, $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, so ist der geometrische Ort für P ein Apolloniuskreis. Die Bedingung, dass die Summe $\overline{AP} + \overline{BP} = k$ konstant bleibt, führt zu einer Ellipse, und mit der Differenz $\overline{AP} - \overline{BP} = k$ erhält man einen Hyperbelast. Mit dynamischer Software ist es auch für die Schüler einfach, solche geometrischen Örter zu erforschen. (In diesem Artikel wurden sämtliche Figuren mit GeoGebra erstellt.)

Wird nun das Produkt $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = k$ konstant gehalten, so ist der geometrische Ort aller Punkte P eine Cassinische Kurve. Ein Spezialfall davon ist die in diesem Artikel behandelte Bernoulli'sche Lemniskate. Bei ihr wird die Konstante k abhängig vom Abstand der Punkte A und B gerade so gewählt, dass der Mittelpunkt von \overline{AB} diese Bedingung erfüllt. Ist z.B. der Abstand $\overline{AB} = 2$, so muss $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 1$ gelten. Unten wird der geometrische Ort dieser Punkte P dargestellt.



Solche Punkte P können z.B. folgendermassen konstruiert werden: Von B aus wird ein beliebiger Radius $r = \overline{BC}$ abgetragen. Wird die Länge der Höhe $h = \overline{BE}$ im rechtwinkligen Dreieck CDE 1 gewählt, so gilt nach dem Höhensatz $\overline{BD} = \frac{1}{r}$. P ist Schnittpunkt der Kreise um B mit Radius r und um A mit Radius $\frac{1}{r}$.

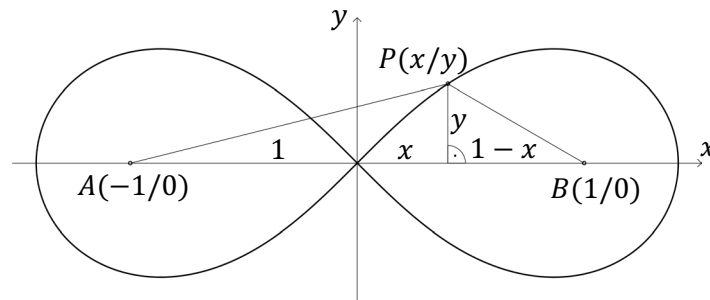


2 Gleichungen einer Bernoulli'schen Lemniskate

Koordinatenformen

Sobald die Abstandsformel zwischen zwei Punkten im Koordinatensystem eingeführt wurde, z.B. im Zusammenhang mit den Kreisgleichungen, kann die Koordinatenform der Bernoulli'schen Lemniskate hergeleitet werden. Im wie unten eingefügten Koordinatensystem gilt die Gleichung:

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = 1$$



Obige Gleichung kann als Algebraübung auf die hübsche Form $2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$ gebracht werden.

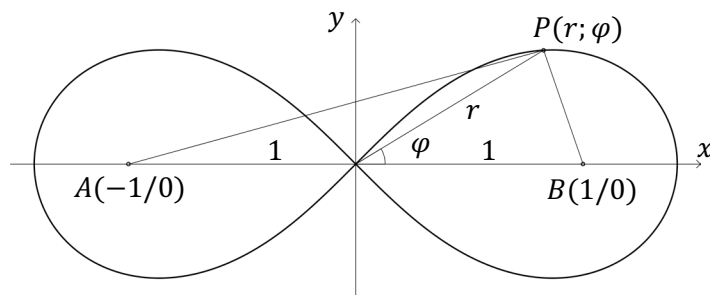
Falls man von den Punkten $A(-c/0)$ und $B(c/0)$ ausgeht, so muss $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = c^2$ gelten. Wie gefordert erfüllt dann auch der Mittelpunkt $P(0/0)$ von \overline{AB} diese Bedingung. Die zugehörige Lemniskatengleichung $2c^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$ erhält man wiederum mit Pythagoras.

Für die Ausgangspunkte $A(-c/-c)$ und $B(c/c)$ erhält man mit $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 2c^2$ die zugehörige Gleichung $8c^2xy = (x^2 + y^2)^2$, und im Speziellen für $c^2 = \frac{1}{8}$ die einfache Form $xy = (x^2 + y^2)^2$. Hier sind die Symmetrieachsen die Diagonalen $y = \pm x$.

Solche Symmetrien kann man direkt in den verschiedenen obigen Gleichungen ablesen. Ein weiteres Übungsfeld zur ersten Gleichung $2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$ ist das Ausrechnen der Koordinaten konkreter Lemniskatenpunkte. Das Fixieren einer Koordinate führt zu biquadratischen Gleichungen. Die Extrempunkte $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} / \pm \frac{1}{2})$ erhält man, indem die entsprechende Diskriminante für festes y null wird. Dies sind alles bereichernde Algebraübungen.

Polarformen

Auch später in der Trigonometrie gibt unsere Lemniskate einiges her. Wir suchen die Polarkoordinaten der Punkte $P(r; \varphi)$, welche unsere Bedingung $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 1$ erfüllen.



Mit Hilfe einiger trigonometrischer Kenntnisse (Cosinussatz, Doppelwinkelformel,...) formen wir nun um:

$$1 = \overline{AP} \cdot \overline{BP} = \sqrt{1^2 + r^2 - 2rcos(180^\circ - \varphi)} \cdot \sqrt{1^2 + r^2 - 2rcos(\varphi)}$$

$$1 = \sqrt{1 + r^2 + 2rcos(\varphi)} \cdot \sqrt{1 + r^2 - 2rcos(\varphi)}$$

Daraus folgt $1^2 = (1 + r^2)^2 - (2rcos(\varphi))^2 = 1 + 2r^2 + r^4 - 4r^2cos^2(\varphi)$

und somit $0 = r^2(2 + r^2 - 4cos^2(\varphi))$.

Entweder ist also $r = 0$ oder aber $r^2 = 4cos^2(\varphi) - 2 = 2 \cdot cos(2\varphi)$.

Die Polarform unserer Kurve ist somit $r(\varphi) = \sqrt{2 \cdot cos(2\varphi)}$.

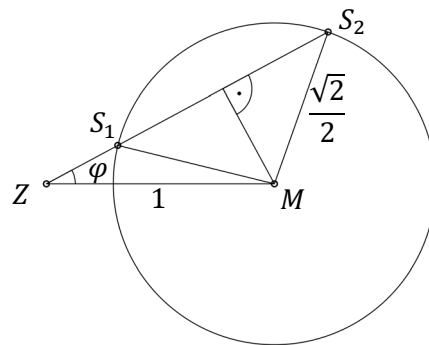
Falls man von den Punkten $A(-c/0)$ und $B(c/0)$ und $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = c^2$ ausgeht, erhält man

$r(\varphi) = c \cdot \sqrt{2 \cdot cos(2\varphi)}$ und speziell für $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ die einfachste Form $r(\varphi) = \sqrt{cos(2\varphi)}$.

In folgender Figur ist der Kreisradius $\frac{\sqrt{2}}{2}$ und der Abstand von Z zum Kreismittelpunkt M gleich 1. Für

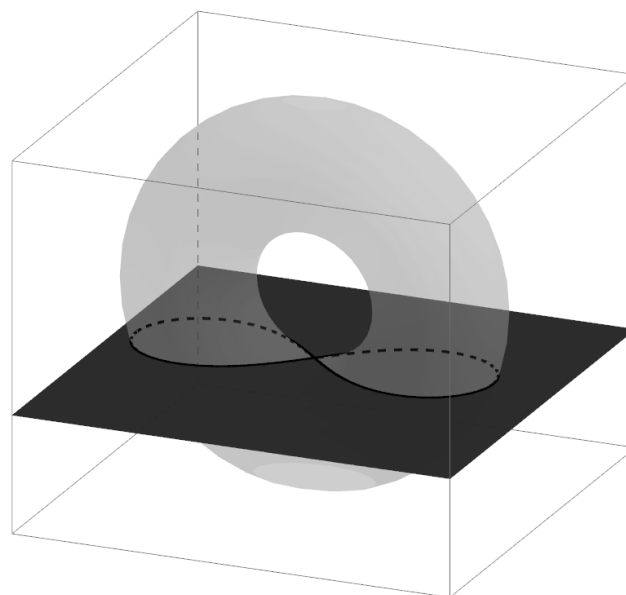
beliebiges φ wird die Sehnenlänge $\overline{S_1S_2} = 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - sin^2(\varphi)} = \sqrt{2(1 - 2sin^2(\varphi))} = \sqrt{2 \cdot cos(2\varphi)}$.

Dies entspricht obigem $r(\varphi)$, und gibt uns somit eine neue Konstruktionsmöglichkeit für eine Lemniskate.



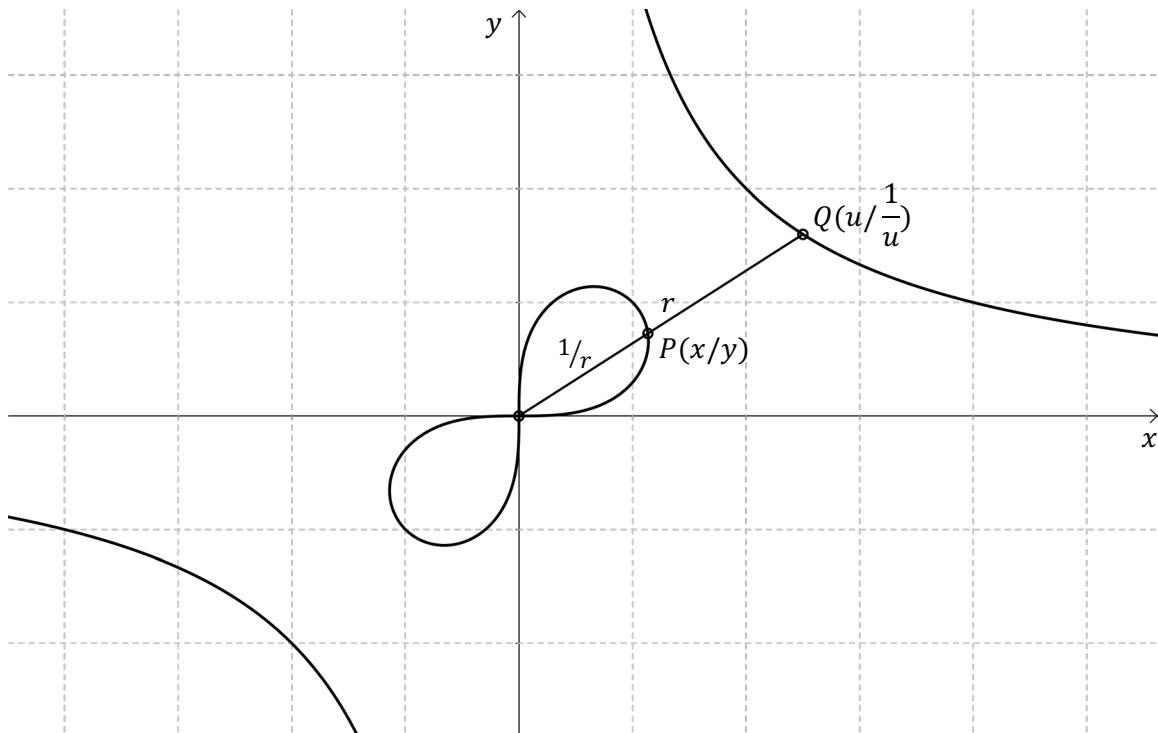
3 Die Bernoulli'sche Lemniskate als Schnittfigur

Schneidet man einen Torus mit einer Ebene, so erhält man in der unten abgebildeten Situation eine Lemniskate als Schnittfigur. (Wie die auftretenden Kreisradien gewählt werden müssen, damit man genau eine Bernoulli'sche Lemniskate erhält, wird hier nicht weiter ausgeführt.)



4 "Kehrwerte von Kehrwerten"

Wird im kartesischen Koordinatensystem zu jedem x -Wert u der Kehrwert $\frac{1}{u}$ ausgerechnet und als Punkt $Q\left(u/\frac{1}{u}\right)$ eingezeichnet, so liegt dieser bekanntlich auf der Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$. Nun betrachten wir Q in Polarkoordinaten $Q(r; \varphi)$. Vom Abstand r zum Ursprung nehmen wir nun wiederum den Kehrwert $\frac{1}{r}$ und zeichnen den Punkt $P\left(\frac{1}{r}; \varphi\right)$ ein. Wie unten gezeigt wird, liegt dieser Punkt $P(x/y)$ dann immer auf einer Bernoulli'schen Lemniskate.



Nach Pythagoras gelten $r^2 = u^2 + \frac{1}{u^2}$ und $\frac{1}{r^2} = x^2 + y^2$. Nach dem Strahlensatz gilt zudem $\frac{x}{y} = \frac{u}{1/u} = u^2$.

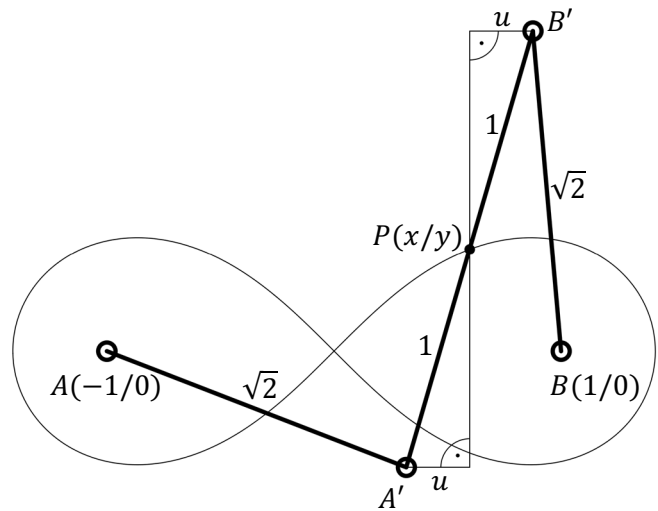
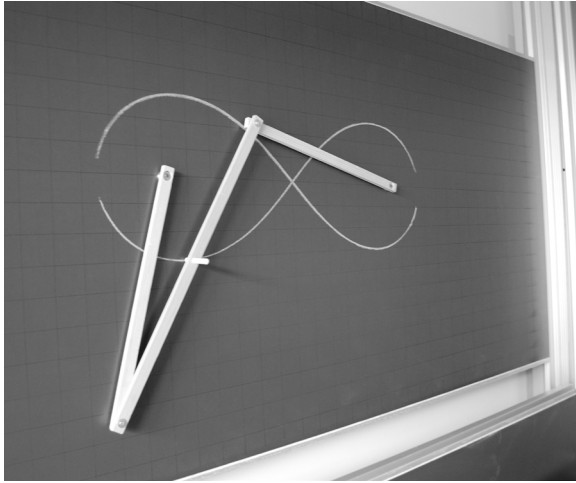
Daraus folgert man $x^2 + y^2 = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{u^2 + \frac{1}{u^2}} = \frac{u^2}{u^4 + 1} = \frac{x/y}{(x/y)^2 + 1} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Multiplizieren wir mit dem Nenner, so erhalten wir $(x^2 + y^2)^2 = xy$, was nach dem 2. Abschnitt bekanntlich die Gleichung einer Lemniskate ist.

Die Koordinatenachsen sind die Asymptoten der Hyperbel und werden so gleichzeitig auch zu Tangenten der Lemniskate im Ursprung. Die Tangenten im Selbstdurchdringungspunkt einer Lemniskate stehen somit immer senkrecht aufeinander.

Obiger Beweis zeigt in anderen Worten, dass unsere gleichschenklige Hyperbel bei einer Inversion am Einheitskreis auf eine Bernoulli'sche Lemniskate abgebildet wird. Falls die Inversion am Kreis oder gar die komplexe Kehrfunktion $f(z) = \frac{1}{z}$ im Unterricht behandelt werden, so hat man natürlich auch andere Mittel, obige Beziehung zwischen Hyperbel und Lemniskate darzulegen.

5 Mechanische Konstruktion einer Bernoulli'schen Lemniskate

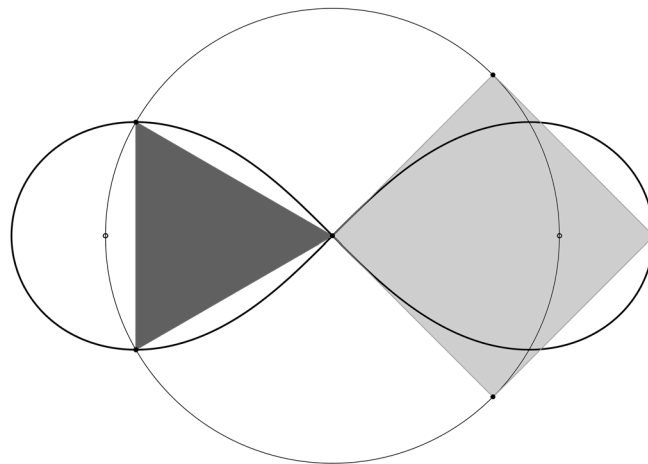
Auch mit einem mechanischen Modell kann die Bernoulli'sche Lemniskate erhalten werden. Dieses wird übrigens bei Fahrgestellen von Eisenbahnwagen als Lemniskatenlenkung verwendet.



An die festen Aufhängepunkte A und B mit Abstand 2 werden gemäss obiger Figur drehbar drei Stäbe der Längen $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \sqrt{2}$ und $\overline{A'B'} = 2$ montiert. Der Mittelpunkt P des Stabes $\overline{A'B'}$ durchläuft dann eine Bernoulli'sche Lemniskate, denn aus $A'(x - u/y - \sqrt{1 - u^2})$ und $B'(x + u/y + \sqrt{1 - u^2})$ folgt mit $\overline{AA'} = \sqrt{2}$ und $\overline{BB'} = \sqrt{2}$ durch Elimination von u unsere bekannte Gleichung $2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$.

6 Diverse Eigenschaften einer Bernoulli'schen Lemniskate

Kreis, gleichseitiges Dreieck, Quadrat

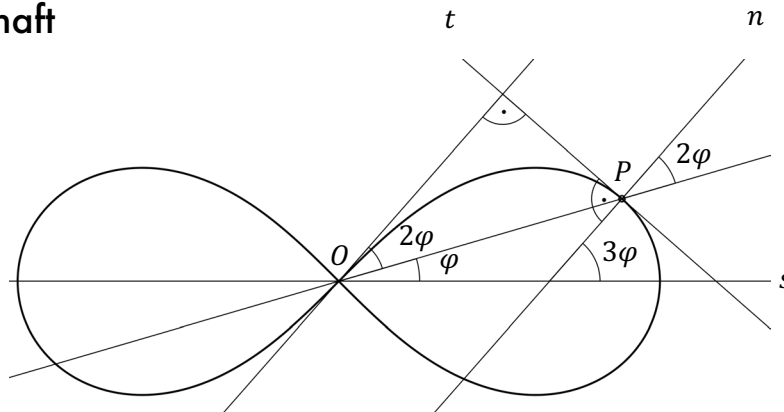


Der zentrale Einheitskreis schneidet die Lemniskate gerade in den Hoch- respektive Tiefpunkten. Wie auf der linken Seite dargestellt, entsteht so mit dem Ursprung zusammen ein gleichseitiges Dreieck. Dies folgt direkt aus den Koordinaten der Extrempunkte $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} / \pm \frac{1}{2})$. Vergleiche dazu Abschnitt 2.

Das auf der rechten Seite abgebildete Quadrat passt auch in ganz natürlicher Weise in die Lemniskate:

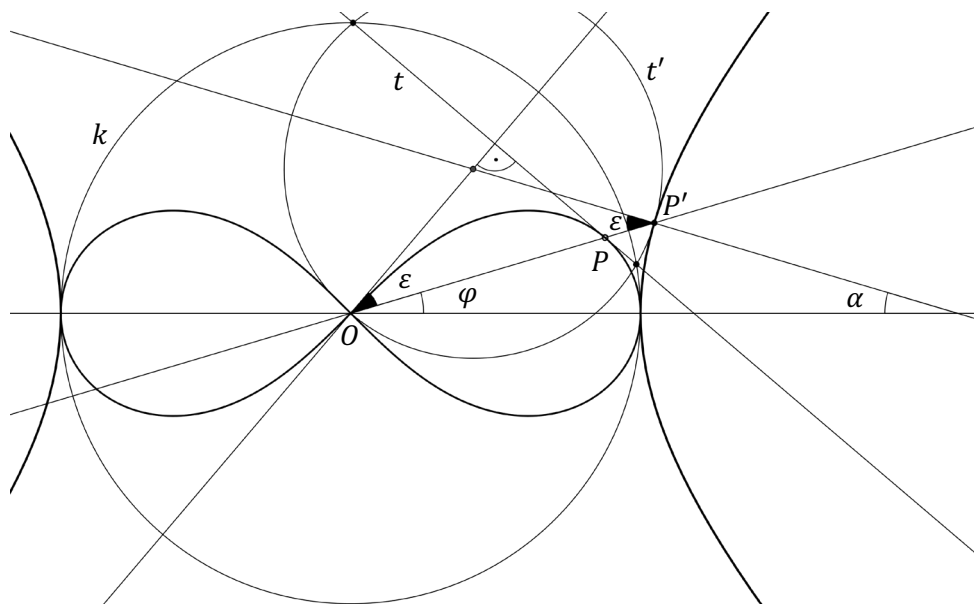
Zwei Quadratseiten sind gerade Tangenten der Lemniskate im Ursprung, was wir in Abschnitt 4 gezeigt haben. Mit der Quadratseitenlänge 1 liegen zwei Eckpunkte auf unserem Einheitskreis und $(\sqrt{2}/0)$ wird zur Quadratecke ganz rechts. Diese liegt auf der Lemniskate, wie man sich leicht durch Einsetzen in ihre Gleichung überzeugen kann. Mit Hilfe der Integralrechnung kann man zudem zeigen, dass der Quadratflächeninhalt gerade dem Inhalt der rechten Lemniskatenschleufe entspricht.

Winkeleigenschaft



Für einen beliebigen Lemniskatenpunkt P gilt: Der Winkel φ zwischen der Symmetrieachse s und OP erscheint wie in der Figur abgebildet verdoppelt respektive verdreifacht. n ist dabei die Kurvennormale in P .

Dies kann direkt mit Hilfe impliziter Differentiation gezeigt werden. Eine andere elegante Beweisidee ist, zuerst die Lemniskate samt Tangente t an k zu invertieren. Das Bild von t ist ein Kreis t' durch den Ursprung O , welcher die Hyperbel $x^2 - y^2 = c$ im Punkt P' berührt. In der Figur unten bleibt nur noch zu zeigen, dass $\varepsilon = 2\varphi$ ist. Dies ist dann der Fall, wenn $\alpha = \varphi$. Dazu berechnen wir in $P'(x_0/y_0)$ die Steigung der Normalen. Die Ableitung von $y = f(x) = \sqrt{x^2 - c}$ ist $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - c}} = \frac{x}{y}$ und somit die gesuchte Normalensteigung $-\frac{y_0}{x_0}$. Dies entspricht der negativen Steigung von OP' und damit gilt $\alpha = \varphi$.



Literatur

- [1] Hans Schupp: Einige Thesen zur sogenannten Kurvendiskussion, MU, Heft 4/5, Sept. 1998

GeoGebra 1: Grundlagen der Bedienung

GeoGebra ist eine Multirepräsentationssoftware mit dynamischer 2D Geometrie, 3D Geometrie, Funktionenplotter, Computeralgebra und Tabellenkalkulation unter einem Dach, die auf verschiedenen Plattformen läuft und überall das gleiche Dateiformat hat. GeoGebra ist damit ein mächtiges digitales Mathematik-Werkzeug, das man bedienen können muss und wofür man auch Mathematikverständnis braucht.

In diesem Workshop liegt der Fokus auf der Bedienung von GeoGebra:

- Grundkonstruktionen der ebenen Geometrie
- Zugmodus, Schieberegler, Spur und Ortslinie
- Kontrollbuttons (Boolsche Werte)
- Einblick in die 3D Geometrie
- Wertetabellen, Funktionenplotter und Graphenplotter
- Konzept der dynamischen Arbeitsblätter
- Export in Word Arbeitsblätter und ins Web (GeoGebra Tube)
- Einsatz auf Tablets (und Smartphones), Prüfungsmodus

Die GeoGebra-Beispiele werden allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern zur Verfügung gestellt.

Referent:	Hans-Jürgen Elschenbroich (Medienberatung NRW i.R.)
Zielpublikum:	Lehrkräfte der Sekundarstufe I und II Mathematik
Organisation:	Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH), Andrea Peter (DMK)
Datum und Zeit:	Montag, der 16. März 2020, 10:00 Uhr – 16:30 Uhr Ab 9:30 Begrüßungskaffee
Kursort:	ETH Zürich, Hauptgebäude Raum HG G 19.2
Kurskosten:	CHF 120 (inkl. Mittagessen und Kaffeepausen) CHF 100 für VSMP-Mitglieder (www.vsmg.ch)
Anmeldung:	https://math.ch/DMK2020b
Anmeldeschluss:	9. März 2020

GeoGebra 2: Anschauliche Zugänge zur Analysis

Der Analysis-Unterricht ist in der Schule meist sehr kalküllastig. In diesem Kurs liegt der Fokus auf Anschaulichkeit und Verständnis. Sie lernen anschauliche und (weitgehend) kalkülfreie Zugänge zu den Grundvorstellungen der Analysis (Steigung und Ableitung, Krümmung, Approximation, Integral, Stammfunktion) kennen. Die Mathematik *mit* GeoGebra als Werkzeug steht hier im Vordergrund, weniger die Bedienung von GeoGebra.

Es werden klassische, fast vergessene analoge Geräte (Funktionenmikroskop, Differentiograph, Integrimeter, Integraph) und historische Zugänge aufgegriffen und in digitalen Lernumgebungen mit GeoGebra modelliert. Schülerinnen und Schüler können sich damit aktiv einen eigenen anschaulichen Zugang erarbeiten und Sie nehmen hier die Schülersicht ein.

Ein didaktischer Schwerpunkt wird hier der unterrichtliche Einsatz ‘fertiger’ Lernumgebungen wie Funktionenlupe und Integrator sein. Aber Sie lernen auch, wie Sie solche Lernumgebungen selber vom leeren Bildschirm aus erstellen (grundlegende Kenntnisse im Umgang mit GeoGebra sind dabei sinnvoll).

Die GeoGebra-Beispiele werden allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern zur Verfügung gestellt.

Referent: Hans-Jürgen Elschenbroich (Medienberatung NRW i.R.)

Zielpublikum: Lehrkräfte der Sekundarstufe I und II Mathematik

Organisation: Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH),
Andrea Peter (DMK)

Datum und Zeit: Dienstag, der 17. März 2020, 10:00 Uhr – 16:30 Uhr
Ab 9:30 Begrüßungskaffee

Kursort: ETH Zürich, Hauptgebäude Raum HG G 19.1

Kurskosten: CHF 120 (inkl. Mittagessen und Kaffeepausen)
CHF 100 für VSMP-Mitglieder (www.vsmpp.ch)

Anmeldung: <https://math.ch/DMK2020c>

Anmeldeschluss: 9. März 2020

Bereit für Náboj 2020?

Nina Stumpf, ETH, stumpfn@student.ethz.ch

Ondrej Budac, Google, ondrob@gmail.com Marek Tesar, Google, tesulo@gmail.com

Im Frühjahr 2019 fand der Mathematikteamwettbewerb Náboj erstmals auch in der Schweiz statt. Nachdem sich dort bereits mehr Teams anmeldeten, als Plätze zur Verfügung standen, verdoppeln wir 2020 die maximale Anzahl auf 30. Die Hälfte davon soll in der Junior-kategorie antreten. In dieser Kategorie dürfen sämtliche Teammitglieder noch nicht die letzten beiden Schuljahre vor der Matur erreicht haben.

1 Náboj international

Nicht nur die Teilnehmeranzahl wächst, sondern auch die Anzahl der Austragungsorte: Waren es 2019 noch 17, wird Náboj 2020 in 22 Städten stattfinden. Während mit Kiev die Ukraine als neues Land hinzukommt, steigt mit Wien, Leipzig und Glasgow vor allem die Präsenz in Westeuropa.

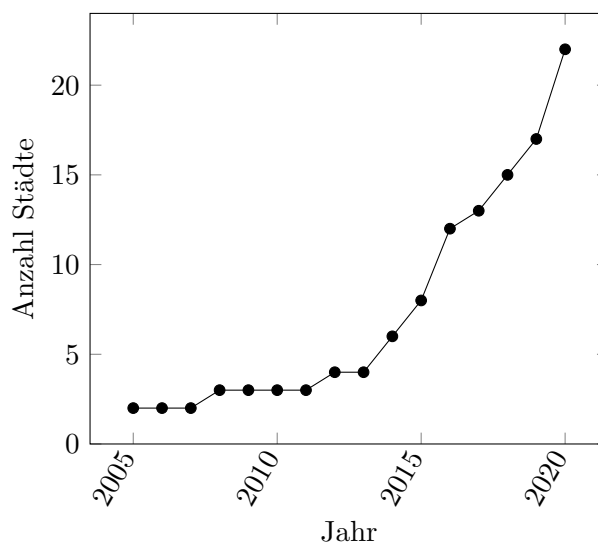


Abbildung 1 – Entwicklung von Náboj über die Jahre: Das exponentielle Wachstum setzt sich fort.

2 Ablauf des Wettbewerbs

Jedes Team startet mit sechs Aufgaben, für jede richtig gelöste gibt es eine neue. Das Ziel besteht darin, innert 120 Minuten möglichst viele Aufgaben zu lösen. Der Schwierigkeitsgrad steigert sich fortlaufend, je länger je mehr sind eigene Ideen und Kreativität gefordert. Die einfachsten zehn Aufgaben sind den Junioren vorbehalten, die restlichen Aufgaben sind für beide Kategorien identisch.

Während des Wettbewerbs informiert eine Live-Rangliste über den Stand an sämtlichen Austragungsorten. Erst kurz vor Ende wird diese eingefroren und die Spannung steigt: Gelingt es noch, einige Teams zu überholen? Nach einer kurzen Mittagspause folgt die Auflösung und Preisverleihung.

3 Organisation

Mehr Teams bedeutet auch mehr Aufwand – bei den Vorbereitungen genauso wie während des Wettbewerbs. Hilfe ist jederzeit herzlich willkommen. Um Náboj langfristig etablieren zu können, vor allem auch aus dem ETH-Umfeld. Bei Interesse bitte melden bei info-ch@naboj.org.

Datum 13. März 2020

Zeit 11:00 bis 15:00

Ort ETH Zürich, Campus Höggerberg, Gebäude HIT, Raum E51

Anmeldung ab dem 10.02.2020 über math.naboj.org

Teilnahmeberechtigt sind sämtliche SchülerInnen Schweizer Gymnasien. Die Aufgaben werden jedoch ausschliesslich auf Deutsch zur Verfügung gestellt.

Wichtig Die Anmeldung erfolgt in Teams à fünf Personen desselben Gymnasiums, entweder durch die Lehrperson oder direkt durch ein Teammitglied. Sämtliche Informationen werden an die im Anmeldeformular angegebene Kontaktperson versandt. In einer ersten Anmeldephase wird pro Schule und Kategorie ein Team zugelassen. Sind danach noch Plätze frei, rücken automatisch zweite, dann dritte Teams der Warteliste nach. Dabei zählt der Zeitpunkt der Anmeldung.

4 Beispielaufgaben

Nebst weiteren Informationen finden sich auf der Webseite von Náboj sämtliche Aufgaben inkl. Lösungen der vergangenen Jahre. Im Folgenden einige Beispiele von 2019 – die ersten beiden waren der Juniorkategorie vorbehalten, die letzten zwei wurden von beiden Kategorien bearbeitet.

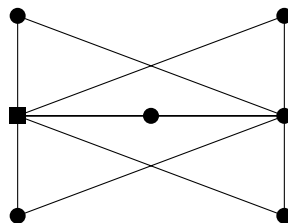
Jahr 2019, Aufgabe 1: *Vor drei Jahren war Florians Mutter dreimal so alt wie Florian damals war. Jetzt ist Florians Vater dreimal so alt wie Florian. Wie viele Jahre ist der Altersunterschied von Florians Eltern?*

Jahr 2019, Aufgabe 8: *Finde alle 9-stelligen Zahlen A , welche die folgenden Bedingungen erfüllen:*

- *Jede Ziffer $1, \dots, 9$ kommt genau einmal vor.*
- *Jede zweistellige Zahl, die aus zwei benachbarten Ziffern von A gebildet wird, ohne dabei die Reihenfolge der Ziffern zu verändern, ist durch 7 oder 13 teilbar.*

Jahr 2019, Aufgabe 13: *Für zwei positive ganze Zahlen a und b gilt $20a + 19b = 365$. Bestimme den Wert von $20b + 19a$.*

Jahr 2019, Aufgabe 21: *Simon befindet sich auf einer Reise zu Inseln, die, wie die Abbildung zeigt, mit mautpflichtigen Brücken verbunden sind. Von jeder Brücke ist die Aussicht einzigartig, deshalb möchte er jede Brücke überqueren. Gleichzeitig möchte er Geld sparen und deshalb jede Brücke nur ein einziges Mal überqueren. Wie viele mögliche Reisewege hat er, startend auf der quadratischen Insel?*



Links

[1] *Offizielle Webseite von Náboj* (math.naboj.org)

Was sagt eine Medaille über den späteren Berufserfolg aus?

Marco Gerber, Co-Geschäftsführer Wissenschafts-Olympiade, m.gerber@olympiad.ch

Wer als Jugendlicher eine Medaille gewinnt an einer internationalen Olympiade, der zeigt unbestritten Talent. Doch bedeutet das auch, dass er oder sie ein erfolgreicher Wissenschaftler, eine erfolgreiche Wissenschaftlerin wird? Ja und nein, sagen zwei Forscher.

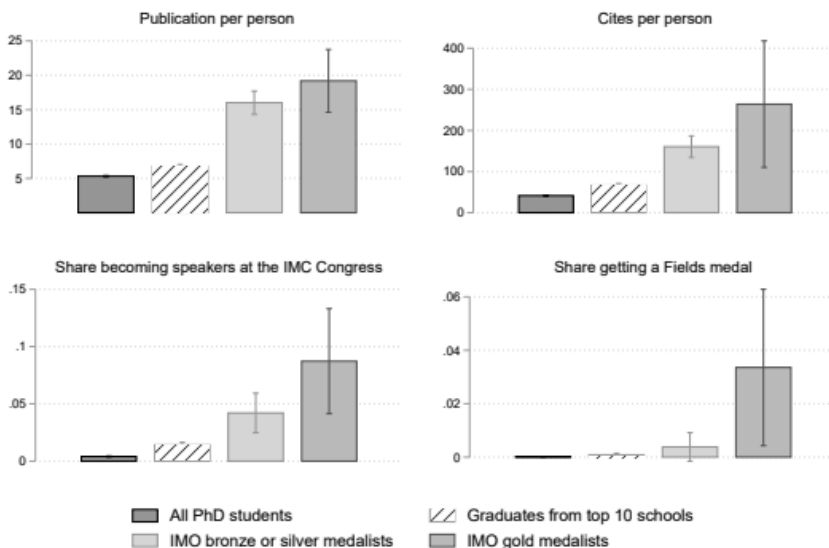
Manchmal gibt es interessante Zufälle. Wie diesen Sommer, als der gebürtige Walliser Patrick Gaulé an der Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) auf das Schweizer Team trifft. Gaulé ist Senior Lecturer an der University of Bath in England. Letztes Jahr hat er eine Studie verfasst über die Mathematik-Olympiade: über ihre Teilnehmenden, über generiertes Wissen und verlorenes Potential.

Wie viel Wissen generieren ehemalige Olympionikinnen und Olympioniken?

Die Studie trägt den Titel "Invisible Geniuses: Could the Knowledge Frontier Advance Faster?" und ist als Working Paper des Internationalen Währungsfonds (IWF) frei zugänglich. Im ersten Teil der Studie untersuchte Gaulé mit seinem Kollegen Agarwal wie akademisch produktiv die 4'710 Teilnehmerinnen und Teilnehmer der IMOs 1981-2000 sind. Die Forscher untersuchten etwa, wie viel wissenschaftliche Publikationen die ehemaligen IMO-Teilnehmenden schrieben und wie oft diese zitiert wurden. Aber auch, wer doktoriert hat, wer an Top-Unis landete oder gar mit einer Fields Medaille ausgezeichnet wurde. Gaulé und Agarwal fassen ihre Resultate so zusammen:

"... we document that individuals who demonstrate exceptional talent in their teenage years have an irreplaceable ability to create new ideas over their lifetime, suggesting that talent is a central ingredient in the production of knowledge."

Figure 8: Comparing IMO medalists with other professional mathematicians



Akademische Leistung von IMO-Medaillen-GewinnerInnen im Vergleich zu AbgängerInnen der Top 10 Mathe-Unis und zu allen DoktorandInnen global (Graphik aus "Invisible Geniuses: Could the Knowledge Frontier Advance Faster?")

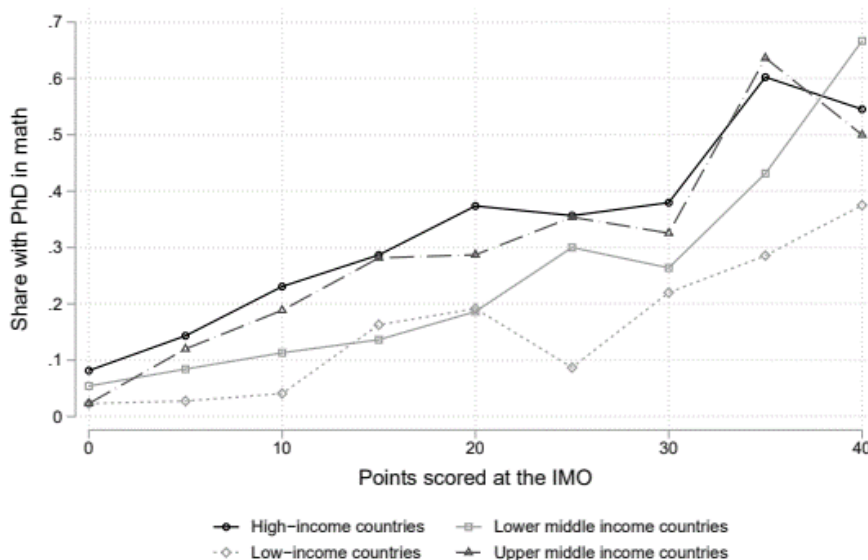
Wie fair ist die Welt?

Die Resultate lassen vermuten, dass auch Schweizer Teilnehmerinnen und Teilnehmer auf eine spannende und produktive Laufbahn hoffen dürfen. Und das nicht nur in der Mathematik, sondern auch in allen anderen Olympiaden-Fächern.

Gaulé, Agarwal und der IWF interessierten sich aber eigentlich für einen anderen Aspekt. Sie wollten sehen, ob die IMO-Teilnehmenden global gesehen überall den gleichen akademischen Erfolg haben. Nein, zeigt die Analyse: Je tiefer das durchschnittliche Einkommen eines Landes, desto weniger Wissen können die jungen Talente produzieren. Ihr Potential wird im Vergleich zu ihren Kollegen aus reichen Ländern weniger gefördert und genutzt. In den Worten von Gaulé und Agarwal:

"... such talented individuals born in low- or middle-income countries are systematically less likely to become knowledge producers. Our findings suggest that policies to encourage exceptionally-talented youth to pursue scientific careers—especially those from lower income countries—could accelerate the advancement of the knowledge frontier."

Figure 6: Share getting a PhD in mathematics across country income groups



Anteil der IMO-Medailen-Gewinnerinnen und -Gewinner mit einem Dokortitel nach Einkommen ihrer Herkunftsländer (Graphik aus "Invisible Geniuses: Could the Knowledge Frontier Advance Faster?")

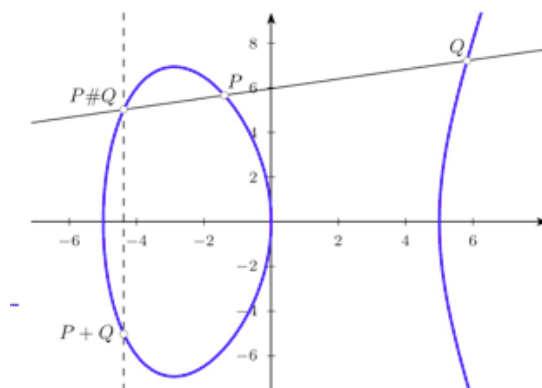
Weltweit können viele talentierte Menschen ihr Potential nicht entfalten, aufgrund ihrer Herkunft, dem sozioökonomischen Status der Eltern – oder auch dem Geschlecht. Viel Wissen und viele Innovationen gehen der Menschheit dadurch verloren.

Weitere Informationen sowie zusätzliche Daten und Graphiken finden sich in der Studie "Invisible Geniuses: Could the Knowledge Frontier Advance Faster?". Sie ist als IMF Working Paper frei zugänglich.

Links

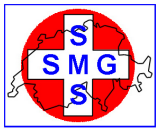
- www.imf.org/en/Publications/WP/Issues/2018/12/07/Invisible-Geniuses-Could-the-Knowledge-Frontier-Advance-Faster-46383
- science.olympiad.ch (Wissenschafts-Olympiade)

Elliptische Kurven und ihre Anwendung in der Kryptographie



In einem ersten Teil werden die geometrischen Eigenschaften von elliptischen Kurven behandelt und mit GeoGebra dargestellt. In einem zweiten Teil wird die algebraische Seite elliptischer Kurven mit "sage" angeschaut. Schliesslich werden, ebenfalls mit "sage", zwei Anwendungen von elliptischen Kurven in der Kryptographie gezeigt, nämlich der "Diffie-Hellman Schlüsselaustausch" und "Lenstras Faktorisierungsverfahren mit elliptischen Kurven".

- Referent: PD Dr. Lorenz Halbeisen, ETH Zürich
- Zielpublikum: Lehrkräfte der Sekundarstufe II (Mathematik und Informatik)
- Organisation: Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH),
Andrea Peter (DMK)
- Datum und Zeit: Dienstag, der 12. Mai 2020, 9:30 Uhr – 16:00 Uhr
Ab 9:00 Begrüssungskaffee
- Kursort: ETH Zürich, Hauptgebäude Raum HG G 19.1
- Kurskosten: Fr. 120.- (inkl. Mittagessen und Kaffeepausen)
Fr. 100.- für VSMP-Mitglieder (www.vsmf.ch)
- Anmeldung: <http://math.ch/DMK2020d>
- Anmeldeschluss: 28. April 2020



Schweizerische Mathematische Gesellschaft Société Mathématique Suisse

Ausschreibung der Matura Awards 2020 der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Seit 2010 verleiht die Schweizerische Mathematische Gesellschaft (SMG) alle zwei Jahre einen oder mehrere Preise an Gymnasiastinnen oder Gymnasiasten, die eine hervorragende Maturaarbeit oder ein Projekt im Rahmen des Wettbewerbs "Schweizer Jugend forscht" verwirklicht haben.

Die SMG lädt hiermit interessierte Jugendliche ein, ihre Bewerbungen für die Matura Awards 2020 einzureichen. Zugelassen sind Arbeiten, die im vergangenen oder laufenden Schuljahr abgeschlossen wurden und die in der Mathematik angesiedelt oder interdisziplinär mit einem substantiellen Anteil an Mathematik angelegt sind.

Die Preisverleihung wird im Rahmen des 31. Schweizerischen Tages über Mathematik und Unterricht am 9.9.2020 an der Neuen Kantonsschule Aarau stattfinden. Schülerinnen und Schüler, die sich bewerben möchten, senden ihre Arbeit als PDF-Datei (oder in zwei gedruckten Exemplaren) zusammen mit ihrer Adresse und einem kurzen CV bis am 30. Juni 2020 an

Alain Valette
alain.valette@unine.ch
Institut de Mathématiques - Unimail
Université de Neuch tel
11 Rue Emile Argand
2000 Neuch tel

Die Jury wird vom Vorstand der SMG zusammengestellt und besteht aus Hochschulangehörigen. Sie wird vom Vizepräsidenten der SMG geleitet. Die Gymnasiallehrkr fte im Fach Mathematik sind höflich gebeten, diese Information an geeignete Kandidatinnen und Kandidaten weiterzuleiten.

Neuch tel, 2. Januar 2020

Alain Valette
Vizepräsident der SMG

Einheiten 2.0

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Warum sollen sich Schülerinnen und Schüler mit Einheiten befassen? Natürlich gibt es Abzug, wenn sie in der Prüfung mit den Einheiten schludern, aber genügt das als Motivation? Warum nicht einmal hinten anfangen, und eine Unterrichtssequenz um Einheiten herum drapieren? Der Weg von einer physikalischen Grösse respektive deren Einheit zu einem Gesetz ist ein Beispiel für kreatives, induktives Vorgehen. Der umgekehrte Weg, die axiomatische Herleitung aus wenigen Grundgesetzen, ist dagegen “mostly derivative” (Sheldon) und unsicher, wenn man nicht um die Voraussetzungen weiss (und genauso unklar für Lernende mit fragilen Mathematikfähigkeiten). Es folgen einige Beispiele, die sich bei Gelegenheit in den Unterricht einstreuen lassen.

2 Eins

Schreibe die Zahl Eins auf ein Dutzend verschiedene Arten.

$$1 = \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} = \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 100 \% = \frac{144}{1 \text{ gr}} = \frac{3.6 \text{ MJ}}{1 \text{ kWh}}$$

$$= \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{1 \text{ yd}}{3 \text{ ft}} = \frac{75 \text{ kp m/s}}{1 \text{ PS}} = \frac{1 \text{ at}}{0.980665 \text{ bar}} = \frac{0.2 \text{ g}}{1 \text{ ct}} = 24 \text{ kt}$$

Zu jedem Umrechnungsfaktor lässt sich eine Geschichte oder Anekdote erzählen, z.B. von der Sekunde, die auf “pars minuta secunda”, die “zweimal verminderte” (Stunde), zurückgeht und dass die Sechzigerteilung auf dem babylonischen 60er-Zahlensystem beruht¹ und dass der Schweizer Jost Bürgi 1585 als Erster eine Uhr mit Sekundenzeiger gebaut hatte.² Dank Wikipedia et. al. können solche Trivia megabyteweise aus dem Internet gefischt werden.

3 Versteckte Gesetze

Beispiel: Wie schreibt man den Umrechnungsfaktor 931.49 MeV/u in SI-Einheiten?

$$931.49 \frac{\text{MeV}}{\text{u}} = 931.49 \cdot \frac{1.602176 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{1.660539 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = \dots \text{ J/kg} = \dots \text{ m}^2/\text{s}^2 = (2.9979 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2$$

Im Umrechnungsfaktor von atomaren Masseeinheiten in Mega-Elektronvolt ist die wohl berühmteste Gleichung der Physik versteckt: $E = mc^2$.

4 Hilf den Astronomen

Beispiel: Wandle Magnituden in Dezibel um.

Grössenklassen und Schallpegel beruhen beide auf dem Weber-Fechner Gesetz. Somit sollten sich die Magnituden in Dezibel umrechnen lassen. Es ist nicht nötig, für die Helligkeit ein separates Mass einzuführen. Norman

Pogson hat die scheinbare Helligkeit so definiert, dass ein Stern erster Grösse (1.0 mag) genau hundert Mal so hell ist wie ein Stern sechster Grösse.³ Sterne sechster Grösse sind gerade noch so sichtbar. Ein Unterschied von 5 mag entspricht somit 20 dB. Man könnte also schreiben

$$\frac{m_0 - m}{L - L_0} = \frac{5 \text{ mag}}{20 \text{ dB}}$$

Man bräuchte nur noch festzulegen, wo die Helligkeits-Dezibelskala beginnen soll (L_0). Das wird aber kaum passieren: Die überflüssigen Magnituden sind genauso zählbar wie die überflüssigen Kalorien.

Beispiel: Als Dr. Eleanor Arroway und Kollegen im Film "Contact" ein Signal von Ausserirdischen empfangen, sei es "über hundert Jansky" stark gewesen.⁴

Jansky? Nie gehört! Was ist das und sind 100 Jy viel? Wikipedia kann helfen:

$$1 \text{ Jy} = 10^{-26} \frac{\text{W}}{\text{Hz} \cdot \text{m}^2}$$

Jansky ist das Mass der Radioastronomen für die spektrale Leistungsflussdichte. Welche Flussdichte pro Frequenzband würde ein Mobiltelefon auf dem Mond bei uns erzeugen? Mobiltelefone senden mit bis zu 1 W. Der Abstand zweier Trägerfrequenzen ist 200 kHz. Damit folgt sehr grob geschätzt (isotrope Abstrahlung, ..)

$$\frac{P}{\Delta f \cdot 4\pi r^2} = \frac{1 \text{ W}}{200 \cdot 10^3 \text{ Hz} \cdot 4\pi \cdot (3.844 \cdot 10^8 \text{ m})^2} = 2.69 \cdot 10^{-24} \frac{\text{W}}{\text{Hz} \cdot \text{m}^2} \approx 300 \text{ Jy}$$

Hätte ein Astronaut sein Handy auf dem Mond benützen können, so wäre es eine der stärksten, astronomischen Radioquellen gewesen. Man konnte damals ja auch problemlos per Funk Kontakt aufnehmen. Man könnte jetzt versuchen, auf die Stärke der Quelle im Film zurück zu rechnen, denn das Signal der Frequenz 4.4623 GHz solle von der Vega gekommen sein.⁴ ($\pi \times 1420.40575177 \text{ MHz} = 4.46233627 \text{ GHz}$ kann nicht als Harmonische der 21-cm-Wasserstofflinie auftreten und wurde für extraterrestrische Kommunikation vorgeschlagen.)

5 Ampere 2019

Im Herbstsemester 2019 hat die DPK einen Kurs an der METAS in Wabern bei Bern organisiert – danke vielmals! Anlass war die Neudefinition vieler SI-Einheiten im Jahr 2018/2019. Markus Wey schlug vor, das Ampere als eine gewisse Anzahl Elementarladungen pro Sekunde zu schreiben, denn der Elementarladung ist neu ein fester Wert zugewiesen. Wie vielen Elementarladungen pro Sekunde entspricht ein Ampere?

- Auf 10 % genau durch Kopfrechnen.
- Auf so viele Dezimalstellen wie es der Taschenrechner zulässt.
- Auf unendlich viele Dezimalstellen genau.

$$\text{a) } I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{e \cdot \Delta N}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{I}{e} = \frac{1.0 \text{ A}}{1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 0.63 \cdot 10^{19} \frac{\text{A}}{\text{A} \cdot \text{s}} = \underline{\underline{6.3 \cdot 10^{18} \text{ s}^{-1}}}$$

$$\text{b) } \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{I}{e} = \frac{1.0 \text{ A}}{1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = \underline{\underline{6.241509074 \cdot 10^{18} \text{ s}^{-1}}}$$

- c) Der Zahlenwert der Elementarladung ist eine rationale Zahl, ihr Kehrwert somit auch:

$$\{e\} = 1.602176634 \cdot 10^{-19} = \frac{1.602176634}{10^{19}} = \frac{1602176634}{10^{28}}$$

$$\left\{ \frac{\Delta N}{\Delta t} \right\} = \frac{10^{28}}{1602176634} = \frac{10^{28}}{2 \cdot 3^2 \cdot 19 \cdot 389 \cdot 12043}$$

Die Primfaktorzerlegung sieht schlecht aus.

WolframAlpha⁵ liefert die ersten Dezimalstellen und eine Periode von 778 716 Ziffern:

$$\{I/e\} = 6241509074460762607.7762409809304458998869658961709711..$$

Im Prinzip können durch Division ganzer Zahlen mit Rest beliebig viele Ziffern der Dezimaldarstellung berechnet werden. Der Dezimalbruch muss periodisch sein, aber eine Periodenlänge von 778 716 motiviert nicht sehr, diesen Weg auch zu beschreiten.

6 Kelvin 2019

Im gleichen DPK-Kurs wurde von Beat Jeckelmann erwähnt, dass der Tripelpunkt als Fixpunkt der Kelvinskala in Pension geschickt wurde und stattdessen die Boltzmannkonstante k einen festen Wert erhalten hat. Die Boltzmannkonstante wurde mittels eines akustischen Resonators am genauesten bestimmt und bei diesem Wert eingefroren. Akustische Thermometer nützen aus, dass die Schallgeschwindigkeit mit steigender Temperatur wächst. Natürlich musste ich gleich ausprobieren, wie man das den Schülerinnen und Schülern auf einfache Weise zeigen könnte.

Aus dem Altkarton fischte ich eine Röhre von etwa 42 cm Länge und 4 cm Durchmesser heraus und legte meinen Haarföhn bereit. Ich startete die App PhyPhox⁶ auf meinem Smartphone und liess mir das Tonspektrum mit langer Integrationszeit anzeigen. Ich stellte den Föhn auf die kühlste Stufe und richtete ihn auf das Ende des Rohrs. Die Wirbel des Luftstroms regten Eigenschwingungen der Luftsäule im Rohr an. PhyPhox zeigte eine Frequenzspitze bei (0.38 ± 0.01) kHz. Stellte ich den Föhn auf heiss, stieg diese Frequenz auf (0.41 ± 0.01) kHz. Mit etwas gutem Willen kann man den Frequenzanstieg sogar hören. Ist dieser Frequenzanstieg real oder eingebildet? Mit den bekannten Gesetzen zur Grundfrequenz einer offenen Pfeife und der Temperaturabhängigkeit einer Schallwelle erhält man:

$$f = \frac{c}{2\ell} \wedge c = \sqrt{\frac{\kappa k N_A T}{M}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 = \left(\frac{0.41 \text{ kHz}}{0.38 \text{ kHz}}\right)^2 = 1.16$$

Aus dem Frequenzverhältnis erhalten wir einen Temperaturanstieg von z.B. 300 K auf ca. 350 K, ein Resultat, das angesichts der recht grossen Fehlerschranken nicht unvernünftig erscheint. Die 0.38 kHz passen auch zur Rohrlänge.

Im antiken China wurden gestimmte Flöten als Längenmassstab verwendet. Die Realisierung einer Einheit durch Resonatoren ist also eine sehr alte Idee.

23. November 2019, Lie.

¹ <https://de.wikipedia.org/wiki/Minute> (Abruf am 22. April 2018)

² <https://de.wikipedia.org/wiki/Sekunde> (Abruf am 22. April 2018)

³ https://de.wikipedia.org/wiki/Scheinbare_Helligkeit (Abruf am 20. Juli 2018)

⁴ <https://www.imdb.com/title/tt0118884/trivia> (Abruf am 20. Juli 2018)

⁵ <https://www.wolframalpha.com/> (Abruf am 4. September 2019)

⁶ <https://phyphox.org/de/home-de/> (Abruf am 26. Oktober 2019)



Im Gedenken an Aegidius Plüss

Am vergangenen 27. Dezember ist Prof. Dr. Aegidius Plüss im Alter von nur 75 Jahren unerwartet verstorben. Ich kenne sehr wenige Menschen, die so viel Energie und Begeisterung ausstrahlen, wie es Aegidius tat. Bis zu seinem Tod wirkte er mit unglaublichem Einsatz für einen zeitgemässen Informatik-Unterricht an Schweizer Schulen. Aufbauend auf der weit verbreiteten Programmiersprache «Python» entwickelte er in den letzten Jahren zusammen mit Jarka Arnold und Tobias Kohn eine eigene Lernplattform «TigerJython» und mehrere Online-Lehrmittel, die schweizweit im eben neu geschaffenen gymnasialen Fach Informatik und im obligatorischen Informatikunterricht an den Sekundarschulen eingesetzt werden. Ursprünglich theoretischer Physiker, war er als Physik-, Informatik- und Elektroniklehrer am Gymnasium Neufeld, aber auch als Professor für Informatik-Fachdidaktik an der Universität Bern tätig. Mit seinem anspruchsvollen, modernen Unterricht hat er Generationen von Schülerinnen und Schülern geprägt. Die Physik-Sammlung seiner Schule hat er vorbildlich betreut, dokumentiert und zu einer der schweizweit grössten ausgebaut. Unvergessen sind seine Weiterbildungskurse, wo er uns Lehrkräfte in den 80er-Jahren in die Geheimnisse von Logo, Pascal und Assembler einweichte, später auch in die objektorientierten Programmierung, in C++ (C Plüss Plüss) und Java, für welche er ein Lehrbuch schrieb. Ging es um praktische Anwendungen, etwa des RaspberryPi oder von Microcontrollern und IoT (Internet of Things) im Unterricht, griff er gleich selber zum Lötkolben, entwickelte für die staunenden, gelegentlich auch etwas überforderten Kolleginnen und Kollegen eigene Hardware Kits und Elektronikplatinen. Mit Aegid Plüss verlieren einen fachkompetenten, innovativen, begeisternden Menschen, den die Schule auch nach seiner Pensionierung nicht losgelassen hat. Für einen modernen Unterricht in den MINT-Fächer (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften, Technik) hat er sich grosse Verdienste erworben. Ich verliere einen Freund, von dem ich dank seiner kollegialen Offenheit und Hilfsbereitschaft viel profitiert habe und den ich nicht vergessen werde.

Hans Kammer, Bern

Le nombre d'Euler

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

Problématique

Nous réunissons quelques résultats concernant le nombre d'Euler¹, tels que l'existence de la limite qui le définit, sa série avec les inverses des factorielles, sa fraction continue, son irrationalité et sa transcendance. Certaines explications simplifient un peu celles que l'on rencontre habituellement.

1 Deux limites célèbres

Le nombre d'Euler $e \cong 2,7182818$ peut être donné par des limites :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right).$$

Nous démontrons en premier lieu que ces deux limites existent et sont bel et bien égales.

Preuve. On peut tout d'abord remarquer que pour des nombres $x > y > 0$ et un entier $n \geq 1$, on a

$$(x - y)(n + 1)y^n < x^{n+1} - y^{n+1} < (x - y)(n + 1)x^n \quad (*)$$

car le membre central est $x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y)(x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \dots + y^n)$.

Par exemple, pour les nombres $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, on peut écrire

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n - a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \stackrel{(*)}{<} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n} a_n.$$

En ajoutant $a_{n+1} - \frac{1}{n} a_n$ aux deux extrémités, on trouve $a_n < a_{n+1}$ et la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est donc strictement croissante.

Les nombres $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n$, quant à eux, vérifient

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right) b_n - b_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \\ &\stackrel{(*)}{>} \frac{n+2}{n(n+1)} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) a_{n+1} = \frac{1}{n} b_{n+1}. \end{aligned}$$

En ajoutant b_{n+1} aux deux extrémités, on obtient $\left(1 + \frac{1}{n}\right) b_n > \left(1 + \frac{1}{n}\right) b_{n+1}$, donc $b_n > b_{n+1}$ et la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

1. Leonhard Euler (1707 – 1783) contribua à de nombreux domaines des mathématiques (trigonométrie, géométrie, analyse, algèbre, théorie des nombres, théorie des graphes) et de la physique (mécanique, dynamique des fluides, optique).

Comme $b_n > a_n$, on a des intervalles emboîtés $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n]$ dont la longueur $b_n - a_n = \frac{1}{n}a_n < \frac{1}{n}b_n < \frac{1}{n}b_1 = \frac{4}{n}$ tend vers zéro. La première limite a donc un sens et définit le nombre d'Euler e .

Considérons maintenant $S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$. En développant $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ avec la formule du binôme, on obtient

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n+1-k)}{n^k} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Le produit entre crochets est inférieur à 1, donc $a_n < S_n$. D'autre part, ce produit est supérieur à $\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^k = 1 - \left(1^k - \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^k\right) \stackrel{(*)}{>} 1 - \frac{(k-1)k}{n}$, donc

$$a_n > S_n - \frac{1}{n}S_{n-2} > S_n - \frac{1}{n}S_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)S_n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)a_n.$$

En prenant la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ dans cette suite d'inégalités, on trouve alors $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e$.

2 Fraction continue

Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et un nombre x , on note $M * x = \frac{ax + b}{cx + d}$ et on vérifie facilement que $M_1 * (M_2 * x) = (M_1 M_2) * x$. Par exemple, si on pose $\mathcal{M}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\mathcal{M}(\alpha) * x = \alpha + \frac{1}{x}$ et plus généralement

$$\mathcal{M}(\alpha_0)\mathcal{M}(\alpha_1)\dots\mathcal{M}(\alpha_n) * x = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \frac{1}{\alpha_4 + \frac{1}{\alpha_5 + \frac{1}{\alpha_n + \frac{1}{x}}}}}}}$$

Cette structure de fractions imbriquées les unes dans les autres s'appelle une *fraction continue* et on la note $[\alpha_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n, x]$. Pour un nombre irrationnel θ , il existe de manière unique une suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ de nombres entiers, strictement positifs sauf éventuellement α_0 , et une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de nombres supérieurs à 1 telles que $\theta = [\alpha_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n, x_n]$ pour tout $n \geq 0$. On a alors $\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n]$ et on note simplement $\theta = [\alpha_0; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots]$ lorsque la suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ ne présente aucune ambiguïté.

Nous établissons ici la fraction continue $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \dots] = [2; \overline{1, 2n, 1}]_{n \geq 1}$, où la partie surlignée se répète indéfiniment en incrémentant l'entier $n \geq 1$.

Preuve. L'expression $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ vérifie l'équation différentielle $4xy'' = y - 2y'$. Par induction, on a plus généralement $4xy^{(n+2)} = y^{(n)} - 2(2n+1)y^{(n+1)}$, autrement dit

$$\frac{y^{(n)}}{y^{(n+1)}} = 2(2n+1) + \frac{4x}{y^{(n+1)}/y^{(n+2)}} = \begin{pmatrix} 2(2n+1) & 4x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \frac{y^{(n+1)}}{y^{(n+2)}}.$$

En posant $x = \frac{1}{4}$, on obtient $\frac{y^{(n)}(1/4)}{y^{(n+1)}(1/4)} = \begin{pmatrix} 2(2n+1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \frac{y^{(n+1)}(1/4)}{y^{(n+2)}(1/4)}$ et, par itération,

$$\frac{y(1/4)}{y'(1/4)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 2(2n+1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \frac{y^{(n+1)}(1/4)}{y^{(n+2)}(1/4)}.$$

Appliquons la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ à cette relation. À gauche de l'égalité, on obtient

$$M * \frac{e^{1/2} + e^{-1/2}}{e^{1/2} - e^{-1/2}} = M * \frac{e+1}{e-1} = M^2 * e = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} * e = e.$$

A droite de l'égalité, on utilise la relation $M\mathcal{M}(2k) = \mathcal{M}(1)\mathcal{M}(k-1)\mathcal{M}(1)M$. On trouve alors

$$e = \underbrace{\mathcal{M}(1)\mathcal{M}(0)\mathcal{M}(1)}_{\mathcal{M}(2)} \underbrace{\mathcal{M}(1)\mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1)} \cdots \underbrace{\mathcal{M}(1)\mathcal{M}(2n)\mathcal{M}(1)} M * \frac{y^{(n+1)}(1/4)}{y^{(n+2)}(1/4)},$$

autrement dit $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, \dots, 1, 2n, 1, M * \zeta_{n+1}]$ avec $\zeta_{n+1} = \frac{y^{(n+1)}(1/4)}{y^{(n+2)}(1/4)}$.

On doit encore vérifier que $M * \zeta_{n+1} > 1$. À partir de la série de MacLaurin de y , on a

$$y^{(n)}(1/4) = 2 \left[\frac{d^n}{dx^n} \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{(2k)!} \right]_{x=1/4} = 2 \sum_{k \geq 0} \frac{(n+k)!}{k!(2n+2k)!} \left(\frac{1}{4}\right)^k > 0.$$

Ceci étant valable pour tout entier $n \geq 0$, on en déduit que

$$y^{(n)}(1/4) = y^{(n+2)}(1/4) + 2(2n+1)y^{(n+1)}(1/4) > y^{(n+1)}(1/4).$$

En remplaçant n par $n+1$, il s'ensuit que $\zeta_{n+1} > 1$ et donc $M * \zeta_{n+1} = 1 + \frac{2}{\zeta_{n+1} - 1} > 1$ ce qui achève la démonstration. Remarquons que nous avons également montré au passage que $\frac{e+1}{e-1} = [2 + 4n]_{n \geq 0}$.

3 Irrationalité

Avec une fraction continue infinie et non périodique, le nombre e n'est ni rationnel, ni irrationnel quadratique². En fait, l'irrationalité du nombre e est facile à démontrer sans fraction continue. Nous présentons la preuve de Joseph Fourier (1768 – 1830).

Preuve. Supposons que l'on puisse écrire $e = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ avec $n \geq 2$ et regardons l'égalité

$$n! \left(e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right) = n! \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \right)$$

qui découle de la série établie dans le premier paragraphe. Le membre de gauche serait un nombre entier alors que le membre de droite est un nombre strictement positif inférieur à

$$\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \right) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \right) = \frac{1}{n} < 1,$$

ce qui est absurde!

2. Un nombre rationnel admet une fraction continue finie obtenue par des divisions euclidiennes successives alors qu'un irrationnel quadratique, c'est-à-dire un nombre de la forme $a + b\sqrt{n}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}^*$ et n entier positif non carré, admet une fraction continue infinie présentant un motif répétitif.

4 Transcendance

Charles Hermite (1822 – 1901) a démontré que le nombre d'Euler est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers. La preuve n'est pas véritablement difficile mais elle est d'une extraordinaire subtilité. Nous la présentons sous la forme d'une descente infinie sur le degré d'un hypothétique polynôme à coefficients entiers qui s'annulerait en $x = e$.

Preuve. Soit $f(x)$ un polynôme de degré d et $F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \dots + f^{(d)}(x)$. On peut remarquer que $[-e^{-x}F(x)]' = e^{-x}F(x) - e^{-x}F'(x) = e^{-x}(F(x) - F'(x)) = e^{-x}f(x)$, donc

$$\int_0^k e^{-x}f(x) dx = [-e^{-x}F(x)]_0^k = F(0) - e^{-k}F(k).$$

Etant donnés des nombres entiers a_0, a_1, \dots, a_n , on a alors

$$\sum_{k=0}^n a_k e^k \int_0^k e^{-x}f(x) dx = \left(\sum_{k=0}^n a_k e^k \right) F(0) - \sum_{k=0}^n a_k F(k).$$

Supposons que $x = e$ annule un polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ avec un degré minimal $n \geq 2$ (on sait déjà que e est irrationnel). L'égalité ci-dessus devient alors simplement

$$S := \sum_{k=0}^n a_k e^k \int_0^k e^{-x}f(x) dx = -(a_0F(0) + a_1F(1) + \dots + a_nF(n)).$$

Dévoilons maintenant l'expression du polynôme f . On considère un nombre premier p et on pose

$$f(x) = x^{p-1}((x-1)(x-2)\dots(x-n))^p.$$

Ce polynôme de degré $d = np + p - 1$ se factorise par x^{p-1} et peut être développé sous la forme $f(x) = c_{p-1}x^{p-1} + c_px^p + \dots + c_dx^d$ avec des coefficients c_k entiers. La k -ième dérivée de f en $x = 0$ est $f^{(k)}(0) = c_k k!$, elle est nulle si $k \in \{0, 1, \dots, p-2\}$ et il s'agit d'un entier divisible par $p!$ si $k \geq p$. On a encore $f^{(p-1)}(0) = (-1)^{np}(n!)^p(p-1)!$. Ainsi, $F(0)$ est un nombre entier divisible par $(p-1)!$.

On peut également développer $f(x)$ avec des puissances de $(x-m)$ pour $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixé. Comme $f(x)$ se factorise par $(x-m)^p$, on a $f(x) = c_p(x-m)^p + c_{p+1}(x-m)^{p+1} + \dots + c_d(x-m)^d$ où les coefficients c_k sont des nombres entiers qui dépendent de m . La k -ième dérivée de f en $x = m$ est $f^{(k)}(m) = c_k k!$, elle est nulle si $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ et il s'agit d'un entier divisible par $p!$ si $k \geq p$, donc $F(m)$ est un nombre entier divisible par $p!$.

Pour $x \in [0; n]$, on a la majoration $|f(x)| \leq n^{p-1}n^{np}$ et avec l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} |S| &= \left| \sum_{k=0}^n a_k e^k \int_0^k e^{-x}f(x) dx \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| e^k \int_0^k |f(x)| dx \\ &\leq \sum_{k=0}^n |a_k| e^k \int_0^k n^{p-1}n^{np} dx = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^n |a_k| k e^k \right)}_{\text{constante } C > 0} n^n (n \cdot n^n)^{p-1} = C(n^{n+1})^{p-1}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{(n^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!}$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, on a $\frac{(n^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!} < \frac{1}{C}$, donc $|S| < (p-1)!$, lorsque p est suffisamment grand. On en déduit que S est nul car il s'agit d'un entier divisible par $(p-1)!$. Comme $F(1), \dots, F(n)$ sont tous divisibles par $p!$, il en est de même pour $a_0F(0)$ et donc pour $a_0(-1)^{np}(n!)^p(p-1)!$. Ainsi p divise $a_0(n!)^p$ et comme p est arbitrairement grand, on a $a_0 = 0$. Il s'ensuit que $x = e$ annule le polynôme $\frac{P(x)}{x} \in \mathbb{Z}[x]$, ce qui contredit la minimalité supposée de n .

Mathématiques et Société

Colloque annuel de la CRM organisé à Champéry du 17 au 20 septembre 2019

La CRM a organisé un cours pour les enseignants du secondaire II qui a réuni 9 conférenciers et 53 participants au Centre Paroissial et Culturel de Champéry. Après plusieurs années de présence à Leysin, ce cours a dû être déplacé à Champéry pour des raisons de disponibilité des hôtels. La majorité des participants a été satisfaite de se retrouver dans une salle plus grande et plus lumineuse. Onze exposés de 90 minutes ont été donnés par les conférenciers.

Monsieur Paul Jolissaint, professeur à l'Université de Neuchâtel, a permis la mise en place de ce cours en prenant les premiers contacts avec les conférenciers, qui ont déjà tous donné un exposé au séminaire Mathématiques et Société proposé à l'Université de Neuchâtel. Durant ce cours, il est tout d'abord intervenu pour nous présenter un résultat sur la simulation du hasard en lien avec le lancer d'une pièce de monnaie. Si on demande à un être humain de simuler une suite de jets, il aura tendance à ne pas écrire de longue suite de piles ou de faces alors qu'en réalité la probabilité que de telles suites apparaissent est relativement grande. Il nous a ensuite parlé du paradoxe des anniversaires et l'a illustré avec les équipes de football présentes à l'Euro 2016. Dans son second exposé, il nous a présenté la loi de Benford qui affirme que dans certains ensembles de nombres (valeurs boursières, prix d'articles divers, ...) le premier chiffre significatif de ces valeurs est plus souvent 1 que 2, qui est plus fréquent que 3, etc., le chiffre le moins présent étant 9. Cette loi a permis, par exemple, de découvrir des cas de fraude dans des comptabilités.

Monsieur Valerio Vassallo, professeur à l'Université de Lille 1, est intervenu à deux reprises durant cette semaine. Ces deux interventions avaient comme fil rouge le regard. Dans la première, il nous a présenté quelques objets qu'on trouve dans toutes les cuisines et qui, vus au-travers du regard d'un géomètre, permettent d'illustrer quelques résultats comme l'égalité entre le volume d'un cylindre et la somme des volumes d'une demi-sphère et d'un cône inscrits dans ce cylindre, la classification des surfaces topologiques ou les triangulations de surface. Dans son second exposé, il nous a présenté une démarche pédagogique menée à Lille qui mêle vision artistique et vision mathématique. Des élèves, accompagnés de leur enseignant de mathématiques, se rendent au musée et étudient pendant une période un tableau avec l'aide d'une historienne de l'art. Le but est que les élèves partagent leurs observations sur l'œuvre choisie de manière dirigée. Il se rendent ensuite dans une salle pour reproduire la même démarche d'observation sur des problèmes géométriques. Un groupe de participants s'est retrouvé le mercredi après-midi pour poursuivre la discussion sur cette pratique pédagogique innovante et tenter d'en éprouver les avantages.

Monsieur Pierre-Alain Chérix, maître d'enseignement et de recherche à l'Université de Genève, nous a présenté des résultats sur des modèles dynamiques pour expliquer la croissance des plantes et notamment les positions d'apparition des nouvelles feuilles sur une tige. Dans la première partie de son exposé, il nous a sensibilisé aux liens qu'on peut « observer » entre le nombre d'or ou les nombres de Fibonacci et une pomme de pin, un romanesco ou un ananas.

Madame Shaula Fiorelli-Vilmart, collaboratrice scientifique à l'Université de Genève, nous a présenté, dans deux exposés, les mathématiques cachées dans internet. Elle nous a notamment expliqué l'algorithme PageRank utilisé par Google dans ses débuts, le principe de code de contrôle utilisé pour construire un numéro de carte bancaire et la méthode de cryptage RSA.

Monsieur François Fleuret, professeur associé à l'EPFL et à l'IDIAP, a donné un exposé sur l'intelligence artificielle et l'apprentissage à large échelle. Il nous a présenté la notion de réseaux de neurones, en passant par leur conception par couche, leur entraînement et leur utilisation notamment dans la reconnaissance d'images. Il a terminé son exposé par quelques applications qui ont laissé l'auditoire sans voix.

Monsieur David Ginsbourger, professeur associé à l'Université de Berne et à l'IDIAP, nous a parlé de méthodes de reconstructions de fonctions où le hasard est utilisé pour simuler des comportements en certains points. Il a notamment présenté l'approche de reconstruction par processus gaussien. Il a ponctué son exposé d'exemples pratiques notamment en hydrologie.

Monsieur Akimou Ossé, docteur en mathématiques ayant fondé sa société de conseils financier QuantPlus, nous a présenté quelques notions de théorie des graphes en les illustrant sur l'algorithme PageRank. Il a ensuite poursuivi avec une application de cet algorithme à la biologie, le modèle d'Allesina-Pascual, qui cherche à classer les espèces d'un réseau alimentaire par leur importance dans ce dernier et trouver la séquence d'extinction des espèces la plus dévastatrice pour ce réseau. Il a terminé son exposé en nous présentant la notion de risque systémique en finance et le modèle de Das.

Finalement, messieurs Jérôme Gavin, enseignant au collège Voltaire, et Alain Schärli, professeur honoraire à l'Université de Lausanne, nous ont permis de nous plonger un peu dans l'histoire de l'algèbre en nous présentant la « Regula Falsi » ou fausse position. Après un petit échauffement où nous avons pu nous rassurer sur nos compétences de résolution d'équations à une inconnue ou de système d'équations, ils nous ont montré comment résoudre de tels problèmes sans utiliser l'algèbre, mais en choisissant une valeur arbitraire pour la solution recherchée et en la corrigeant selon le résultat trouvé. Ainsi, par exemple, on peut se poser la question suivante : « Un homme a trouvé un trésor, il en a dilapidé la moitié, il en a reconstitué un quart, puis dilapidé un huitième, il lui est resté 50 pièces d'or ; quel était ce trésor ? » On peut supposer que ce trésor était de 80 pièces d'or au départ. Si on suit le déroulement exposé, il lui en reste 5 à la fin, soit dix fois moins que le résultat recherché. Il avait donc 80 pièces d'or au départ. En s'appuyant sur des documents historiques, ils nous ont expliqué comment résoudre des problèmes plus complexes du premier degré à une inconnue et également des systèmes d'équations en utilisant ce principe de fausse position.

Au terme de ce cours, les participants se sont déclarés très satisfaits. Ils ont apprécié l'excellent niveau scientifique des conférenciers et les propositions d'applications qui pourraient être reprises dans leurs cours.

Damien Dobler
Membre de la CRM

L'article ci-dessous a été publié dans sa version originale en allemand dans le Bulletin 141 de septembre dernier. Sa lecture étant à la portée d'élèves intéressés, j'ai incité à sa traduction de sorte que les jeunes Romands puissent suivre cette réflexion à la fois simple et surprenante. Je tiens à remercier mes collègues Ch. Jacob pour sa traduction et P. Turtzschy pour la rédaction finale.

Hj. Stocker

Le théorème d'Eddy

Hans Walser, hwalser@bluewin.ch, www.walser-h-m.ch/hans

De quoi s'agit-il?

Dans sa présentation de l'ouvrage de W. Zeuge (bulletin no 140), Hj. Stocker mentionne un théorème de géométrie élémentaire, le théorème d'Eddy, qui m'était jusque-là inconnu. La preuve permet un nouveau regard sur le théorème de Pythagore et l'invariance de la somme des carrés.

Le théorème d'Eddy

La bissectrice de l'angle droit dans le triangle rectangle divise le carré construit sur l'hypoténuse en deux parties égales (fig. 1a). La figure 1b) montre une élégante preuve sans mots.

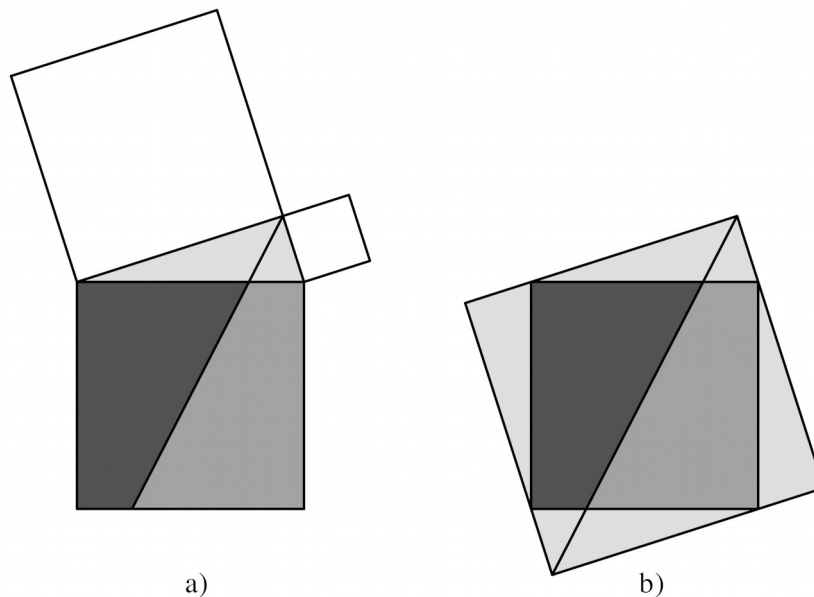


Fig. 1: Le théorème d'Eddy. Preuve sans mots

Une preuve moins élégante

Rappelons tout d'abord les éléments suivants. Dans un triangle (quelconque), les bissectrices partagent en deux demi-arc égaux l'arc du cercle circonscrit délimité par le côté opposé (fig. 2a). Un demi-angle détermine un demi-arc de l'arc du cercle circonscrit délimité par le côté opposé.

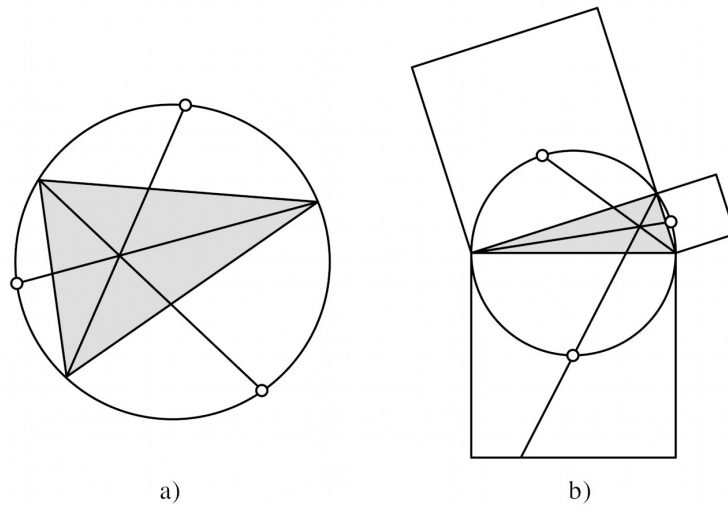


Fig. 2: Les bissectrices divisent les arcs du cercle circonscrit en deux parties égales

Dans le cas particulier du triangle rectangle, le cercle circonscrit est le cercle de Thalès. Le milieu de l'arc délimité par l'hypoténuse (fig. 2b) (en considérant l'arc « sous » l'hypoténuse) est aussi le milieu du carré construit sur l'hypoténuse. Une droite passant par le milieu du carré divise le carré en deux parties égales. Le théorème d'Eddy est ainsi démontré.

La bissectrice extérieure

La bissectrice extérieure de l'angle droit divise les deux carrés construits sur les cathètes en parties égales. Il en résulte une «demi-» version du théorème de Pythagore (fig. 3a).

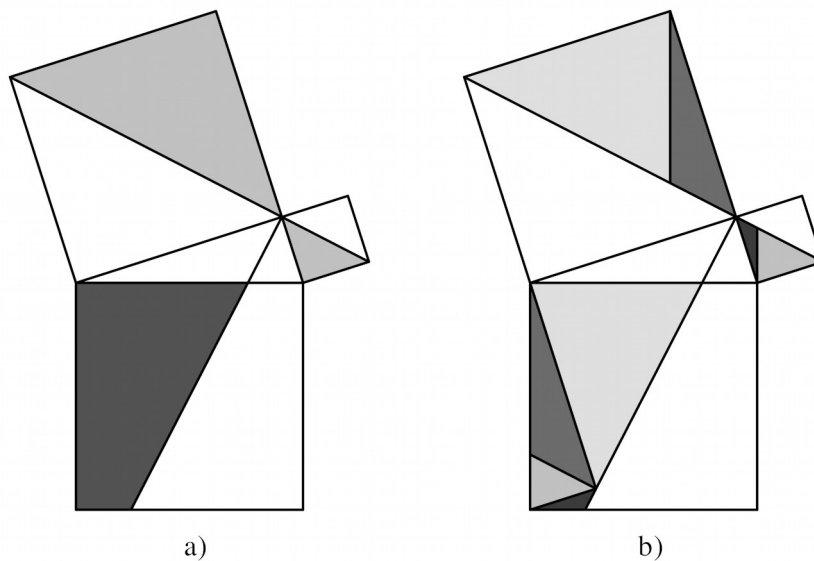


Fig. 3: Gris foncé = gris clair. Preuve par découpage

La figure 3b) montre un découpage d'après Paul Epstein (1871-1939) et Jakob Nielsen (1890-1959). Ce découpage est fait en quatre morceaux. A ma connaissance, les découpages connus pour la «version complète» de Pythagore nécessitent cinq pièces ou plus.

Intersection avec le cercle de Thalès

La bissectrice extérieure de l'angle droit coupe le cercle de Thalès en un point situé à l'intérieur du carré construit sur la plus grande cathète. (fig. 4a). Ce point est situé sur la médiatrice de l'hypoténuse et détermine un deuxième triangle rectangle.

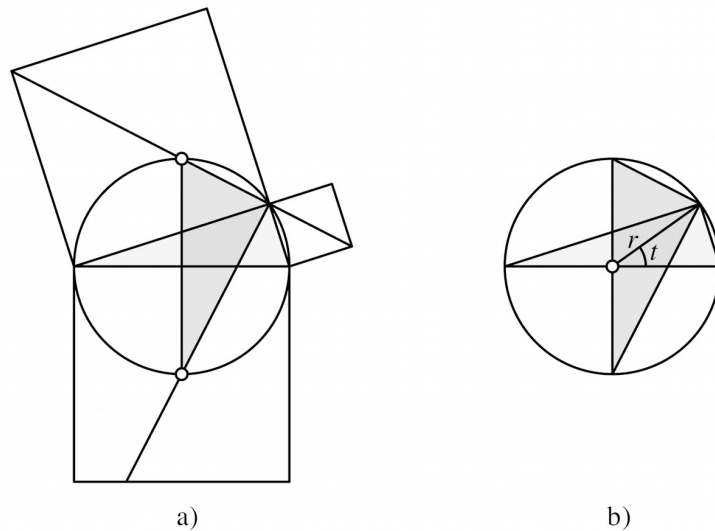


Fig. 4: Intersection avec le cercle de Thalès. Deuxième triangle rectangle

Loi des aires

Soit r , le rayon du cercle de Thalès, A_1 et A_2 les aires des deux triangles rectangles. Nous établissons l'équation suivante:

$$A_1^2 + A_2^2 = r^4$$

Si cette formule rappelle le théorème de Pythagore, elle s'inscrit en dimension 4. La situation ne peut donc pas être illustrée de manière bidimensionnelle. Aucune preuve par découpage ne peut être établie.

Pour la démonstration de ce théorème de l'aire, nous travaillons avec l'angle t (voir fig. 4b). La longueur de l'hypoténuse du premier triangle est $2r$ et la hauteur verticale qui lui correspond est $r \sin(t)$. Donc, l'aire $A_1 = r^2 \sin(t)$. De manière analogue, nous obtenons $A_2 = r^2 \cos(t)$. Une élévation au carré et une addition permettent d'obtenir la formule de l'aire.

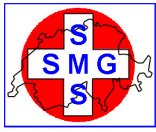
Bibliographie

Stocker, Hansjürg: Rezension: Wolfgang Zeuge: Nützliche und schöne Geometrie. Bulletin SSPMP/VSMP. Edition 140, mai 2019, 40.

Zeuge, Wolfgang: Nützliche und schöne Geometrie. Eine etwas andere Einführung in die Euklidische Geometrie. Springer Spektrum. 2018, ISBN 978-3-658-22832-3.

Liens

Hans Walser: Epstein-Nielsen-Zerlegungsbeweis für den Satz des Pythagoras:
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/E/Epstein-Nielsen/Epstein-Nielsen.htm



Schweizerische Mathematische Gesellschaft Société Mathématique Suisse

Annonce du Prix “Matura Awards 2020” de la Société mathématique Suisse

Tous les deux ans depuis 2010, la Société mathématique suisse (SMS) attribue un ou plusieurs prix à des collégiens/gymnasiens/lycéens qui ont réalisé un travail de maturité exceptionnel ou un projet dans le cadre du concours «La science appelle les jeunes».

La SMS invite les jeunes intéressés à soumettre leur candidature pour les Matura Awards 2020. Les travaux qui ont été complétés dans la dernière ou l'année scolaire actuelle et qui sont basés en mathématiques ou interdisciplinaires avec une proportion substantielle de mathématiques sont autorisés.

La cérémonie de remise des prix aura lieu le 9 septembre 2020 à la Neue Kantonsschule à Aarau lors de la 31ème Journée suisse des mathématiques et de l'enseignement (“31. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht”).

Les élèves qui veulent postuler envoient leur travail sous forme de fichier PDF (ou en deux exemplaires imprimés) avec leur adresse et un court CV jusqu'au 30 juin 2020 à

Alain Valette
alain.valette@unine.ch
Institut de Mathématiques - Unimail
Université de Neuchâtel
11 Rue Emile Argand
2000 Neuchâtel

Le jury est composé par le conseil d'administration de SMS et se compose de membres de l'université. Il est présidé par le vice-président de SMS.

Les enseignants de mathématiques du secondaire sont priés de transmettre cette information aux candidats.

Neuchâtel, le 2 janvier 2020

Alain Valette
Vice-président de la SMS

Impressum

Herausgeber — *Éditeur*
VSMP – SSPMP – SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Werner-Kälin-Strasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
Weinbergstrasse 48b Tel. 079 728 63 97
5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
Monbijoustrasse 36
3011 Bern
Tel. 031 382 52 33
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnés:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Werner-Kälinstrasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Auflage — *Tirage*

800 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Domenico Galli 44
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Josef Züger j.zueger@sunrise.ch
Via Salens Tel. 081 641 10 94
7402 Bonaduz

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Gymnasium Burgdorf Tel. 031 638 03 03
Pestalozzistrasse 17
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano tatiana.mantuano@gfbienne.ch
Grand'Rue 16 Tél. 032 544 47 53
2075 Wavre

Commission Romande de Physique

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 143 31.03.2020 (Ende Mai)
Nr. 144 31.07.2020 (Ende September)
Nr. 145 30.11.2020 (Ende Januar)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch

Internet-Adressen — *Adresses Internet*

www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

DIE NEUEN VERNIER-PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

educatec.ch/vernier

Go Direct Lichtschranke

In der Go Direct Lichtschranke sind zwei parallele Lichtschranken integriert, mit denen sich - ohne Kenntnis der Geometrie des Objektes - Geschwindigkeit und Beschleunigung messen lassen. Ideal für Freifall-, Pendel- und Stossversuche. Mit Hilfe eines optionalen Lasers lassen sich durch die eingebaute zusätzliche Fotozelle nahezu beliebig grosse Kabelweiten realisieren. Eine weitere Go Direct Lichtschranke kann kaskadiert werden.

- Infrarot-Lichtquelle: Spitzenwert bei 880 nm
- Gabelweite: 77,5 mm
- Abstand beider Lichtschranken: 20 mm
- LED-Anzeigen für die Lichtschranke: Lichtstrahl frei / unterbrochen
- Akku: 300 mAh Li-Poly wiederaufladbar
- Akkulaufzeit: ca. 10 Stunden kontinuierliche Datenerfassung

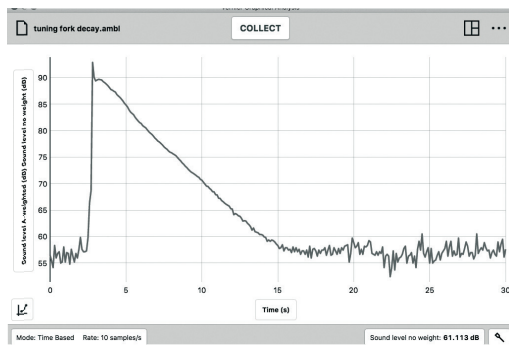
Artikel-Nr. GDX-VPG



Go Direct Schallpegel- und Soundsensor



Artikel-Nr. GDX-SND



Dieser Schallpegel Sensor wird eingesetzt zur Darstellung der Signalformen von Stimmen und Musikinstrumenten. Weitere Anwendungen sind Experimente mit der Schallgeschwindigkeit. Links ist ein Beispiel von einer Stimmgabel mit der Lautstärke, welche mit der der Zeit abnimmt.

- Resonanz: A- oder C-bewertet
- Reichweite: 55-110 dB
- Genauigkeit: ± 3 dB
- Auflösung: 0,1 dB
- Schallpegel Frequenzbereich: 30-10.000 Hz
- Mikrofonpegel Frequenzbereich: 100 Hz bis 15 kHz
- Typische maximale Frequenz: 10.000 Hz

Go Direct Beschleunigungsmesser



Artikel-Nr. GDX-ACC

Sammeln Sie Beschleunigungs-, Rotations- und Höhendaten im Klassenzimmer oder im Gelände mit dem Go Direct Beschleunigungssensor. Montieren Sie den Beschleunigungssensor an Ihrem Fahrrad oder befestigen Sie ihn ohne störende Kabel an Ihrem Laborwagen.

Messbereich:

- Geringe Beschleunigung: ± 157 m/s² (± 16 g)
- Hohe Beschleunigung: $\pm 1,960$ m/s² (± 200 g)
- Gyros: $\pm 2,000$ °/s, Winkel: ± 180 °
- Höhenmesser: -1,800m bis 10,000 m

Go Direct Charge Station



Artikel-Nr. GDX-CRG

Die Go Direct Ladestation ist die perfekte Lösung zum Aufladen Ihrer Go Direct Sensoren. Jede Ladestation hat 16 Ladeanschlüsse, 8 USB- und 8 Sensor-Ports. LED-Leuchten an den Go Direct-Sensoren zeigen den Ladezustand an. Die Station eignet sich auch zum Laden von Go Wireless®-Geräten.

Weitere Informationen finden Sie in unserem Online Shop unter www.educatec.ch

Für weitere Kataloge von uns wenden Sie sich an contact@educatec.ch

In der nächsten Ausgabe folgt eine Fortsetzung der GDX Sensoren.

 Go Direct™

EducaTec AG

Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63
contact@educatec.ch, www.educatec.ch

