

Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol

Urs Kirchgraber, kirchgra@math.ethz.ch

1

Im zweiten Teil dieser kleinen Reihe¹ über Schwingungsphänomene steht die sogenannte *van der Pol* (Differenzial-)Gleichung² im Mittelpunkt, siehe Teil I, Gleichung (9), also die Gleichung:

$$\ddot{x} - \epsilon[1 - x^2]\dot{x} + x = 0 \quad (1)$$

Dabei schreibe ich zur Vereinfachung der Notation x, \dot{x}, \ddot{x} an Stelle von $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$. Die Grösse ϵ ist ein Parameter, i.e. eine bestimmte (positive) Zahl. Die Gleichung (1) ist benannt nach *Balthasar van der Pol* (1889-1959), [6], der sie 1927 vorschlug, als er bei Philips arbeitete. Sie modelliert einen elektrischen Schwingkreis, bestehend aus einem Kondensator, einer Spule und einem Ohmschen Widerstand, in den überdies eine *Elektronenröhre* eingebaut ist. Für eine Begründung der vdP-Dgl siehe z.B. [1], p. 123ff, [3], p. 109f.

Die Entwicklung der Mathematik wird bekanntlich durch Probleme vorangetrieben, die schwierig sind, aber zu neuen Ideen anregen und sich mit hartnäckiger Arbeit doch früher oder später bewältigen lassen. Für das Gebiet der (gewöhnlichen) Differenzialgleichungen und Dynamischen Systeme darf die van der Pol-Gleichung (und Varianten von ihr) durchaus zu diesen Problemen gezählt werden.

Wie am Schluss von Teil I vermerkt wurde, besteht die Bedeutung der vdP-Dgl aus Sicht der Anwendung darin, dass sie *oszillatorisches Verhalten* beschreibt – und dies obwohl kein “Taktgeber” von aussen vorhanden ist, wie etwa bei der Gleichung von Duffing (siehe Teil I, dort den Cosinus-Term in (1)). Man spricht daher von *selbsterregten* Oszillationen oder Schwingungen. Ziel in diesem Artikel ist, (1) mit relativ einfachen mathematischen Mitteln zu untersuchen.

2

Eine Lösung lässt sich der vdP-Dgl sofort entlocken:

$$x(t) \equiv 0 \quad (\text{also: } x(t) = 0 \text{ für alle } t) \quad (2)$$

Tatsächlich: (2) ist Lösung von (1):

$$\ddot{0} - \epsilon[1 - 0^2]\dot{0} + 0 = 0 - \epsilon[1 - 0]0 + 0 = 0$$

Diese Rechnung zeigt: Gilt zu irgend einem Zeitpunkt t_0

$$x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0$$

¹Teil I mit dem Titel “Schwingungen I oder Wenn der Vater mit dem Sohn ...” ist im Heft 128, p. 24-30, dieses Bulletins erschienen.

²Kurz: vdP-Dgl.

so gilt³ $x(t) \equiv 0$. Mit anderen Worten: *Der durch (1) modellierte Schwinger kann sich im Ruhezustand befinden.*

Wie steht es um andere Lösungen der Gleichung (1)? “Lösungsformeln” sind keine bekannt! Die Schwierigkeiten werden vom mittleren Term in der vdP-Dgl (1) verursacht, also von

$$[1 - x^2]\dot{x} = \dot{x} - x^2 \dot{x} \quad (3)$$

weil er wegen des Produkts $x^2 \dot{x}$ *nichtlinear* ist. Nichtlineare Probleme sind notorisch schwierig – wie schon “simple” quadratische Gleichungen wie $z^2 = 2$, $z^2 = -1$ zeigen.

3

Ich schlage vor, dass wir die vdP-Dgl für eine allererste Annäherung mit einer *linearen* Differenzialgleichung vergleichen – oder genauer gesagt: mit *zwei* linearen Differenzialgleichungen. In Teil I wurde die Gleichung⁴

$$\ddot{x} - 2b\dot{x} + x = 0 \quad (4)$$

bereits angesprochen und deren Lösung für einen Spezialfall angegeben. Die allgemeine Lösung von (4) lautet^a

$$x(t) = e^{bt}[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)], \quad \omega := \sqrt{1 - b^2} \quad (5)$$

wobei wir voraussetzen wollen, dass $b^2 < 1$ gilt, sodass ω eine reelle Zahl ist. Mit c_1, c_2 werden beliebig wählbare Zahlen bezeichnet.

Das Verhalten der Lösungen (5) ist ganz unterschiedlich, je nachdem, ob die Grösse b *positiv* oder *negativ* ist. In Abbildung 1 sind die Graphen von $x(t)$ gemäss (5) für $c_1 = 0.4, c_2 = 0, b = 0.05$ (durchgezogen) und $b = -0.05$ (gestrichelt) für t zwischen 0 und 20 wiedergegeben.

Man erkennt an Formel (5) und Abbildung 1: Unabhängig vom Vorzeichen von b liegt oszillatorisches Verhalten (mit Periode $2\pi/\omega$) vor. Aber im Fall $b > 0$ (durchgezogen gezeichnet) wächst die Amplitude der Schwingung (exponentiell) an, im Fall $b < 0$ (gestrichelt gezeichnet) dagegen wird sie (exponentiell) gedämpft.

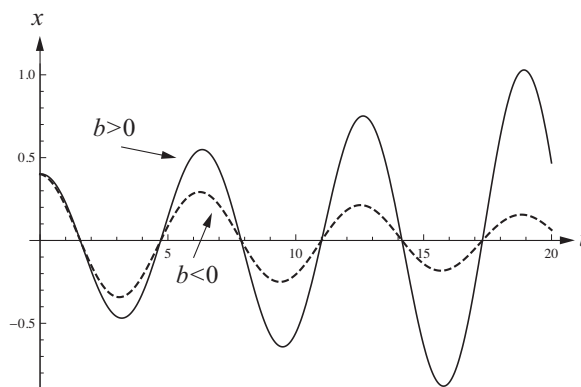


Abbildung 1: Grafische Darstellung der Funktion $x(t)$ aus (5) für $c_1 = 0.4, c_2 = 0, b = 0.05$ (durchgezogen) und $b = -0.05$ (gestrichelt) für t zwischen 0 und 20.

³Weil die Lösung von (1) zu vorgegebener Anfangsbedingung *eindeutig* bestimmt ist, siehe Abschnitt 5.

⁴Wobei dort anstelle von b die Bezeichnung $-\delta$ verwendet wurde. Wie δ ist b ein Parameter, i.e. eine bestimmte (reelle) Zahl.

Wenn man die Gleichungen (1) und (4) miteinander vergleicht, ist man versucht

$$\epsilon[1 - x^2] = 2b$$

zu setzen, was natürlich ganz unstatthaft ist, weil links eine im allgemeinen variable Grösse, rechts aber eine Konstante steht!

Immerhin darf man vielleicht wie folgt argumentieren: Wenn für eine Lösung $x(t)$ von (1) in einem gewissen t -Intervall $[x(t)]^2 < 1$ gilt, das heisst $\epsilon[1 - x(t)^2] > 0$, entspricht das ganz grob der Gleichung (4) für $b > 0$. Wenn umgekehrt in einem gewissen t -Intervall $[x(t)]^2 > 1$, also $\epsilon[1 - x(t)^2] < 0$ gilt, entspricht das grob der Gleichung (4) für $b < 0$.

Daraus folgt für die vdP-Dgl (1): Wenn die Amplitude der Schwingung $x(t)$ *klein* ist, wird die Schwingung *angefacht*, ist sie hingegen *gross*, wird die Amplitude *gedämpft*. Und dazwischen muss ja wohl ein Art “Trennlinie” verlaufen?

Solche Überlegungen sind natürlich bei weitem kein Beweis für die am Schluss von Teil I gemachte Behauptung, die vdP-Dgl (1) beschreibe robustes periodisches Verhalten. Aber sie machen diese Behauptung – aus Sicht der Mathematik – plausibel.

Ein Wort zur Physik. Ein elektrischer Schwingkreis bestehend aus einem Kondensator und einer Spule ist ein Schwinger – einer Feder vergleichbar – der durch einen Ohmschen Widerstand⁵ gedämpft wird. Woher kommt die Energie, die für das Anfachen der Schwingung benötigt wird, wenn die Amplitude klein ist, und um den Schwingungszustand aufrecht zu erhalten (cf. die Diskussion in Abschnitt 3 in Teil I)? Offenbar wird sie von der Elektronenröhre geliefert – das ist gerade ihre Aufgabe!

4

Die Theorie (gewöhnlicher) Differenzialgleichungen und Dynamischer Systeme wurzelt in Newton’s Theorie der Bewegung und die Ursprünge der sogenannten Theorie der (nichtlinearen) Schwingungen, der unser Thema entstammt, reichen auch schon mehr als 100 Jahre zurück.

Während sich der “Vater” der (modernen, das heisst *geometrisch* ausgerichteten) Theorie der Dynamischen Systeme, der Jahrhundert-Mathematiker *Jules Henri Poincaré* (1854-1912), primär durch das Newtonsche Modell der Himmelsmechanik^b inspirieren liess, haben sich in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts insbesondere eine ganze Reihe sowjetischer Mathematiker mit der Theorie der nichtlinearen Schwingungen beschäftigt und sich da grosse Verdienste erworben.

Die Theorie der nichtlinearen Schwingungen ist im Gegensatz zur Himmelsmechanik “down to earth”: Es geht um schwingungsfähige *mechanische* Systeme, vor allem aber auch um *elektrische* Schwingkreise – die damals dem technischen Fortschritt entsprechend ins Blickfeld kamen. Viele Fragestellungen konnten somit auch *experimentell* untersucht und aus Theorie und Experiment gewonnene Erkenntnisse *technisch* genutzt werden.

Neben einem gewaltigen Schub in der mathematischen Entwicklung der Theorie der Dynamischen Systeme seit dem 2. Weltkrieg hat die Hervorbringung von Computern und die damit verbundene, immer reichlicher verfügbare Rechenleistung das Gebiet vorangebracht: Mit immer besserer Software lässt sich nun wunderbar bequem “experimentieren” – die Herren Duffing und van der Pol (und viele andere) wären gewiss bass erstaunt ...

⁵Der Term, der den Widerstand modelliert, ist im linearen Teil von (3) enthalten.

5

In diesem Abschnitt werden ein paar Plots vorgestellt, die mit dem Software-Paket NDSolve von Mathematica zur *numerischen* “Lösung” von Differentialgleichungen erzeugt wurden, um die Überlegungen aus Abschnitt 3 zu stützen.

Abbildung 2 zeigt zwei (Näherungs-)Lösungen der vdP-Dgl (1) für $\epsilon = 0.2$ und über dem Zeitintervall $[0, 50]$. Die ausgezogene gezeichnete gehört zur Anfangsbedingung $x(0) = 0.5, \dot{x}(0) = 0$. Für die andere, gestrichelt gezeichnete, gilt $x(0) = 4.0, \dot{x}(0) = 0$. Bei beiden erkennt man einen “Einschwingvorgang”: Bei der ersten ist die Amplitude zunächst klein, wächst dann, bis ein *stationärer Schwingungszustand* erreicht ist. Bei der zweiten, gestrichelt gezeichneten (Näherungs-)Lösung ist die Amplitude zunächst recht gross, wird aber bald gedämpft und es stellt sich auch hier mit der Zeit ein stationärer Schwingungszustand ein. Amplituden und Perioden bei beiden stationären Schwingungen scheinen gleich gross zu sein. Die beiden stationären Schwingungen erreichen jedoch ihre Maxima und Minima nicht zur gleichen Zeit: sie sind *phasenverschoben*, wie man sieht.

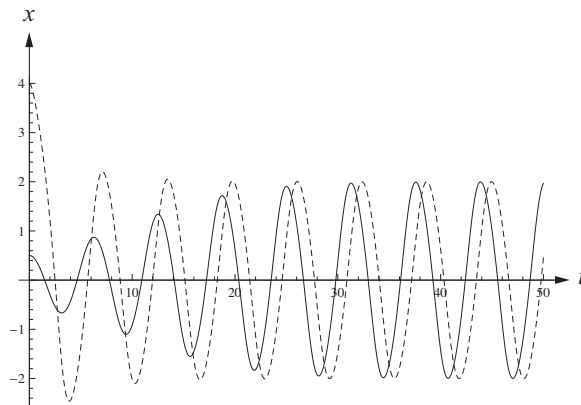


Abbildung 2: Zwei (Näherungs-)Lösungen der vdP-Dgl (1) für $\epsilon = 0.2$; beide streben, wenn auch phasenverschoben, gegen den gleichen stationären Schwingungszustand.

Abbildung 3 zeigt die Darstellung der beiden Lösungen im sogenannten *Phasenportrait*. Wenn man zusätzlich zur Funktion $x(t)$ ihre Ableitung $v(t) := \dot{x}(t)$ einführt, lässt sich die Differentialgleichung (1), die 2. Ordnung ist, bekanntlich als *System* zweier Differentialgleichungen 1. Ordnung schreiben:

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \epsilon(1 - x^2)v - x \end{cases} \quad (6)$$

Ist nun $(x(t), v(t))$ eine Lösung von (6), so definiert diese via die *Parameterdarstellung*

$$\begin{cases} x &= x(t) \\ v &= v(t) \end{cases} \quad (7)$$

eine Kurve in der x - v -Ebene. Die Ebene heisst *Phasenebene* und die Kurve *Phasenkurve*, oder *Orbit*, oder *Lösungskurve* der betrachteten Lösung.

In Abbildung 3 sind Stücke der Phasenkurven zu den beiden Lösungen aus Abbildung 2 gezeichnet. Die im Uhrzeigersinn nach aussen spiralende Lösungskurve ist durchgezogen gezeichnet, die von aussen, ebenfalls im Uhrzeigersinn, jedoch nach innen spiralende Lösungskurve ist gestrichelt gezeichnet. Das Bild macht den Anschein, dass die beiden Lösungskurven gegen die gleiche, *geschlossene Kurve* spiralen, die eine von innen, die andere von aussen.

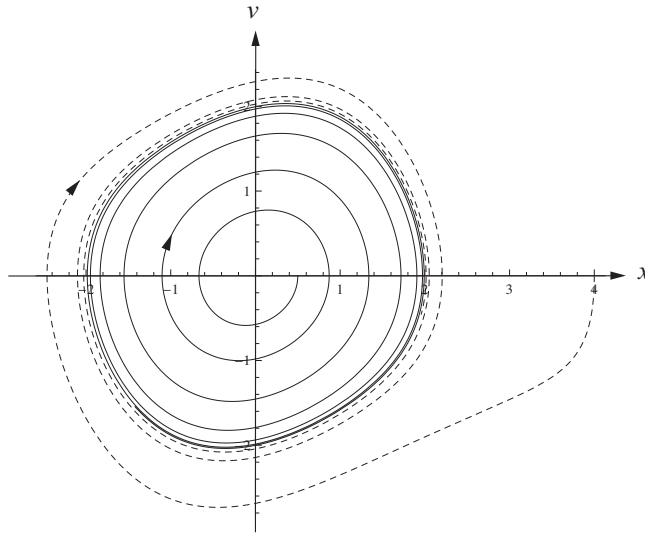


Abbildung 3: Darstellung der Lösungskurven zu den beiden Lösungen aus Abbildung 2; die eine spiralt im Uhrzeigersinn nach aussen, die andere von aussen nach innen.

Die Gesamtheit aller Lösungskurven der Differentialgleichung (1) beziehungsweise des (ebenen)⁶ Systems (6) heisst ihr *Phasenportrait*. Aus dem bekannten *Satz* über die *Existenz* und *Eindeutigkeit* von *Lösungen* von Differentialgleichungssystemen zu vorgegebenen Anfangsbedingungen folgt, dass es durch jeden Punkt der Phasenebene eine Lösungskurve gibt, und dass sich Phasenkurven von ebenen Systemen nicht schneiden oder berühren können: Zwei Phasenkurven sind entweder identisch oder sie haben keinen gemeinsamen Punkt. Ein Phasenportrait stellt also eine ‘‘Auffächerung’’ der Phasenebene durch Lösungskurven dar. Man spricht daher auch von einer *Strömung*⁷, besonders wenn noch durch einen *Pfeil* angedeutet wird, in welcher Richtung die entsprechende Phasenkurve mit wachsender Zeit⁸ durchlaufen wird.

Natürlich kann (und soll) man nicht sämtliche Phasenkurven wirklich zeichnen, denn das ergäbe lediglich ein vollkommen schwarzes Blatt. Die Aufgabe ist vielmehr, eine *repräsentative Auswahl* so zu treffen, dass man sich das vollständige Phasenportrait leicht vorstellen kann!

In Abbildung 4 ist (nur) noch je ein kleineres Stück der beiden Phasenkurven aus Abbildung 3 gezeichnet, sowie die erwartete *geschlossene Kurve p*; überdies ist der Nullpunkt der Phasenebene hervorgehoben: Er stellt ebenfalls eine Phasenkurve dar – sie gehört zur Lösung $x(t) \equiv v(t) \equiv 0$, also zum *Ruhezustand des Schwingers*, auf den schon in Abschnitt 2, siehe Gleichung (2), hingewiesen wurde.

Die geschlossene Kurve *p* repräsentiert den (vermuteten) stationären Schwingungszustand der vdP-Dgl in der Phasenportrait-Darstellung. Gezeichnet wurde er mit Hilfe einer der beiden spiralenen Lösungskurven – es ist ein Ausschnitt, jedoch *ohne* den Einschwingvorgang.

Die Computersimulationen in diesem Abschnitt bestätigen, dass die Betrachtung der linearen Differentialgleichung (4) (für verschiedene Vorzeichen des Parameters *b*) ganz gute Anhaltspunkte für die in der vdP-Dgl steckenden Dynamik liefert. Und zusammen ergibt sich ein einfaches und überzeugendes Bild: Es belegt, dass sich das durch die vdP-Dgl beschriebene schwingende System hinsichtlich der auftretenden Phänomene kaum vom einfachen Modell einer Pendeluhr unterscheidet, das im Teil I zur Diskussion gestellt wurde.

⁶Systeme von 2 gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung nennt man *2-dimensional* oder *eben*.

⁷*Englisch: (phase)flow.*

⁸D.h. wachsenden Werten von *t*.

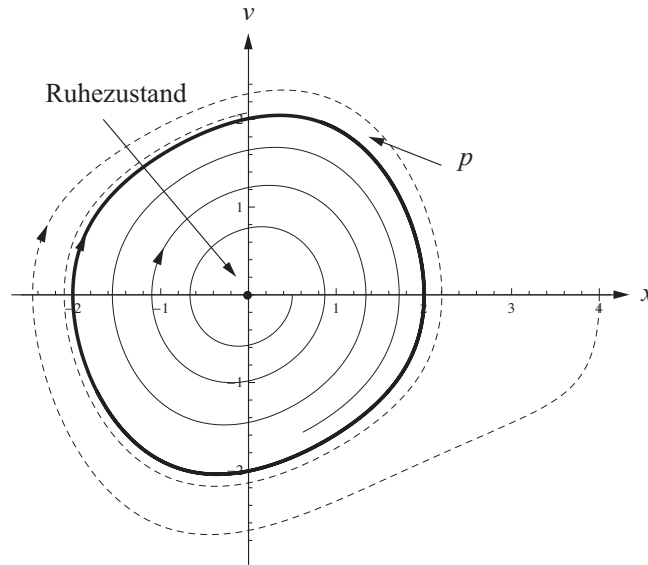


Abbildung 4: Der stationäre periodische Zustand ist repräsentiert durch die stark ausgezogene geschlossene Kurve p , der Ruhezustand des Schwingers durch den stark markierten Nullpunkt. Zwei Lösungskurven die gegen den stationären periodischen Zustand streben, eine von innen – weg vom Ruhezustand, die andere von aussen, sind schwach durchgezogen bzw. gestrichelt gezeichnet.

6

Eher pragmatisch eingestellte Leserinnen und Leser dieses Artikels sind vermutlich bereit, sich mit der bisherigen Analyse der vdP-Dgl zufrieden zu geben. Stärker mathematisch Interessierte hingegen möchten sich vermutlich weder mit den (sehr!) heuristischen Betrachtungen aus Abschnitt 3, noch mit den numerischen Rechnungen aus Abschnitt 5 begnügen und fragen nach mehr *Einsicht*.

Es lässt sich *beweisen*, dass die vdP-Dgl genau eine periodische Lösung besitzt, die alle übrigen Lösungen anzieht – abgesehen von der Ruhelage natürlich. In Anhang III des Klassikers von J.J. Stoker: *Nonlinear Vibrations*, [5], findet man einen Existenzbeweis für die periodische Lösung, in Anhang IV der Nachweis ihrer Eindeutigkeit. Für eine etwas allgemeinere Klasse von Gleichungen – die sogenannte *Gleichung von Liénard* – findet man einige Resultate und teilweise Beweise in [2]. Die Lektüre ist anspruchsvoll und eine Darstellung würde den Rahmen dieses einführenden Artikels sprengen. Aber eine *zentrale Idee* lässt sich vorstellen. Sie stammt von Poincaré. Und für hinreichend kleine (positive) Werte von ϵ lässt sich der zitierte Satz mit ihr beweisen, cf. Abschnitt 8.

7

Die positive x -Achse ist für die vdP-Dgl eine sogenannte *section de Poincaré*, wie die Franzosen gerne sagen, ein *Poincaré-Schnitt* auf deutsch.

Wenn man irgendeinen Punkt $(a_0, 0)$ auf der nicht-negativen x -Achse wählt und die Lösung $(x(t), v(t))$ der vdP-Dgl (6) zur Anfangsbedingung $x(0) = a_0, v(0) = 0$ betrachtet, wird diese nach einer gewissen Zeit $T > 0$ (zum ersten Mal) wieder auf die nicht-negative x -Achse treffen⁹, siehe Abbildung 5. Damit

⁹ T hängt von a_0 (und von ϵ) ab: $T = T(a_0, \epsilon)$. Für ϵ hinreichend klein folgt die Aussage aus dem Satz über die *stetige Abhängigkeit* der Lösungen von (6) vom Parameter ϵ .

wird eine *Abbildung* P der nicht-negativen x -Achse auf sich definiert:

$$P : a_0 \in \mathbf{R}^+ \rightarrow a_1 := P(a_0) = x(T, a_0) \in \mathbf{R}^+ \quad (8)$$

Die Abbildung P heisst *Poincaré-Abbildung*.

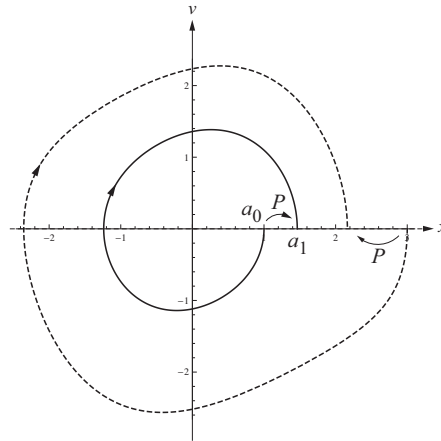


Abbildung 5: Die der vdP-Dgl “zugeordnete” *Poincaré-Abbildung* P , siehe (8): Zwei Punkte und ihre Bilder unter P , berechnet mit NDSolve von Mathematica für $\epsilon = 0.2$.

Mit Hilfe eines numerischen Lösungsverfahrens für Differentialgleichungen lässt sich die *Poincaré-Abbildung* zur vdP-Dgl bei vorgegebenem ϵ (approximativ) berechnen^c. Abbildung 6 zeigt das Resultat für $\epsilon = 0.2$.

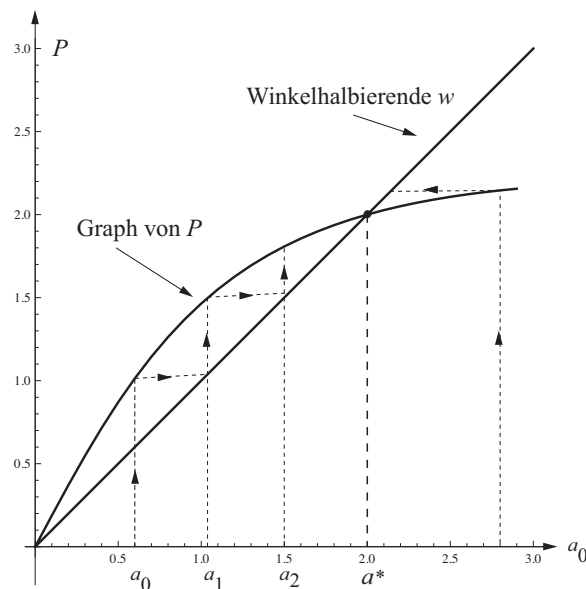


Abbildung 6: Die der vdP-Dgl “zugeordnete” *Poincaré-Abbildung* P für $\epsilon = 0.2$, berechnet mit NDSolve von Mathematica, Details, siehe Endnote c.

Sie *erkennen*: Die Abbildung (8) ist das *Pendant* der Abbildung $v_0 \rightarrow \lambda v_0 + \Delta$ im ersten Teil dieser Artikelreihe¹⁰, dort Abschnitt 2.

¹⁰Siehe Fussnote 1.

Durch die Abbildung P , (8), wird (wieder) ein *diskretes dynamisches System* (abgekürzt: ddS) auf der nicht-negativen x -Achse definiert. Die *Pointe* ist, dass man das Verhalten der Lösungskurven der vdP-Dgl in der Phasenebene aus dem Verhalten der Bahnen dieses ddS ablesen kann!

Unter einer *Bahn* des durch P definierten ddS versteht man eine Zahlfolge a_0, a_1, a_2, \dots wobei

$$a_1 = P(a_0), a_2 = P(a_1), a_3 = P(a_2), \dots \quad (9)$$

gilt. Dabei heisst a_0 *Start-* oder *Anfangswert* der Bahn. In Abbildung 6 ist angedeutet, wie man die Bahn a_1, a_2, \dots des ddS P , ausgehend von einem Startpunkt a_0 , mit Hilfe der Winkelhalbierenden im Prinzip *grafisch* gewinnen kann. Daraus erkennt man folgendes: A) Die Zahl a^* – es ist die Abszisse des Schnittpunkts des Graphen von P mit der Winkelhalbierenden – ist ein *Fixpunkt* des ddS P . Das heisst, die Bahn mit Startwert a^* lautet:

$$a_0 = a^*, a_1 = P(a^*) = a^*, a_2 = a^*, a_3 = a^*, \dots \quad (10)$$

B) Ganz analog ist 0 Fixpunkt von P :

$$a_0 = 0 = a_1 = a_2 = a_3 = \dots \quad (11)$$

C) Für alle Startwerte $a_0 \neq \{0, a^*\}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a^* \quad (12)$$

Diese Eigenschaften des ddS P folgen aus folgenden Eigenschaften der Funktion P :

- α) P ist monoton wachsend.
- β) Der Graph von P hat genau zwei Schnittpunkte mit der Winkelhalbierenden w : $(0, 0)$ und (a^*, a^*) .
- γ) Der Graph von P verläuft über dem Intervall $(0, a^*)$ *oberhalb*, rechts von a^* *unterhalb* von w .

Dass α) gilt, ist kein Zufall: Diese Eigenschaft folgt aus der in Abschnitt 5 schon vermerkten Eigenschaft, dass verschiedene Lösungskurven der vdP-Dgl (6) keine gemeinsamen Punkte haben und einem Blick auf Abbildung 5. Die Eigenschaften β), γ) hingegen reflektieren Eigenschaften der spezifischen Nichtlinearität $\epsilon[1 - x^2]\dot{x}$ der vdP-Dgl (1), bzw. (6).

8

Die vdP-Dgl (1) hängt vom Parameter ϵ ab. Unter der Voraussetzung

$$\epsilon > 0, \text{ hinreichend klein} \quad (13)$$

können wir die Existenz von anziehendem periodischen Verhalten in der Dynamik der vdP-Dgl auch noch ganz ohne Computer-Unterstützung nachweisen.

In Endnote c wurde gezeigt, dass für die Poincaré-Abbildung P für die vdP-Dgl gilt

$$P(a_0) = a(2\pi, a_0) \quad (14)$$

siehe (25). Dabei bezeichnet $a(\varphi, a_0)$ die Lösung der Differenzialgleichung¹¹

$$a' = \epsilon \frac{a(1 - a^2 \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi}{1 + \epsilon(1 - a^2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi \cos \varphi} \quad (15)$$

¹¹Der Akzent bezeichnet die Ableitung nach der Variablen φ .

zur Anfangsbedingung $a(0) = a_0$. Nun hängt die Lösung $a(\varphi, a_0)$ von (15) und damit die Poincaré-Abbildung $P(a_0)$ in Tat und Wahrheit vom Parameter ϵ ab. Es ist nicht schwierig, $a(\varphi, a_0, \epsilon)$ und dann $P(a_0, \epsilon)$ nach ϵ zu entwickeln. Da sich die Differenzialgleichung (15) für $\epsilon = 0$ auf die triviale Gleichung $a' = 0$ reduziert, startet die Entwicklung mit der *Identität*

$$P(a_0, \epsilon) = a_0 + \dots \quad (16)$$

Etwas mehr (aber nicht viel!) Anstrengung kostet die Bestimmung des nächsten Terms in der Entwicklung nach ϵ . Man findet nach etwas Rechnung:

$$P(a_0, \epsilon) = a_0 + \epsilon(a_0 - \frac{1}{4}a_0^3)\pi + \epsilon^2(\dots) + \dots \quad (17)$$

Nun vernachlässigt man zunächst die Terme zweiter und höherer Ordnung in ϵ und untersucht die Abbildung

$$\tilde{P}(a_0, \epsilon) = a_0 + \epsilon(a_0 - \frac{1}{4}a_0^3)\pi \quad (18)$$

Wählen Sie $R > 2$, beliebig. Für alle positiven, hinreichend kleinen Werte von ϵ und $a_0 \in [0, R]$ hat \tilde{P} die Eigenschaften α), β) und γ) aus Abschnitt 7, wobei $a^* = 2$ gilt. Dasselbe gilt auch für die Abbildung P aus (17), wobei $a^* = a^*(\epsilon) = 2 + \epsilon(\dots)$ ist.

Das bedeutet: Die vdP-Dgl hat eine *periodische Lösung*. Ihre *Phasenkurve* ist näherungsweise ein *Kreis* mit Radius 2 und dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Sie zieht *alle* anderen Lösungen aus einer *beliebig gross* vorgegebenen Umgebung des Nullpunkts an (abgesehen von der Gleichgewichtslösung $x(t) \equiv 0$), sofern $\epsilon > 0$, hinreichend klein gewählt ist.

9

Zum Schluss noch folgendes: Selbsterregung tritt keineswegs nur in mechanischen Systemen und elektrischen Schwingkreisen auf. Furore machte die Entdeckung von Selbsterregung in der Chemie bei sogenannten *autokatalytischen Reaktionen*. Legendar ist das Beispiel der *Belousov-Zhabotinskii-Reaktion*, siehe [4], p. 179ff. Man spricht von einer “chemischen Uhr”.

Eng mit der vdP-Dgl verwandt ist das *Fitzhugh-Nagumo-Modell* der berühmten *Hodgkin-Huxley-Gleichungen*, die die Übertragung von elektrischen Signalen im neuronalen System modellieren, siehe [4] p. 161ff. Fazit: *Selbsterregung ist ein Phänomen von universeller Bedeutung*.

10

Der Autor dankt Norbert Hungerbühler, Martin Lieberherr und Daniel Stoffer herzlich für zahlreiche wertvolle Hinweise, die Eingang in das Manuskript gefunden und es verbessert haben.

Notes

^aÄhnlich wie man die “gemischt” quadratische Gleichung

$$z^2 + 2\beta z + \gamma = 0$$

durch die Transformation $z = y - \beta$ in die “rein” quadratische Gleichung

$$y^2 + (\gamma - \beta^2) = 0$$

überführen kann, gelingt es, durch die Transformation

$$x(t) = e^{bt}y(t)$$

den linearen Term $2bx$ in der Differentialgleichung (4) wegzutransformieren. Die Differentialgleichung für y lautet, wie eine Rechnung zeigt:

$$\ddot{y} + (1 - b^2)y = 0$$

Unter der Voraussetzung $0 < b^2 < 1$ ist die "allgemeine" Lösung dieser Differentialgleichung

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \quad \omega := \sqrt{1 - b^2}$$

wobei c_1, c_2 beliebig wählbare Zahlen bezeichnen, die zum Beispiel dazu benützt werden können, um die Anfangsbedingung

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

für vorgegebene Zahlen y_0, \dot{y}_0 zu erfüllen.

^bEndlich viele Massenpunkte ziehen sich paarweise nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz an und bewegen sich gemäss dem Grundgesetz der Mechanik.

^cZur Bestimmung der Poincaré-Abbildung P zur vdP-Dgl ist es zweckmässig in der Phasenebene x, v , *Polarkoordinaten* φ, A zu verwenden. Wenn A den Abstand eines Punkts (x, v) vom Nullpunkt und φ den Polarwinkel, gemessen von der positiven x -Achse und im Uhrzeigersinn, bezeichnet, gilt

$$x = A \cos \varphi, \quad v = -A \sin \varphi \tag{19}$$

Eine Phasenkurve hat dann die Darstellung

$$A = a(\varphi) \tag{20}$$

und eine Lösung $(x(t), v(t))$ wird durch eine Funktion

$$\varphi = \phi(t) \tag{21}$$

beschrieben. Gesucht ist die Differentialgleichung für $a(\varphi)$. Ein Akzent bezeichne die Ableitung nach φ , der Punkt, wie bisher, die Ableitung nach t . Denkt man sich (20) in (19) eingesetzt, sodann (21) für φ und leitet nach t ab, folgt unter Benützung von (6) :

$$\begin{cases} \dot{x} &= [a' \cos \varphi - a \sin \varphi] \dot{\phi} &= -a \sin \varphi \\ \dot{v} &= [-a' \sin \varphi - a \cos \varphi] \dot{\phi} &= -a \cos \varphi - \epsilon f \end{cases} \tag{22}$$

Dabei wurde die Abkürzung

$$f(x, v) := -(1 - x^2)v = (1 - a^2 \cos^2 \varphi)a \sin \varphi \tag{23}$$

benutzt. Indem man aus (22) die Grösse $\dot{\phi}$ eliminiert und dann die verbleibende Gleichung nach a' auflöst, erhält man die gesuchte Differentialgleichung für die Funktion $a(\varphi)$

$$a' = \epsilon \frac{f \sin \varphi}{1 + \epsilon(f/a) \cos \varphi} \tag{24}$$

Bezeichnet $a(\varphi, a_0)$ die Lösung von (24) zur Anfangsbedingung $a(0) = a_0$, so ist die gesuchte Poincaré-Abbildung, siehe (8), (14), durch die Vorschrift

$$P(a_0) = a(2\pi, a_0) \tag{25}$$

gegeben. Abbildung 6 wurde mit Hilfe des numerischen Lösers NDSolve genau so, also unter Verwendung der Differentialgleichung (24), ermittelt.

Literatur

- [1] P. Hagedorn: *Non-linear oscillations*, 1981.
- [2] H. W. Knobloch, F. Kappel: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, p. 198 ff, 1974.
- [3] K. Magnus: *Schwingungen*, 1961, 1976³.
- [4] J. D. Murray: *Mathematical Biology*, 1989.
- [5] J. J. Stoker: *Nonlinear Vibrations*, 1950.
- [6] B. van der Pol: *On relaxation-oscillations*, The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. & J of Sci. 2, 1927, p. 978-992.