

Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2C

Urs Kirchgraber, kirchgra@math.ethz.ch

Dies ist die Fortsetzung der Artikel *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2A* und *Teil 2B*, erschienen in den VSMP-Bulletins 131 und 132. Abschnitte und Gleichungen aus diesen Teilen werden in dieser Fortsetzung mit der entsprechenden Nummer, ergänzt durch den Zusatz “2A” bzw. “2B”, zitiert.

Wie man sich *erinnert* befassen wir uns in dieser Artikel-Reihe mit der Differenzialgleichung von G. Duffing in der Form:

$$\ddot{y} + y = \epsilon [2\nu y - 2\delta \dot{y} + \gamma y^3 + 2 \cos(t)] \quad (32), 2A$$

Dabei sind ν, δ, γ und ϵ *Parameter*¹ der Gleichung. Die sogenannte *Mittelwert-Methode* (engl. *Method of Averaging*) erlaubt es, das Verhalten der Lösungen der Dgl (32), 2A – jedenfalls in gewissem Ausmass und für *hinreichend kleine, positive Werte* des *Störungsparameters* ϵ (mehr dazu in Abschnitt 7, 2A) – anhand des sogenannten “*gemittelten Systems*” zu untersuchen. Dieses lautet²:

$$\begin{cases} \bar{x}'_1 &= -\delta \bar{x}_1 + \nu \bar{x}_2 - \kappa (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) \bar{x}_2 \\ \bar{x}'_2 &= -\nu \bar{x}_1 - \delta \bar{x}_2 + \kappa (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) \bar{x}_1 - 1 \end{cases} \quad (30), 2A$$

In Teil 2B wurde das Verhalten der Lösungen des Systems (30), 2A untersucht und Beziehungen zum Verhalten der Lösungen der Duffing-Gleichung (32), 2A unter der Voraussetzung hergestellt, dass ϵ positiv, aber *hinreichend klein* ist. Das soll weiterhin gelten.

1

In diesem letzten Teil der Artikel-Reihe soll zum Schluss noch ein Phänomen aufgezeigt werden, von dem man sagen kann, dass es *berühmt* ist.

Ich erkläre das Phänomen anhand des gemittelten Systems (30), 2A. Es tritt im Fall $\kappa^2 > \frac{64}{27}\delta^6$ auf, also wenn der Parameter κ der Nichtlinearität in der Duffing-Gleichung (32), 2A einen Wert oberhalb des kritischen Schwellwerts $\kappa_{krit} := \frac{8}{3\sqrt{3}}\delta^3$ hat. Diese Bedingung ist im Fall erfüllt, der durch das Bifurkationsdiagramm von Abbildung 2 c), 2 d), 2B dargestellt wird. Diese Abbildung ist, aus Gründen der bequemerer Lesbarkeit, in Abbildung 1 unten nochmals wiedergegeben.

Die *Fragestellung* lautet:

Wie verhält sich der Duffing-Schwinger bei einer adiabatischen Veränderung des Parameters ν ?

¹ γ ist ein Mass für die Stärke der Nichtlinearität der Rückstellkraft, die durch y^3 modelliert wird, $\delta > 0$ für die Stärke der Dämpfung. Für die Bedeutung von ν siehe Abschnitt 3, 2B. Der sogenannte Störparameter ϵ wird als klein und positiv gedacht. Damit stellt die Duffing-Gleichung eine “*Störung*” des *harmonischen Oszillators* $\ddot{y} + y = 0$ dar.

²Die Herleitung findet sich in den Abschnitten 5, 2A und 6, 2A. Wie schon dort bedeutet ‘ die Ableitung nach τ , wobei τ und die Zeit t durch $\tau = \epsilon t$ miteinander verknüpft sind, und κ und γ durch $\kappa = -(3/8)\gamma$.

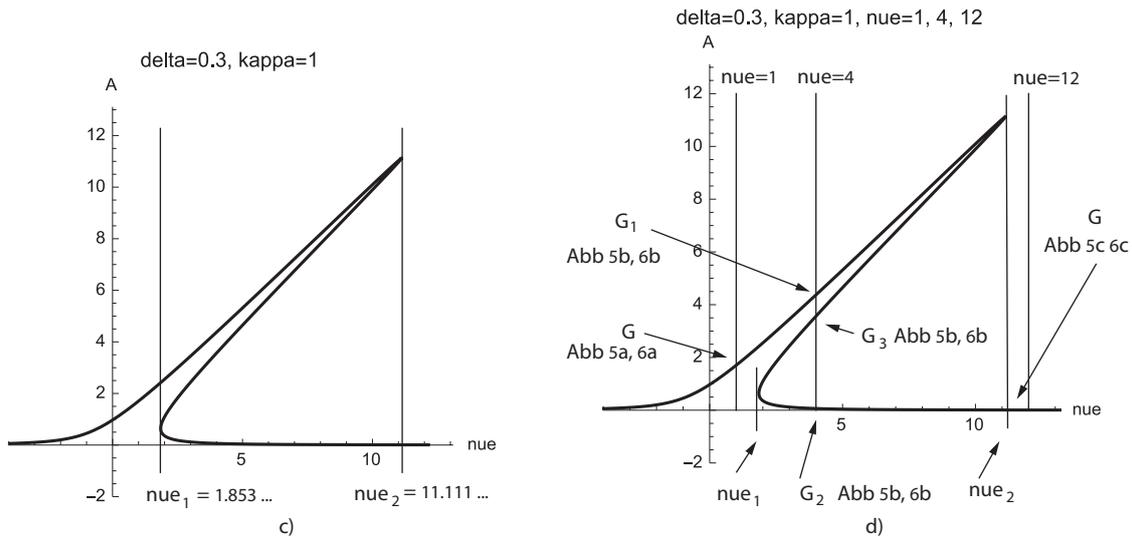


Abbildung 1: Wiederholung von Abbildung 2 c), d), 2B

Im Fremdwörter-Duden wird adiabatisch mit “nicht hindurchtretend” umschrieben. Hier soll adiabatisch bedeuten, dass der Parameter ν in ganz kleinen Schritten und quasi unendlich langsam verändert wird.

Was beobachtet jemand bei diesem (Gedanken-)Experiment?

Gehen wir wieder von $\delta = 0.3$, $\kappa = 1$ aus und beginnen wir mit $\nu = 1$, siehe Abbildung 1 und entsprechend Abbildung 6 a), 2B. An welchem (Anfangs-) oder Start-Punkt in der \bar{x}_1 - \bar{x}_2 -Ebene das System am Anfang, sagen wir zur Zeit $t = 0$, auch ist, nach genügend langer Zeit befindet es sich (fast) im Gleichgewicht G , siehe Abbildung 6 a), 2B.

Nun denken wir uns ν ein *klein wenig* über 1 hinaus *erhöht*. Das Phasenportrait zu diesem neuen Wert von ν wird sich kaum von demjenigen in Abbildung 6 a), 2B unterscheiden: Der Gleichgewichtspunkt wird sich ein wenig verschoben haben, und zwar nach aussen, denn sein A -Wert³ ist etwas grösser, wie aus Abbildung 1 folgt. Und in dieses geringfügig verschobene Gleichgewicht schwingt sich das System ein, denn auch dieses Gleichgewicht ist ein globaler Attraktor⁴. Im Hinblick auf die Diagramme in Abbildung 1 kann man sagen: Indem wir ν , beginnend mit $\nu = 1$ und wenn das System im entsprechenden Gleichgewichtszustand ist, erhöhen, folgen wir dem *oberen Ast* in Abbildung 1 a), b).

Und so geht es weiter: ν *wird in sehr kleinen Schritten und sehr langsam vergrößert*. Dabei wandert der Gleichgewichtspunkt, in den sich das System jeweils einschwingt, immer etwas weiter nach aussen – weil sein A -Wert gemäss Abbildung 1 kontinuierlich wächst.

Wenn bei diesem Vorgang die *kritische Schwelle* ν_1 , siehe Abbildung 1 b), *überschritten* ist, ändert sich sozusagen die “Grosswetterlage”, denn nun gibt es neben dem Gleichgewichtspunkt G_1 , der an Stelle von G tritt, zwei *zusätzliche* Gleichgewichtspunkte: Das Phasenportrait hat jetzt die Gestalt von Abbildung 6 b), 2B. Ist ν nur geringfügig grösser als ν_1 liegen die Gleichgewichtspunkte G_2 und G_3 nahe beieinander und “weit weg” von G_1 . Die Person, die unser Experiment beobachtet, merkt von der (im Grunde genommen dramatischen) Veränderung (einstweilen) nichts: Das System schwingt sich auf den nur unwesentlich (weiter aussen) liegenden Gleichgewichtspunkt G_1 ein.

³Pro memoria: $A := X_1^2 + X_2^2$, siehe (6), 2B; dabei bezeichnen X_1 , X_2 die Koordinaten des Gleichgewichts.

⁴Zum Begriff “globaler Attraktor” siehe Abschnitt 6, 2B.

Es werde weiter im Text verfahren und ν *adiabatisch erhöht*. Unsere *Beobachterin* stellt nichts besonderes fest: Für sie schwingt das System ständig auf eine Gleichgewichtslösung ein, die sich fortwährend langsam (adiabatisch) ein wenig nach aussen verschiebt. *Wir* wissen: Qualitativ gilt das Phasenportrait von Abbildung 6 b), 2B, wobei sich das System (vorläufig) immer (fast) im Gleichgewicht G_1 befindet.

Irgend wann kommt der *Moment*, in dem ν die *nächste kritische Schwelle* ν_2 überschreitet, siehe Abbildung 1.

Abbildung 2 zeigt *Schnappschüsse* von den *Lagen der Gleichgewichte* für Werte von ν etwas unterhalb von ν_2 und für einen Wert etwas oberhalb.

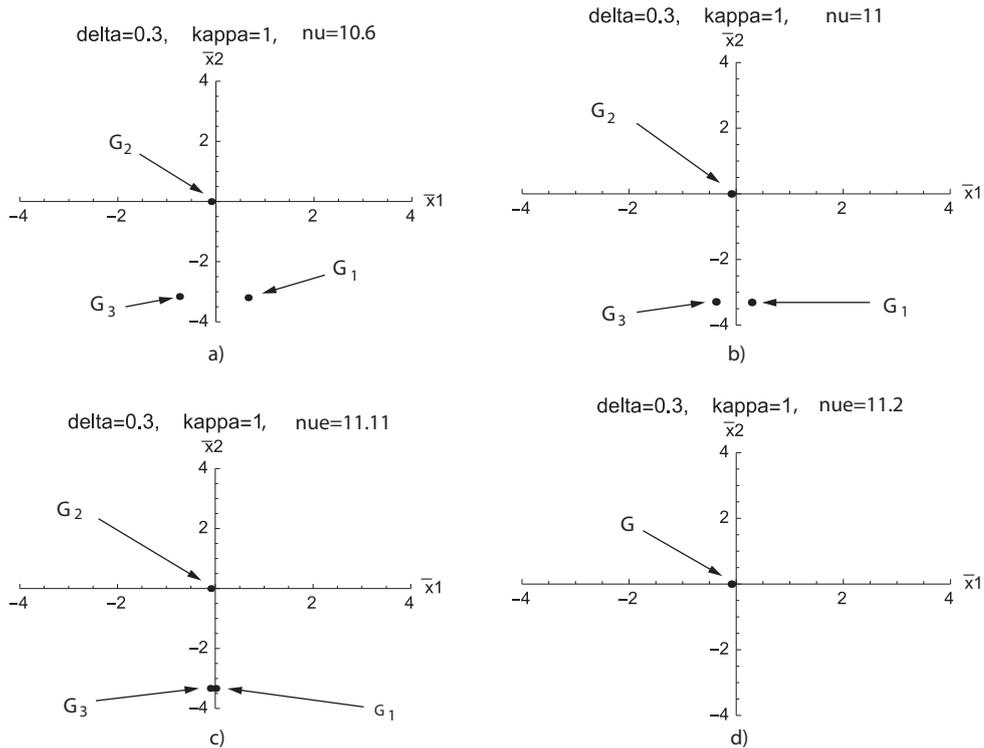


Abbildung 2: Die Entwicklung der Gleichgewichtslagen des gemittelten Systems (30), 2A, wenn der Parameter ν den kritischen Wert ν_2 passiert

Man sieht: G_3 und G_1 rücken sukzessive zusammen und beim Erreichen des kritischen Wertes ν_2 “fressen” sie sich gewissermassen auf und *verschwinden*.

Und jetzt der *springende Punkt*: Wenn ν einen Wert etwas oberhalb von ν_2 erreicht hat, siehe Abbildung 2 d), ist der Systemzustand noch ungefähr dort, wo G_3 und G_1 grad noch waren⁵, ehe sie verschmolzen und verschwanden!

Für $\nu > \nu_2$ gibt es nur noch den einen Gleichgewichtspunkt, der in Abbildung 2 d) (wieder) mit G bezeichnet ist und nahe beim Nullpunkt liegt. Da G ein globaler Attraktor ist, siehe Abschnitt 6, 2B, *erfährt der Systemzustand nun eine grosse Änderung*: Für ν etwas kleiner als ν_2 lag er ungefähr am Punkt⁶ $(0, -3.3)$. Ist der Wert von ν auf etwas über ν_2 angewachsen, schwingt sich das System auf den

⁵Also ungefähr am Punkt $(0, -3.3)$.

⁶Das bedeutet für die Duffing-Gleichung (32), 2A, dass der Schwinger mit einer Amplitude von etwa $\sqrt{A} \approx \sqrt{0^2 + (-3.3)^2} \approx 3.3$ schwingt.

einzigem dann vorhandenen Gleichgewichtspunkt G ein (was durchaus einige Zeit in Anspruch nehmen kann), wird also schliesslich nahe dem Nullpunkt zu liegen kommen⁷.

Das ist ein *überraschendes Phänomen*. Normalerweise gehen wir davon aus, dass sich das Verhalten eines Systems nur geringfügig ändert, wenn einer seiner Parameter geringfügig verändert wird: “Das System verhält sich *stetig*.”

Das trifft, wie unsere Analyse zeigt, auch für alle ν -Werte von $\nu = 1$ bis ν_2 zu. An der Stelle $\nu = \nu_2$ aber verhält sich das System *unstetig*: *Es tritt eine starke Veränderung im Systemverhalten ein*.

Die Tatsache, dass ein solches Phänomen in einem (einfachen) Modell eines schwingenden Systems auftritt, untersucht und (zumindest in gewisser Weise) verstanden werden kann, hat *erkenntnistheoretische* Bedeutung. Man lernt: Wohl verhalten sich Systeme in Bezug auf Parametervariation *typischerweise* stetig, das heisst eine kleine Parameteränderung bewirkt *meistens* auch nur eine geringfügige Verhaltensänderung des Systems. Meistens. Aber nicht immer: Das demonstriert die Duffing-Gleichung.

Ob uns das nachdenklich machen sollte? Was, wenn solche Phänomene zum Beispiel im Weltumweltsystem auftreten? Vielleicht denken Sie – ja, dann muss man halt den entsprechenden Parameter wieder etwas unter den kritischen Wert zurückfahren. Doch genügt das? Es ist interessant die Abbildungen 1 und Abb 6, 2B noch unter diesem Gesichtspunkt zu betrachten. Vielleicht tun Sie das?

Untersuchungen von unstetigem Systemverhalten hatten in den späten 1960-iger und 1970-iger Jahren unter der (werbewirksamen) Bezeichnung “*Katastrophentheorie*” Konjunktur. Berühmte Exponenten waren *R. Thom* (1923-2002) und Sir *E. C. Zeeman* (1925-2016).

2 Epilog

Die Differenzialgleichung

$$\ddot{y} + y = \epsilon [2\nu y - 2\delta \dot{y} + 2 \cos(t)] \quad (1)$$

lässt sich mit den Mitteln der Differenzialrechnung, wie sie Gymnasiastinnen und Gymnasiasten kennen lernen, lösen und es ist lohnend die Lösungen zu diskutieren, was ebenfalls mit den Instrumenten der Schulmathematik gelingt. Das zeigt ja der Teil *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 1*, erschienen im VSMP-Bulletin 130, siehe p. 24-31. Dass das Problem (1) mit verhältnismässig einfachen Mitteln vollständig analysiert werden kann liegt daran, dass (1) eine *lineare* (Differenzial-)Gleichung ist.

Die Situation ist *schlagartig* anders, wenn man die Feder, die im Schwinger (1) (physikalisch gesprochen) die Rückstellkraft erzeugt, nur schon ‘ein bisschen’ *nichtlinear* macht. Dann lautet die Gleichung bei einer naheliegenden Wahl der Nichtlinearität neu

$$\ddot{y} + y = \epsilon [2\nu y - 2\delta \dot{y} - \frac{8}{3}\kappa y^3 + 2 \cos(t)] \quad (2)$$

Wie in dieser Artikelreihe gezeigt wird, treten nun ganz neue Phänomene auf, wobei die mathematischen Anforderungen sprunghaft ansteigen. Die heutigen mathematischen Instrumente erlauben es, eine Vielzahl von Teilresultaten zu etablieren, aber sie sind noch nicht mächtig genug, um eine Differenzialgleichung, wie die (eigentlich harmlos anmutende ?!) Duffing-Gleichung (2), die vor nunmehr fast hundert Jahren das Licht der Welt erblickte, umfassend und abschliessend zu analysieren.

⁷Das bedeutet für die Duffing-Gleichung (32), 2A, dass der Schwinger nun nur mehr mit einer sehr kleinen Amplitude schwingt, also fast im Ruhezustand ist.

Hier endet der Streifzug in die Theorie der nichtlinearen Schwingungen, der seinen Ausgangspunkt hatte, als Martin Lieberherr's (damals) noch kleiner Sohn auf einem Spielplatz eine Art erster Flugerrfahrten machte.

Literatur

- [1] G. Duffing: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlichen Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, 1918.
- [2] U. Kirchgraber: *Schwingungen I oder wenn der Vater mit dem Sohn*, VSMP-Bulletin Nr. 128, Mai 2015, p. 24-30, *Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol*, VSMP-Bulletin Nr. 129, September 2015, p. 10-19, *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 1*, VSMP-Bulletin Nr. 130, Januar 2016, p. 24- 31.
- [3] M. Lieberherr: *Duffing-Oszillator*, VSMP-Bulletin Nr. 119, Juni 2012, p. 30-32.