

# Le coefficient binomial central et ses applications

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

Nous présentons quelques encadrements du coefficient binomial  $\binom{2n}{n}$ , établissons la formule de Wallis qui permet d'exprimer  $\pi$  par un produit infini, et démontrons le postulat de Bertrand qui garantit l'existence d'un nombre premier compris entre un entier positif donné et son double.

## 1 Un premier encadrement

Pour un entier  $n \geq 1$ , le  $n$ -ième coefficient binomial central est  $\binom{2n}{n}$ . On peut déjà remarquer que

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n}{n} \binom{2n-1}{n-1} = 2 \binom{2n-1}{n-1} = 2 \cdot \frac{2n-1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} \quad (*)$$

L'égalité (\*) entre les deux extrémités peut être expliquée par un argument de combinatoire. Si on veut répartir  $2n$  individus en deux groupes de même effectif ayant chacun un chef, on peut procéder de deux façons : former les groupes et choisir un chef dans chacun d'eux (il y a  $\binom{2n}{n} n^2$  possibilités) ou choisir deux chefs avant de leur attribuer leurs groupes (il y a  $2n(2n-1) \binom{2(n-1)}{n-1}$  possibilités). On en déduit que  $\binom{2n}{n} n^2 = 2n(2n-1) \binom{2(n-1)}{n-1}$ , donc  $\binom{2n}{n} = \frac{2(2n-1)}{n} \binom{2(n-1)}{n-1}$ .

**Minoration.** L'inégalité évidente  $(2n-1)^2 > 4n(n-1)$  implique  $2n-1 > 2\sqrt{n}\sqrt{n-1}$ . Avec la relation (\*), on obtient  $\binom{2n}{n} > \frac{4\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \binom{2(n-1)}{n-1}$  et pour  $n \geq 2$ , on a le produit télescopique

$$\binom{2n}{n} > \frac{4\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{4\sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1}} \cdots \frac{4\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \cdot \binom{2}{1} = \frac{4^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot 2 = \frac{4^n}{2\sqrt{n}}.$$

**Majoration.** L'inégalité évidente  $(2n-1)(2n+1) < 4n^2$  montre que  $(2n-1)^2 < \frac{4n^2(2n-1)}{(2n+1)}$ , donc  $2n-1 < \frac{2n\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}$ . Avec (\*), on obtient  $\binom{2n}{n} < \frac{4\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}} \binom{2(n-1)}{n-1}$  et, si  $n > 5$ , on a

$$\binom{2n}{n} < \frac{4\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{4\sqrt{2n-3}}{\sqrt{2n-1}} \cdots \frac{4\sqrt{11}}{\sqrt{13}} \cdot \binom{10}{5} = \frac{4^{n-5}}{\sqrt{2n+1}} \cdot 252\sqrt{11} = \frac{252\sqrt{11}}{1024} \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

Comme  $\frac{252\sqrt{11}}{1024} < \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3/2}}$ , on a alors  $\binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{3n+3/2}} < \frac{4^n}{\sqrt{3n}}$ , ce dernier majorant étant également valable pour  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Au final, on a démontré l'encadrement  $\frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{3n}}$  pour  $n \geq 2$ .

## 2 L'encadrement classique

Un meilleur encadrement de  $\binom{2n}{n}$  peut être établi grâce aux *intégrales de Wallis*

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx.$$

Lorsque  $n \geq 2$ , une intégration par parties donne

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n-1} \cos(x) dx = \underbrace{\left[ \sin(x)(\cos x)^{n-1} \right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n-1) \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n-2} (\sin x)^2 dx.$$

En remplaçant  $(\sin x)^2$  par  $1 - (\cos x)^2$  dans la dernière intégrale, on obtient

$$W_n = (n-1) \int_0^{\pi/2} ((\cos x)^{n-2} - (\cos x)^n) dx = (n-1)(W_{n-2} - W_n).$$

En ajoutant  $(n-1)W_n$  à chaque extrémité, on trouve  $nW_n = (n-1)W_{n-2}$ , donc  $W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}$ .

On peut réitérer cette relation de récurrence jusqu'à  $W_0 = \frac{\pi}{2}$  ou  $W_1 = 1$  selon la parité de l'indice :

$$\left. \begin{aligned} W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} (**)$$

En amplifiant chaque produit de fractions par  $2 \cdot 4 \cdots (2n) = 2^n n!$ , on trouve

$$W_{2n} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2) \cdots 1}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2 \cdot 4^n} \binom{2n}{n}$$

$$W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1) \cdots 1} = \left( \frac{4^n}{2n+1} \right) / \binom{2n}{n}.$$

Pour tout nombre  $x \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ , on a  $\cos(x) \in ]0; 1[$ , donc  $(\cos x)^{2n+1} < (\cos x)^{2n} < (\cos x)^{2n-1}$  et  $W_{2n+1} < W_{2n} < W_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} W_{2n+1}$ , ce qui se réécrit

$$\left( \frac{4^n}{2n+1} \right) / \binom{2n}{n} < \frac{\pi}{2 \cdot 4^n} \binom{2n}{n} < \left( \frac{4^n}{2n} \right) / \binom{2n}{n}.$$

En multipliant tout par  $\frac{2 \cdot 4^n}{\pi} \binom{2n}{n}$ , on obtient  $\frac{(4^n)^2}{(n+1/2)\pi} < \binom{2n}{n}^2 < \frac{(4^n)^2}{n\pi}$  et donc

$$\frac{4^n}{\sqrt{(n+1/2)\pi}} < \binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

Avec le théorème des gendarmes, cet encadrement démontre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ .

### 3 La formule de Wallis

Comme  $(\cos x)^{2n} > (\cos x)^{2n+1} > (\cos x)^{2n+2}$  lorsque  $x \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ , on a  $W_{2n} > W_{2n+1} > \overbrace{\frac{2n+1}{2n+2} W_{2n}}^{W_{2n+2}}$ . Par le théorème des gendarmes, il s'ensuit que  $W_{2n+1}/W_{2n}$  tend vers 1 lorsque  $n$  augmente. Avec les égalités (\*\*), ceci se traduit par la formule de John Wallis (1616 – 1703) :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right).$$

En regroupant les facteurs deux par deux puis en passant à l'inverse, on obtient les formulations équivalentes

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdots \frac{4n^2}{4n^2-1} \right) = \prod_{n \geq 1} \left( \frac{4n^2}{4n^2-1} \right)$$

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \frac{1}{(2n)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{4^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{6^2} \right) \cdots \left( 1 - \frac{1}{(2n)^2} \right) \right)$$

### 4 Un meilleur encadrement

On peut trouver sur un forum internet<sup>1</sup> un meilleur encadrement du coefficient binomial central :

$$\frac{4^n}{\sqrt{(n+1/3)\pi}} < \binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{(n+1/4)\pi}} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

**Preuve.** En remarquant que  $(2n-1)^2(4n+1) = 16n^3 - 12n^2 + 1 > 16n^3 - 12n^2 = 4n^2(4n-3)$  et que  $(2n-1)^2(3n+1) = 12n^3 - 8n^2 - n + 1 < 12n^3 - 8n^2 = 4n^2(3n-2)$  pour  $n \geq 2$ , on peut écrire

$$\frac{4(4n-3)}{4n+1} < \left( \frac{2n-1}{n} \right)^2 < \frac{4(3n-2)}{3n+1} \quad \text{donc} \quad \frac{2\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4n+1}} < \frac{2n-1}{n} < \frac{2\sqrt{3n-2}}{\sqrt{3n+1}}.$$

Avec la relation (\*) du premier paragraphe, on en déduit que

$$\frac{4\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4n+1}} \binom{2(n-1)}{n-1} < \binom{2n}{n} < \frac{4\sqrt{3n-2}}{\sqrt{3n+1}} \binom{2(n-1)}{n-1}.$$

En divisant chaque inéquation par  $4^n$  et en la multipliant par le dénominateur de la fraction, on obtient

$$\frac{\sqrt{4n-3}}{4^{n-1}} \binom{2(n-1)}{n-1} < \frac{\sqrt{4n+1}}{4^n} \binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3n+1}}{4^n} \binom{2n}{n} < \frac{\sqrt{3n-2}}{4^{n-1}} \binom{2(n-1)}{n-1}.$$

Il s'ensuit que les nombres  $a_n = \frac{\sqrt{n+1/4}}{4^n} \binom{2n}{n}$  forment une suite strictement croissante ( $a_{n-1} < a_n$ )

et que les nombres  $b_n = \frac{\sqrt{n+1/3}}{4^n} \binom{2n}{n}$  forment une suite strictement décroissante ( $b_n < b_{n-1}$ ).

Grâce à la limite établie à la fin du deuxième paragraphe, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1/4}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

et la suite  $(b_n)_{n \geq 1}$  a clairement la même limite.

1. <https://mathoverflow.net/questions/133732> (*Upper limit on the central binomial coefficient*)

Par croissance de  $(a_n)_{n \geq 1}$  et décroissance de  $(b_n)_{n \geq 1}$  vers leur limite commune, on peut écrire

$$\frac{\sqrt{n+1/4}}{4^n} \binom{2n}{n} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} < \frac{\sqrt{n+1/3}}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

En passant à l'inverse puis en multipliant par  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \binom{2n}{n}$ , on obtient le résultat annoncé.  $\square$

Par exemple, avec  $n = 100$ , on trouve (avec les logarithmes)  $9,0511 \cdot 10^{58} < \binom{200}{100} < 9,0549 \cdot 10^{58}$ .

## 5 Le postulat de Bertrand

Joseph Bertrand (1822 – 1900) a conjecturé que pour tout entier  $n \geq 2$ , il existe un nombre premier strictement compris entre  $n$  et  $2n$ . On doit la première preuve à Pafnouti Tchebychev (1821 – 1894) mais nous présentons celle de Paul Erdős (1913 – 1996) qui se base sur un encadrement de  $\binom{2n}{n}$ .

On considère un nombre entier  $n \geq 5$  et on note  $v_p$  la multiplicité d'un nombre premier  $p$  dans la factorisation de  $\binom{2n}{n}$  (par exemple, pour  $n = 6$ , on a  $\binom{12}{6} = 924 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ , donc  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = v_7 = v_{11} = 1$  et  $v_p = 0$  pour tout nombre premier  $p$  qui ne divise pas 924). On peut alors écrire

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \leq 2n} p^{v_p} = \left( \prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^{v_p} \right) \left( \prod_{\sqrt{2n} < p \leq 2n/3} p^{v_p} \right) \left( \prod_{2n/3 < p \leq n} p^{v_p} \right) \left( \prod_{n < p \leq 2n} p^{v_p} \right).$$

Fixons un nombre premier  $p < 2n$  et considérons l'entier  $r = \lfloor \log_p(2n) \rfloor$  tel que  $p^r \leq 2n < p^{r+1}$ . Le produit  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$  contient  $\lfloor n/p \rfloor$  multiples de  $p$ ,  $\lfloor n/p^2 \rfloor$  multiples de  $p^2$ ,  $\dots$ ,  $\lfloor n/p^r \rfloor$  multiples de  $p^r$ . Il ne contient aucune puissance supérieure de  $p$  car  $n/p^{r+1} < \frac{1}{2}$ . Il s'ensuit que la plus grande puissance de  $p$  qui le divise est  $v_p(n!) = \lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/p^2 \rfloor + \dots + \lfloor n/p^r \rfloor$ . Le même raisonnement montre que  $v_p((2n)!) = \lfloor 2n/p \rfloor + \lfloor 2n/p^2 \rfloor + \dots + \lfloor 2n/p^r \rfloor$ . On en déduit alors que

$$v_p = v_p((2n)!) - 2v_p(n!) = \sum_{k=1}^r \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \sum_{k=1}^r \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^r \left( \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right).$$

Comme  $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$  pour tout nombre  $x$  (il suffit de traiter les cas  $x \in [0; \frac{1}{2}[$  et  $x \in [\frac{1}{2}; 1[$  pour s'en convaincre), on a  $v_p \leq r$ , donc  $p^{v_p} \leq p^r \leq 2n$ .

En particulier, si  $p > \sqrt{2n}$ , alors  $\log_p(2n) < \log_p(p^2) = 2$  et donc  $v_p \leq r = \lfloor \log_p(2n) \rfloor \leq 1$ .

On peut encore remarquer que si  $\frac{2}{3}n \leq p \leq n$ , alors les inégalités  $p \leq n \leq \frac{3}{2}p < 2p \leq 2n < 3p$  montrent que la plus grande puissance de  $p$  qui divise  $(2n)!$  est  $p^2$  alors que  $n!$  est divisible par  $p$ . On a donc  $v_p = 0$  dans ce cas. Avec toutes ces considérations, on obtient

$$\binom{2n}{n} \leq \left( \prod_{p \leq \sqrt{2n}} (2n) \right) \left( \prod_{\sqrt{2n} < p \leq 2n/3} p \right) \left( \prod_{n < p \leq 2n} p \right).$$

Grossièrement, il y a au plus  $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor - 1$  nombres premiers inférieurs à  $\sqrt{2n}$ . Le premier produit est donc inférieur à  $(2n)^{\sqrt{2n}-1}$  et on peut écrire

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} \cdot \Pi(1; \lfloor 2n/3 \rfloor) \cdot \Pi(n; 2n)$$

où  $\Pi(x; y)$  désigne le produit des nombres premiers  $p$  tels que  $x < p \leq y$ .

### Un résultat intermédiaire

Pour pouvoir majorer  $\Pi(1; \lfloor 2n/3 \rfloor)$ , on montre par induction forte sur  $n \geq 2$  que  $\Pi(1; n) < 4^{n-1}$ . Cette assertion est vérifiée pour  $n \in \{2, 3\}$  et on suppose qu'elle le soit pour tout entier  $m < n$ .

- Si  $n$  est pair, alors  $n$  n'est pas premier donc  $\Pi(1; n) = \Pi(1; n-1) < 4^{n-2} < 4^{n-1}$ .
- Si  $n$  est impair, disons  $n = 2m + 1$ , alors  $\Pi(1; n) = \Pi(1; m+1)\Pi(m+1; 2m+1)$ , ce qui est majoré par  $4^m \Pi(m+1; 2m+1)$  par hypothèse d'induction. De plus,  $\Pi(m+1; 2m+1)$  divise  $\binom{2m+1}{m+1}$  car il divise  $(2m+1)!$  tout en étant premier avec  $m!(m+1)!$ . On a ainsi

$$\Pi(m+1; 2m+1) < \binom{2m+1}{m+1} < \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = \frac{(1+1)^{2m+1}}{2} = 2^{2m} = 4^m,$$

donc  $\Pi(1; n) < 4^{2m} = 4^{n-1}$ .  $\square$

### Retour à la preuve principale

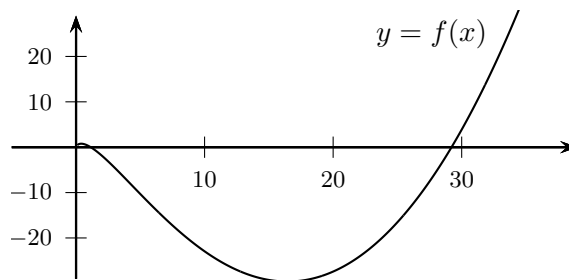
La majoration en bas de la page précédente peut encore être majorée avec le résultat ci-dessus :

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} \cdot 4^{2n/3} \cdot \Pi(n; 2n).$$

D'autre part, la minoration du premier paragraphe implique  $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2\sqrt{n}} > \frac{4^n}{2n}$  pour  $n \geq 2$ .

On a ainsi  $\frac{4^n}{2n} < \binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} 4^{2n/3} \Pi(n; 2n)$ , et donc  $\Pi(n; 2n) > \frac{4^{n-2n/3}}{(2n)^{\sqrt{2n}}} = \frac{2^{2n/3}}{(2n)^{\sqrt{2n}}}$ .

En posant  $x = \sqrt{2n}$ , le logarithme du membre de droite est  $f(x) = \frac{\ln(2)}{3}x^2 - 2x \ln(x)$ .



Si  $x \geq 9$ , on a  $\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \left[\frac{\ln(2)}{3}x - 2\ln(x)\right]' = \frac{\ln(2)}{3} - \frac{2}{x} > 0$ , donc l'expression  $\frac{f(x)}{x}$  définit une fonction strictement croissante. Pour  $x \geq 29.22$ , on a donc  $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(29.22)}{29.22} > 0$  et par conséquent  $f(x) > 0$  également. Il s'ensuit que  $\Pi(n; 2n) \geq e^{f(\sqrt{2n})} > e^0 = 1$  pour  $n \geq 427$ .

Il reste à vérifier le postulat de Bertrand pour  $n \in \{2, 3, \dots, 426\}$ . Pour cela, on considère la liste  $\{2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631\}$  dans laquelle chaque terme (sauf le premier) est le plus grand nombre premier inférieur au double du terme précédent. Tout entier  $n \in \{2, 3, \dots, 426\}$  est compris entre deux éléments successifs de cette liste, disons entre  $p_1$  et  $p_2$ , et on a  $p_1 \leq n < p_2 < 2p_1 \leq 2n$  donc  $p_2$ , qui est un nombre premier, est compris entre  $n$  et  $2n$ .  $\square$