Hans Ulrich Keller
ehem. MNG Zürich, hukkeller@bluewin.ch

Geometrische Wahrscheinlichkeit und Crofton's Theorem

1. Zusammenfassung

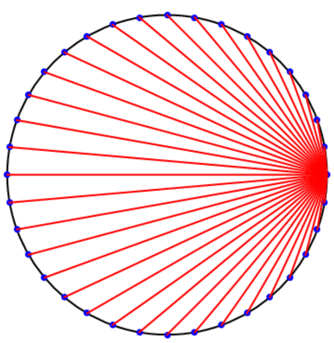
Der mittlere Abstand zweier zufälliger Punkte auf der Peripherie eines Kreises kann mit einem einfachen Integral berechnet werden. Hingegen ist es mindestens schwierig, den mittleren Abstand zweier zufälliger Punkte im Innern eines Kreises exakt zu berechnen. Hier hilft ein Konzept aus der geometrischen Wahrscheinlichkeitstheorie weiter: Das kaum bekannte Mittelwertstheorem von Morgan William Crofton (*1826, Dublin, Irland; † 1915, Brighton, England, irischer Mathematiker), der wesentliche Erkenntnisse zu dieser Theorie beigetragen hat.

Crofton's Theorem ist eine Verallgemeinerung des Theorems von Leibniz zur Ableitung eines Integrals. Es wird hier nur für den Spezialfall der Berechnung des mittleren Abstandes zweier zufälliger Punkte im Innern eines Kreises verwendet; seine Gültigkeit geht aber weit darüber hinaus.

2. Zwei zufällige Punkte auf der Peripherie eines Kreises

Wie gross ist der Mittelwert des Abstandes $\bar{d}$ von zwei zufällig auf der Peripherie des Einheitskreises ausgewählten Punkten?

Das lässt sich mit einer Simulation angenähert berechnen. Ausgehend von einem beliebigen ersten Punkt auf dem Kreis zeichnen wir Strecken zu anderen Punkten auf dem Kreis, die in immer gleichen Abständen angeordnet sind, wie dies in Fig. 1 links für einen ersten Punkt (1, 0) wiedergegeben ist. Als 'andere Punkte' wurden hier Punkte gewählt, die je einen Zentriwinkel von 10° zu ihren Nachbarn einschliessen.



Jetzt wird der Mittelwert all dieser Strecken berechnet, was hier einen Wert $\bar{d} \approx 1.27243$ ergibt. Hätten wir einen Zentriwinkel von 0.1° gewählt, hätte sich das folgende Resultat ergeben: $\bar{d} \approx 1.27323946$. Der exakte Wert hingegen ist $\bar{d} = \frac{4}{\pi} \approx 1.27323954$. Der Wert aus der genaueren Simulation stimmt mit dem exakten Wert in erstaunlichen sieben Stellen überein!

Fig. 1: Zur 1. Simulation.

3. Exakte Berechnung von $\bar{d}$ bei Punkten auf der Peripherie des Kreises

Dies ist mit einer einfachen Integration möglich:

Die Strecke d vom Punkt $A(1,0)$ zu einem beliebigen Punkt $P(\cos(\varphi),\sin(\varphi))$ auf dem Einheitskreis mit Mittelpunkt O(0, 0) ist gegeben durch

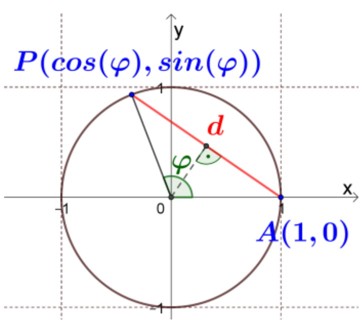


Fig.2: Zu Gl. 1.

$$d = d(\varphi) = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \text{ (Gl. 1)}$$

(s. Fig. 2). Die Integration über φ erstreckt sich von 0 bis 2π, und das Resultat muss – als Mittelwert – mit $\frac{1}{2\pi}$ normiert werden:

$$\boxed{\bar{d} = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{1}{2\pi}\cdot\left[-4\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{\pi}} \text{ (Gl. 2)}$$

4. Zwei zufällige Punkte im Innern eines Kreises

Wie gross ist der mittlere Abstand $\bar{d}$ zweier zufällig ausgewählter Punkte im Innern eines Kreis?
Dies lässt sich näherungsweise am einfachsten wiederum mit einer Simulation herausfinden. Wir wählen zwei Punkte *A* und *B*, beide mit Zufallskoordinaten für ihre *x*– und *y*–Werte zwischen –1 und 1. Beide Punkte müssen innerhalb des Kreises liegen, weshalb nur solche Punktepaare *A(u, v)* und *B(p, q)* berücksichtigt werden, für die sowohl $u^2 + v^2 \le 1$ als auch $p^2 + q^2 \le 1$ ist. In der nebenstehenden Figur 3 sind 40 solche Strecken eingezeichnet. Von diesen wird der Abstand

$$\overline{AB} = d = \sqrt{(u-p)^2 + (v-q)^2} \text{ (Gl. 3)}$$

aufsummiert; der mittlere Wert $\bar{d}$ ergibt sich dann als Quotient aus der Summe all dieser Abstände und der Anzahl der zulässigen Paare.

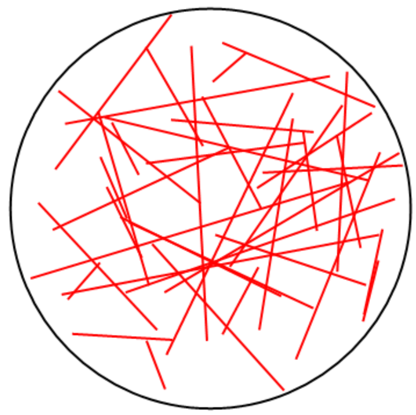


Fig. 3: Zufallsstrecken.

```
anz = 1000000; s = 0; ok = 0;
For[k = 1, k ≤ anz, k++,
 u = RandomReal[{-1, 1}];
 v = RandomReal[{-1, 1}];
 p = RandomReal[{-1, 1}];
 q = RandomReal[{-1, 1}];
 If[u^2 + v^2  <= 1 && p^2 + q^2 <= 1,
  d = Sqrt[(u - p)^2 + (v - q)^2];
  s = s + d;
  ok++;];];
Print[{ok, s / ok}]
{617440, 0.904802}
```

Fig. 4: Zur 2. Simulation.

Dieses Vorgehen wurde mit dem links in Fig. 4 wiedergegebenen Programm mit einer Million Punktepaare durchgeführt, von denen 617'440 zulässigen Paaren entsprachen. Die so ermittelte Länge des mittleren Abstands $\bar{d}$ ist etwa 0.9048.

Alternativ kann der Kreis auch mit einem genügend feinen kartesischen Gitternetz überzogen und der mittlere Wert der Abstände aller Gitternetzpunkte voneinander berechnet werden, was zu einer ähnlich guten Näherung führt. Diese Werte liegen um weniger als 0.1 % neben dem exakten Wert

$$\bar{d} = \frac{128}{45\pi} \approx 0.905415 \text{ (Gl. 4).}$$

5. Exakte Berechnung von $\overline{d}$ mit Punkten im Innern des Kreises

Wie aber wurde dieser **exakte** Wert $\overline{d}$ bestimmt? Dazu muss für den Einheitskreis das folgende Vierfachintegral gelöst werden:

$$\overline{d} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[x_1^2+y_1^2 \le 1 \wedge x_2^2+y_2^2 \le 1\right]\cdot\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\, dx_1\, dx_2\, dy_1\, dy_2 \text{ (Gl. 5)},$$

mit der Iverson–Konvention, dass $[\ldots]$ gleich 1 ist, wenn die Bedingung $\ldots$ wahr ist, und sonst 0.

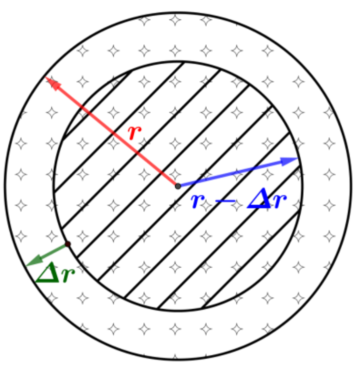
In Polarkoordinaten wird dies

$$\overline{d} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{1} r_1\cdot r_2\cdot\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1\cdot r_2\cdot\cos(\varphi_1-\varphi_2)}\, dr_1\, dr_2\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \text{ (Gl. 6)}$$

Beide diese Vierfachintegrale entziehen sich einer einfachen exakten Berechnung.

Hier hilft Crofton's Mittelwerttheorem weiter:

Dazu betrachten wir zwei konzentrische Kreise mit Radien r respektive $r-\Delta r$, entsprechend der Figur 5. Die zugehörigen Flächen werden hier mit $A_r = \pi\cdot r^2$, $A_{r-\Delta r} = \pi\cdot(r-\Delta r)^2$ und mit $\Delta A = A_r - A_{r-\Delta r} \approx 2\pi\cdot r\cdot\Delta r$ bezeichnet.



Mit $\overline{d} = E(d_r)$ wird nun der gesuchte Erwartungswert des Abstandes zweier Zufallspunkte im Innern eines Kreises mit Radius r bezeichnet, mit $E(d_{r-\Delta r})$ der entsprechende Erwartungswert im Innern eines Kreises mit Radius $r-\Delta r$, und mit $E(d_{\Delta r})$ der Erwartungswert des Abstandes von Punkten in ΔA zu Punkten in $A_{r-\Delta r}$.

Fig. 5: Bezeichnungen am Kreis.

Wir nehmen an, dass $0 < \Delta r << r$ ist, so dass beim Grenzübergang $\Delta r \to 0$ der Term Δr durch das Differential dr ersetzt werden kann, und dass höhere Potenzen von Δr vernachlässigt werden können. Unter Verwendung von bedingten Wahrscheinlichkeiten gilt dann angenähert:

$$\begin{aligned} E(d_r) &\approx E(d_{r-\Delta r})\cdot W(P_1 \text{ und } P_2 \in A_{r-\Delta r}) \\ &+E(d_{\Delta r})\cdot\left(W(P_1 \in A_{\Delta r} \text{ und } P_2 \in A_{r-\Delta r}) + W(P_2 \in A_{\Delta r} \text{ und } P_1 \in A_{r-\Delta r})\right) \end{aligned} \text{ (Gl. 7)}$$

Jetzt verwenden wir weiter, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt in einer Fläche A ist, proportional zu dieser Fläche A ist. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} E(d_r) &\approx E(d_{r-\Delta r})\cdot\left(\frac{A_{r-\Delta r}}{A_r}\right)^2 + E(d_{\Delta r})\cdot 2\cdot\left(\frac{A_{r-\Delta r}\cdot A_{\Delta r}}{A_r^2}\right) \\ &\approx E(d_{r-\Delta r})\cdot\left(\frac{\pi\cdot(r-\Delta r)^2}{\pi\cdot r^2}\right)^2 + E(d_{\Delta r})\cdot 2\cdot\left(\frac{\pi\cdot(r-\Delta r)^2\cdot 2\pi r\cdot\Delta r}{\pi^2\cdot r^4}\right) \end{aligned} \text{ (Gl. 8)}$$

Bei Vernachlässigung von höheren Potenzen von Δr vereinfacht sich der Term $\left(\frac{\pi(r-\Delta r)^2}{\pi\cdot r^2}\right)^2$ zu $1-\frac{4\cdot\Delta r}{r}$ (Gl. 9), und der Term $2\cdot\left(\frac{\pi\cdot(r-\Delta r)^2\cdot 2\pi r\cdot\Delta r}{\pi^2\cdot r^4}\right)$ wird zu $\frac{4\cdot\Delta r}{r}$ (Gl. 10). Mit all diesen Vereinfachungen, und nach Subtraktion von $E(d_{r-\Delta r})$ auf beiden Seiten, ergibt sich

$$E(d_r)-E(d_{r-\Delta r})=-E(d_{r-\Delta r})\cdot\frac{4\cdot\Delta r}{r}+E(d_{\Delta r})\cdot\frac{4\cdot\Delta r}{r} \text{ (Gl. 11)}$$

Nach der Division durch Δr und dem Übergang zum Grenzwert $\Delta r\to 0$, und unter Berücksichtigung, dass im Grenzfall $E(d_r)\approx E(d_{r-\Delta r})$ wird, ergibt sich

$$\frac{dE(d_r)}{dr}+\frac{4}{r}E(d_r)=\frac{4}{r}\cdot E(d_{\Delta r}) \text{ (Gl. 12)}$$

Hier fehlt noch die Berechnung von $E(d_{\Delta r})$. Dafür gilt (s. Fig. 6):

$$E(d_{\Delta r})=\frac{2}{\pi\cdot r^2}\int_0^{\pi}\int_0^{r}\sqrt{r^2+x^2-2\cdot r\cdot x\cdot\cos(\vartheta)}\cdot x\,dx\,d\vartheta \text{ (Gl. 13)}$$

Es ist einfacher, dieses Doppelintegral in Polarkoordinaten mit dem Ursprung in $(r,0)$ zu berechnen (s. nochmals Fig. 6):

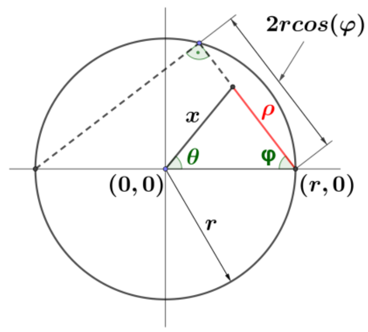


Fig. 6: Zu Gl. 13 und 14.

$$E(d_{\Delta r})=\frac{2}{\pi\cdot r^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2r\cos(\varphi)}\rho^2\,d\rho\,d\varphi=\frac{32r}{9\pi} \text{ (Gl. 14)}$$

Setzt man dieses Resultat in Gl. 12 ein, ergibt sich:

$$\frac{dE(d_r)}{dr}+\frac{4}{r}E(d_r)=\frac{128}{9\pi} \text{ (Gl. 15)}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung für den gesuchten Wert von $E(d_r)$. Statt eines mühsamen Vierfachintegrals erhalten wir eine einfache Differentialgleichung!

Berücksichtigen wir weiter, dass $E(d_{r=0})=0$ ist, erhalten wir sofort

$$\boxed{E(d_r)=\frac{128\,r}{45\pi}\approx 0.905415\,r \text{ (Gl. 16)}}$$

6. Ausblick

Die hier vorgestellten Ideen zur geometrischen Wahrscheinlichkeit lassen sich auf *n*–dimensionale Räume übertragen. So kann z. B. der Erwartungswert des Abstandes von einem Pol einer gewöhnlichen Kugel mit Radius r zu zufälligen Punkten im Innern dieser Kugel zu $E(\bar{d}_{\Delta r})=\frac{6}{5}r$ berechnet werden, womit sich – unter Verwendung des Theorems von Crofton – der Erwartungswert einer Zufallsstrecke in einer Kugel zu $E(\bar{d}_r)=\frac{36}{35}\cdot r\approx 1.0\overline{285714}\,r$ ergibt. Die Erwartungswerte $E(\bar{d}_r)$ in Hyperkugeln (mit n > 3) sind ebenfalls alle bekannt. Weiter lässt sich die Theorie bei beliebigen konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ anwenden.

7. Literatur

- Eine ausführliche Darstellung dieses Problems und seiner Lösung findet sich, für beliebige konvexe Teilmengen des n–dimensionalen Euklidischen Raums, unter dem Titel 'The average distance between two points' von Bernhard Burgstaller und Friedrich Pillichshammer in Bull. Aust. Math. Soc. 80 (2009), 353–359 doi:10.1017/S0004972709000707; eing. 19. Mai 2008.
- Ein Beweis für das spezielle Resultat beim Kreis ist bei S. R. Dunbar, 'The average distance between points in geometric figures', College Math. J. 28 (1997), 187–197, wiedergegeben.
- Herbert Solomon 'Geometric Probability', (CBMS–NSF Regional Conference in Applied Mathematics, vol. 28), Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1978. Das Buch dazu: 'Geometric Probability'; SIAM, 1978; ISBN 0898710251, 9780898710250.
- H.U. Keller 'Wie lang ist eine Zufallsstrecke?'; Didaktik der Mathematik, 16 (1988) 1, S. 19-31.