Franz Meier
Sekretär VSMP, franz.e.meier@bluewin.ch

Thesen zur Reform des Mathematikunterrichts an den Mittelschulen

Ein Beitrag von Bartel Leendert van der Waerden (1903 – 1996) im VSMP-Bulletin N° 1, Januar 1966

B.L. van der Waerden

B.L. Van der Waerden trat 1951 die Nachfolge von Rudolf Fueter als Professor für Mathematik und als Direktor des Mathematischen Instituts an der Universität Zürich an. Dieser Hochschule blieb er auch nach seiner Pensionierung treu. Van der Waerden gilt als einer der führenden Mathematiker des 20. Jahrhunderts. Bekanntheit erlangte er mit seinem Buch «Moderne Algebra», das 1930 erschien. In lehrbuchartiger Form präsentiert er den damals «modern» werdenden Aufbau der Algebra unter strukturtheoretischen Gesichtspunkten. Inzwischen hat sich diese strukturelle Auffassung der Algebra auf die gesamte Mathematik ausgedehnt. In den neuesten Auflagen wurde demzufolge das Wort «modern» aus dem Titel weggelassen. Mehrere Generationen von Mathematikern und Physikern haben aus diesem Buch die Algebra kennen gelernt. Als Generalist war van der Waerden einer der wenigen Mathematiker, die noch die gesamte Mathematik überblicken konnten. Er erreichte bedeutende Fortschritte auch in der algebraischen Geometrie, Gruppentheorie, Zahlentheorie, Topologie, axiomatischen Geometrie, Kombinatorik, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Ein Verzeichnis seiner Veröffentlichungen publizierte sein Schüler und späterer Kollege Herbert Gross in den «Elementen der Mathematik» (Band 28, 1973, 26 – 32).

Als Studienanfänger besuchte ich 1968 die gut besuchte und beliebte Vorlesung zur Geschichte der Mathematik, einem Thema, das van der Waerden bis ins hohe Alter beschäftigte. Seine Ausführungen zur Mathematik der Babylonier, Ägypter und Griechen faszinierten die Vorlesungsbesucher, insbesondere seine kreativen, individuellen Ansätze in der Darstellung der Materie.

Auf den schweizerischen Schulunterricht übte van der Waerden durch seine regelmässig gehaltene und beliebte Vorlesung «Mathematik für Naturwissenschafter» einen unschätzbar grossen Einfluss aus, war doch diese Vorlesung nicht nur für Naturwissenschafter, sondern auch für angehende Sekundarlehrer aus verschiedenen Kantonen Pflichtfach.

Wie sah der Mathematikunterricht in den 60er-Jahren aus?

Von 1960 bis 1967 war ich Schüler an der Realschule in Luzern und erwarb das Maturitätszeugnis Typus C. In der 3-jährigen Unterrealschule hatten wir 20 Lektionen Mathematik und in den 4 Jahren Oberrealschule 29 Lektionen. Zum Vergleich füge ich an, dass im 8-jährigen Gymnasium die Unterstufe lediglich 11 Lektionen Mathematik anbot, die 5-jährige Oberstufe 20 bis 24 Lektionen Mathematik in Abhängigkeit von den gewählten Freifächern.

Ein Blick in die damaligen kantonalen Lehrpläne für die Realschule , welche ich aus dem Archiv der Schule erhalten habe, zeigen die Vielfalt und die Bedeutung der mathematischen Ausbildung in dieser Zeit:

- Analytische Geometrie im Raum und die Integralrechnung waren Pflichtthemen.
- Komplexe Zahlen waren Teil der Algebra. Es lag in der Freiheit des Lehrers, auch eine Einführung in die Gruppentheorie zu geben.
- Zinseszins- und Rentenrechnungen wurden gefordert. Empfohlen war auch die Behandlung der Rechnungen mit Wertpapieren (Obligationen und Aktien), Diskonto- und Kontokorrentrechnungen.
- In den Lehrplänen von Luzern wurde der Geometrie besonderes Gewicht zugeteilt: 12 Stunden Algebra/Analysis, 12 Stunden Geometrie und 5 Stunden Darstellende Geometrie. In den Jahreszeugnissen wurden einzelne Noten für alle 3 Mathematikgebiete ausgewiesen. Für die jährliche Promotionen zählten bis zu 13 Noten. Die Mathematik hatte demzufolge ein grosses Gewicht.
- Speziell erwähnt wird weiter die Behandlung der formalen Logik und der verschiedenen Beweismethoden.
- In den allgemeinen Bildungszielen wird auch formuliert «Weckung des Verständnisses für den philosophischen Gehalt der Mathematik».

Die Thesen zur Reform des Mathematikunterrichts

Die nachfolgend abgedruckten Thesen mögen uns heute doch etwas speziell erscheinen, vielleicht auch Kopfschütteln erzeugen. Sie zeigen jedoch das Engagement von van der Waerden um die Vermittlung eines kompetenten Mathematikunterrichts an den Mittelschulen.

Was meinen Sie zu den Thesen?

Gerne erwarten wir Ihre Überlegungen bis Mitte März an info@vsmp.ch. Eine Veröffentlichung im Bulletin respektive auf der VSMP-Website wäre sicherlich für alle VSMP-Mitglieder von Interesse – wer weiss auch im Zusammenhang mit den neuesten Entwicklungen im WEGM-Projekt.

Thesen zur Reform des Mathematikunterrichts an den Mittelschulen

Von B. L. van der Waerden,

Allgemein

1. Die wichtigsten Ziele des Mathematikunterrichtes sind:
   A. Einführung in die Methode des wissenschaftlichen Denkens, Schulung des Denkens, Erweiterung des geistigen Horizontes.

   B. Vorbereitung auf den Physikunterricht.

   C. Vorbereitung der künftigen Ingenieure, Naturwissenschafter, Mediziner und Oekonomen auf den Hochschulunterricht.

   D. Vorbereitung der künftigen Mathematiker auf den Hochschulunterricht.

2. Bei der Auswahl des Stoffes braucht man auf das letzte Ziel D nicht zu achten. Die künftigen Mathematiker brauchen in der Schule nur das zu lernen, was auch die Ingenieure und Naturwissenschafter lernen müssen. Alles übrige ist Sache der Hochschule. Also schalten wir von jetzt an die Mathematiker von der Betrachtung aus und denken ausschliesslich an die Nichtmathematiker.

3. Um Ziel A möglichst gut zu erreichen, muss das selbständige Denken des Schülers möglichst gefördert und der Lernstoff möglichst beschränkt werden.

4. Die Schüler müssen entlastet werden. Sie lernen stofflich mehr als zur Erreichung der Ziele B und C nötig ist, zumindest an der Kantonsschule Zürich und an der Töchterschule der Stadt Zürich. Alles was nicht unbedingt nötig ist, sollte ausgeschieden werden.

Analytische Geometrie

5. Die analytische Geometrie sollte, wenn sie überhaupt in der Schule behandelt wird, auf gerade Linien und Kreise und die Grundgleichungen der drei Typen von Kegelschnitten beschränkt werden. Tangentenberechnung, Polaren etc. sind für Nichtmathematiker unnötig.

Differential- und Integralrechnung

6. Die Differentialrechnung ist für die Vorbereitung auf die Physik wichtig: differenzieren sollte jeder lernen. Integralrechnung sollte man in der Schule nicht behandeln. Die Begriffe bestimmtes und unbestimmtes Integral sind für die meisten Schüler zu schwer, und integrieren lernt man nachher in der Hochschule.

7. Berechnung von Wendepunkten ist unnötig und sollte folglich abgeschafft werden. Die zweite Ableitung y'' braucht man überhaupt nicht. Bei der Berechnung von Maxima und Minima kommt man mit der ersten Ableitung vollständig aus. Ist sie in einem Intervall positiv, so ist die Tangente nach oben gerichtet und die Funktion nimmt zu; ist sie negativ, so nimmt die Funktion ab.

Algebra

8. Der Algebraunterricht hat als Schulung des Denkens weniger Wert als etwa Geometrie und Physik. Also sollte der Algebraunterricht beschränkt werden auf das, was die Ingenieure und Naturwissenschafter nachher unbedingt brauchen.

Zinseszins

9. Zinseszinsrechnung sollte abgeschafft werden.

Geometrie

10. Die Grundbegriffe der Geometrie sind für die gesamte Naturwissenschaft grundlegend und auch philosophisch höchst interessant. Dazu sind sie anschaulich. Man sollte also bei der Stoffwahl die Geometrie bevorzugen.

10a. Insbesondere sollte die Raumgeometrie ausführlich behandelt werden. Die Schüler sollen lernen, gute Skizzen von räumlichen Gegenständen zu machen. Dafür könnte die traditionelle Darstellende Geometrie stark reduziert oder gänzlich abgeschafft werden.

11. Die Geometrie eignet sich besonders gut zur Einführung in die Methode des wissenschaftlichen Denkens, weil der Schüler hier durch eigenes Denken Lösungen von Aufgaben finden kann. Das Finden von Konstruktionen, oder das Finden der einfachsten Konstruktion (mit möglichst wenigen Kreisen und Geraden) kann als Wettbewerb in der Klasse betrieben werden.

12. Der axiomatische Aufbau der Geometrie ist als Musterbeispiel für den logischen Aufbau einer Wissenschaft von grossem erzieherischen Wert. Der axiomatische Aufbau hat sich seit Euklid auch didaktisch gut bewährt; er sollte im Prinzip beibehalten werden.

13. Man soll aber die Axiomatisierung nicht auf die Spitze treiben. Man soll nicht versuchen, ein vollständiges Axiomsystem im Sinne Hilberts aufzustellen und alle Lehrsätze rein logisch aus den Axiomen herzuleiten. Im Gegenteil: man soll die Anschauung viel stärker heranziehen als es im traditionellen Aufbau geschieht. Man soll Drehungen, Parallelverschiebungen, Spiegelungen und offenkundige Symmetrien von Figuren heranziehen, wann immer dadurch Beweise vereinfacht werden können. Was den Schülern als selbstverständlich vorkommt, z. B. dass eine Seite eines Dreiecks kürzer ist als die Summe der beiden anderen, braucht nicht bewiesen zu werden.

14. Auswendig gelernte Formeln tragen gar nichts zur Schulung des Denkens bei, daher sollte man möglichst wenige Formeln auswendig lernen.

15. Bei der Entscheidung, welche Formeln der Schüler lernen sollte und welche nicht, gibt es ein sehr einfaches objektives Kriterium. Man frage jedesmal: Ist es für den künftigen Ingenieur oder Physiker notwendig, dass er diese Formel kennt? In den meisten Fällen führt dieses Kriterium zu einer klaren Entscheidung. Zum Beispiel: Die Formel für den Flächeninhalt des Kreises muss jeder kennen. Im Fall des Kreissektors genügt es, dem Schüler die Einsicht beizubringen, dass dessen Fläche sich zur ganzen Kreisfläche verhält wie der Mittelpunktswinkel zum Vollwinkel von 360°. Er lernt also in diesem Fall nur das Prinzip, nicht die fertige Formel. Den Ausdruck für den Flächeninhalt des Kreissegmentes braucht er voraussichtlich nie; wenn er ihn doch einmal braucht, schaut er in einer Formelsammlung nach. Aehnlich in allen anderen Fällen.

Trigonometrie

16. In der Trigonometrie sollte man sich auf das Notwendigste beschränken. Definitionen der trigonometrischen Funktionen, Berechnung von rechtwinkligen Dreiecken, Additionstheoreme und Cosinusregeln sollten eigentlich genügen. Aufgaben über schiefwinklige Dreiecke wird der Schüler dadurch lösen, dass er sie in rechtwinklige zerlegt. Die Methode soll er lernen, nicht die fertigen Formeln.

Neue Lerngegenstände

17. Die Ideen der "school mathematics study group" in USA sind didaktisch schlecht begründet und haben sich in der Praxis schlecht bewährt. Hervorragende Didaktiker wie Polya haben sich scharf dagegen ausgesprochen **).

18. Die Einführung von Begriffen aus der modernen Algebra, wie Mengen und Gruppen, ist nicht zu empfehlen, weil diese Begriffe nur für Mathematiker und theoretische Physiker wichtig sind. In das exakt wissenschaftliche Denken soll der Schüler eingeführt werden, nicht speziell in das mathematische Denken. Mengen und Gruppen sind etwas spezifisch Mathematisches.

19. Die Ideen von Dieudonné und Papy sind sehr beachtenswert. Insbesondere sollte der Vektorbegriff, der in der Physik eine grundlegend wichtige Rolle spielt, auf einer möglichst frühen Stufe eingeführt werden. In Neuchâtel scheint man damit gute Erfahrungen gemacht zu haben.

20. Behandlung der Elemente der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung wäre mit Rücksicht auf die Anwendungen sehr erwünscht, stösst aber auf grosse didaktische Schwierigkeiten. In Holland hat man in einigen Klassen ein sorgfältig vorbereitetes Experiment durchgeführt. Auf Grund der Ergebnisse dieses Experimentes hat man dann aber beschlossen, die Statistik nicht als Schulfach einzuführen.