

Tobias Heuschkel

Gymnase de la Cité, Lausanne, tobias.heuschkel@bluewin.ch

# La table de tenségrité

## Introduction

« Des îlots au milieu d'un océan de tension » voici comment Richard Buckminster Fuller a défini le principe de tenségrité [1]. Cet architecte et inventeur anglais peut être considéré comme le père de ce principe physique qu'il a nommé « tenségrité » (tension + intégrité). Un sculpteur du nom de Kenneth Snelson est également associé au développement de la tenségrité. En effet, il est le créateur de plusieurs œuvres d'art utilisant ce principe comme la *Needle Tower* (Fig. 1) ainsi que la *Needle Tower II* (tour aiguille en français) qui sont deux tours de respectivement 18 et 30 mètres de haut. Il ajoutera à la définition de son compère américain que les îlots de compressions ne doivent être en contact uniquement par le biais de fil en tension [2].

La tenségrité est utilisée en art comme l'a fait K. Snelson, mais également dans la création d'édifices architecturaux comme le *Kurilpa Bridge* qui est un pont piéton situé en Australie. En tant qu'êtres humains composés d'os en compression au milieu d'un océan de muscles, tendons et fascias en tension, nous appliquerions donc même le principe de tenségrité sans même le savoir. Le sujet de cet article n'étant pas basé sur cet aspect biologique de la tenségrité, il n'est pas approfondi ci-après.

Dans le cas étudié, le principe de tenségrité s'applique à un modèle appelé *table de tenségrité* (Fig.2). Aussi appelée *table impossible*, cette structure est composée de deux parties liées entre elles uniquement par trois câbles en tension. Une de ces parties est statique tandis que l'autre est en suspension. Le statif est composé d'un plateau ainsi que d'une pièce ayant la forme d'un L retourné. La partie suspendue a une composition similaire au statif et semble être maintenue par le dessous par les câbles. En temps normal, tout corps suspendu à un câble serait tenu par le dessus, c'est pourquoi cette structure donne l'impression de léviter. En réalité, ce qui se cache derrière cet aspect surnaturel aux premiers abords, est, comme son nom l'indique, le principe physique de tenségrité.

L'étude développée dans ce travail va être basée sur les forces en tension qui maintiennent un modèle de table de tenségrité en position d'équilibre. En effet, le but est de déterminer par une approche théorique les forces de tension en posant la troisième loi de Newton. Il va être ensuite question de construire un modèle de table de tenségrité afin de déterminer les forces appliquées à la structure par une approche pratique ; tout cela dans le but de comparer les résultats obtenus par les deux différentes approches ainsi que de vérifier la troisième loi de Newton qui s'applique dans ce modèle mécanique.

Le modèle étudié a tout d'abord été construit en petit format à l'aide de pièces LEGO™ afin d'en comprendre le fonctionnement. Une fois les contraintes nécessaires à l'obtention d'une situation d'équilibre comprises, un modèle en bois d'une taille plus conséquente a été construit afin de faciliter la mesure des forces de tensions appliquées sur les câbles (Fig. 2).

## Théorie

Les schémas des figures 3 et 4 permettent une meilleure description du modèle réalisé dans ce travail. Ces dessins ont été à la base de la construction de la structure.

La figure 5 montre les forces et leurs moments respectifs qui s'appliquent sur la table de tenségrité réalisée. Un système d'axes (vert clair) est posé arbitrairement afin de connaître la position des points d'applications des différentes forces. Les coordonnées du centre de masse de la partie en suspension de la table de tenségrité sont calculées suivant la formule suivante :

$$OG = \frac{\sum_i m_i \cdot OP_i}{\sum_i m_i} \quad (1)$$

où  $OG$  correspondent aux coordonnées du centre de masse  $G$ ,  $OP_i$  aux coordonnées des centres de masses des pièces du modèle et  $m_i$  aux masses des différentes pièces de la partie suspendue du modèle.

Les masses  $m_i$  sont déterminées de manière pratique ainsi que théoriquement à l'aide de la masse volumique du matériau utilisé (bois de sapin) et des volumes des pièces composant le modèle. La visserie est également considérée dans les calculs. La masse totale du système mesurée diffère de 3 grammes par rapport à la masse estimée théoriquement. Cette faible différence provient de l'inhomogénéité de la densité du bois de construction utilisé pour le modèle.

A l'aide du système d'axes, on peut déterminer les coordonnées des points d'applications  $P_\alpha$  des forces intérieures au modèle  $F_\alpha^{int.}$ . Un centre de rotation  $O'$  est placé arbitrairement dans le but de calculer les moments des forces appliquées au modèle.

La troisième loi de la mécanique énoncée par Newton, est définie comme suit : « *A tout instant, et quel que soit le mouvement du système, le torseur des forces intérieures est équivalent à zéro* » [3].

$$\sum_{\alpha} F_{\alpha}^{int.} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha} O'P_{\alpha} \wedge F_{\alpha}^{int.} = 0 \quad (2)$$

Dans le cas étudié, les forces intérieures au modèle  $F_{\alpha}^{int.}$  correspondent aux forces de tension induites par la force de pesanteur de la partie en suspension. De manière générale, la force de pesanteur est définie suivant la relation suivante :

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \quad (3)$$

où  $F_g$  correspond à la force de pesanteur,  $m$  à la masse d'un corps (dans le cas étudié la masse du corps est annotée  $m_{tot}$ ) à la surface de la Terre et  $g$  à l'accélération gravitationnelle ( $g \approx 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ).

Afin de simplifier les calculs qui suivent, les distances  $O'P_{m_{tot}g}(x)$  et  $O'P_{F_3}(x)$  seront annotées respectivement  $d_1$  et  $d_2$ .

En appliquant les relations énoncées ci-dessus au modèle étudié, on peut poser le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{int.} = F_3 - F_1 - F_2 - m_{tot}g = 0 \\ \sum_{\alpha} O'P_{\alpha} \wedge F_{\alpha}^{int.} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(d_2 \cdot F_3) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -(d_1 \cdot (-m_{tot}g)) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O'P_{F_2}(y) \cdot (-F_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O'P_{F_1}(y) \cdot (-F_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ F_1 = F_2 \\ O'P_{F_1}(y) = -O'P_{F_2}(y) \end{array} \right. \quad (4)$$

Dans le modèle de tenségrité, les forces  $F_1$  et  $F_2$  sont de mêmes intensités, de mêmes directions et de même sens. Leurs points d'applications sont équidistants par rapport à l'axe des abscisses.

En isolant les forces du système d'équation décrit plus haut, on obtient les relations suivantes :

$$F_3 = \frac{m_{tot} \cdot g \cdot d_1}{d_2} \quad (5)$$

$$F_1 = F_2 = \frac{\left(\frac{m_{tot} \cdot g \cdot d_1}{d_2} - m_{tot} \cdot g\right)}{2} \quad (6)$$

## Matériel et méthodes

Afin de déterminer par la pratique les forces de tension appliquées au modèle, la méthode de mesure a été amenée à évoluer.

La première méthode consiste à déterminer l'intensité de la force  $\vec{F}_3$  en mesurant l'allongement d'un ressort dont la raideur a été approximée au préalable. Les intensités des forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  ont été mesurées à l'aide de dynamomètres à ressort (dynamomètres Frederiksen 5 N / 0,1 N) (Fig.6). Cette méthode s'est avérée infructueuse en raison de l'allongement des ressorts. En effet, pour que le modèle conserve sa situation d'équilibre il faut que les forces restent constantes dans le temps. L'utilisation des ressorts ne répondant pas à cette contrainte, cette méthode a été abandonnée.

Afin de remédier à ce problème, le ressort a été remplacé par un dynamomètre électronique (balance portative Weiheng 25kg / 5g) de précision  $\pm 2.5g$  et les dynamomètres à ressort ont été remplacés par un système de poulies auxquelles sont suspendues des masses connues (Fig.7). L'utilisation du système de poulies s'est révélée toujours trop approximative en raison d'un mauvais transfert de force.

En revanche, le dynamomètre électronique seul s'est avéré être la meilleure méthode de mesure malgré les imprécisions de ces appareils. L'obtention de deux nouveaux dynamomètres électroniques (balance portative Weiheng - balance suspendue portable 25kg / 5g) a permis de mesurer les forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  avec une meilleure précision que les autres appareils de mesures essayés précédemment. Les dynamomètres électroniques ont donc été choisis comme appareils de mesure pour le montage final. Afin d'assurer une constance dans les forces, le modèle est fixé à une table ainsi que les câbles en tensions (Fig.8).

## Résultats

Les résultats des forces de tension énoncés dans les tableaux 1 et 2 correspondent à des moyennes (N=4) dans les mêmes conditions. Les calculs théoriques et pratiques des sommes des forces et des sommes des moments ont été réalisés avec les valeurs non arrondies.

	Théorique	Pratique
$F_1$ [N]	$2.119 \pm 0.766$	$1.888 \pm 0.025$
$F_2$ [N]	$2.119 \pm 0.766$	$1.913 \pm 0.025$
$F_3$ [N]	$12.702 \pm 0.720$	$13.109 \pm 0.025$
$m_{tot}g$ [N]	$8.463 \pm 0.046$	$8.495 \pm 0.010$
$\Sigma$ des forces [N]	$0.000 \pm 2.298$	$0.813 \pm 0.085$

Tableau 1

	Théorique	Pratique
$d_1$ [m]	$0.227 \pm 0.009$	$0.227 \pm 0.009$
$m_{tot}g$ [N]	$8.463 \pm 0.046$	$8.495 \pm 0.010$
$d_2$ [m]	$0.151 \pm 0.002$	$0.151 \pm 0.002$
$F_3$ [N]	$12.702 \pm 0.720$	$13.109 \pm 0.025$
$\Sigma$ des moments [Nm]	$0.006 \pm 0.777$	$0.054 \pm 0.046$

Tableau 2

## Discussion des résultats

On peut observer que les sommes des forces obtenues de manière théorique correspondent bien à la troisième loi de Newton énoncée plus haut (éq.2). En revanche dans les cas pratiques, la somme des forces intérieures n'est pas précisément zéro. Cela peut être la conséquence de différentes imprécisions et incertitudes parmi lesquelles certaines sont quantifiables tandis que d'autres le sont difficilement.

Les dynamomètres électroniques utilisées sont précis à 0.025 N près ce qui implique cette incertitude systématique dans les prises de mesures des forces de tensions. La balance utilisée pour peser la masse totale du système suspendu a quant à elle une précision au gramme près ce qui génère une incertitude de 0.01 N.

En prenant en compte ces incertitudes quantifiables, les sommes des forces pourraient être plus proche de zéro. Mais il existe encore des imprécisions qui sont difficilement quantifiables. La théorie admet l'isotropie du matériau utilisé ce qui n'est pas toujours le cas en pratique. En effet, le bois de sapin utilisé ne possède pas forcément une densité équivalente en tous points. Il est possible que les fils utilisés possèdent un certain allongement lorsqu'il est soumis à une contrainte de tension ce qui aurait pour conséquence une légère variation des forces. Le modèle construit possède quelques petits défauts de construction qui peuvent également être une source d'imprécisions. La masse totale du système ne serait pas assez importante pour que les imprécisions aient un impact plus faible. Finalement, la prise des mesures n'est pas facilitée par la complexité de placer le modèle dans une position d'équilibre.

## Conclusion

Pour conclure, un modèle de table de tenségrité a été construit afin d'en mesurer les forces de tensions approximées en premier lieu par une approche théorique en posant la troisième loi de Newton (somme du torseur de forces équivalente à zéro). Les résultats obtenus se rapprochent de cet énoncé général mais en raison de diverses imprécisions et incertitudes, ils ne correspondent pas parfaitement.

## Bibliographie

- [1] <https://civilsguide.com/tensegrity-structure/>
- [2] [https://atelieremploi.fr/wiki/Needle\\_Tower](https://atelieremploi.fr/wiki/Needle_Tower)
- [3] « Mécanique générale, Christian Gruber, 1988, Presses polytechniques romandes »

## Figures



Fig. 1 : *Needle Tower* de Kenneth Snelson  
 [Réf : <https://www.flickr.com/photos/peterhutchins/40583376422/>]



Fig. 2 : Exemple de table de tensegrité  
 comme discutée dans cet article

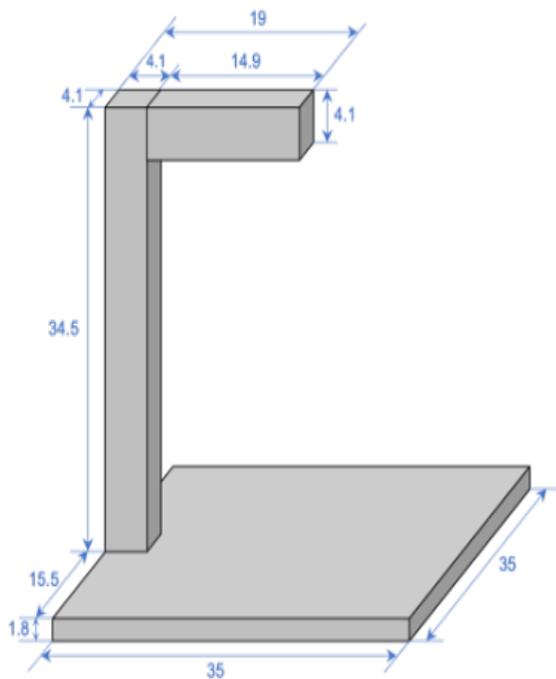


Fig. 3 : Schéma avec les côtes de la partie non suspendue du modèle

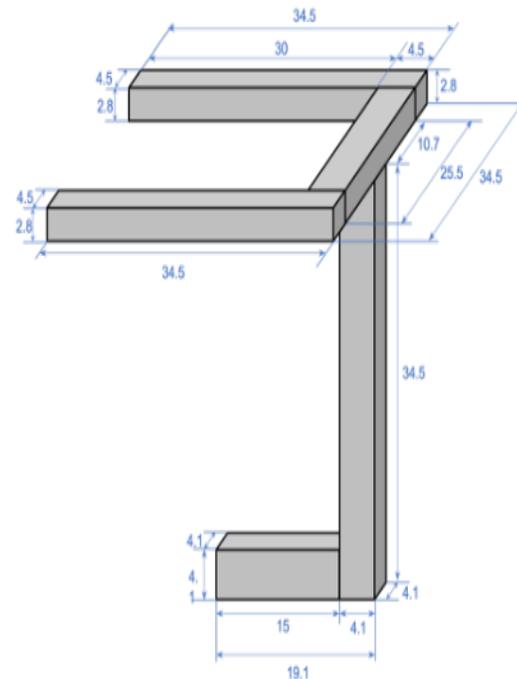


Fig. 4 : Schéma avec les côtes de la partie suspendue du modèle

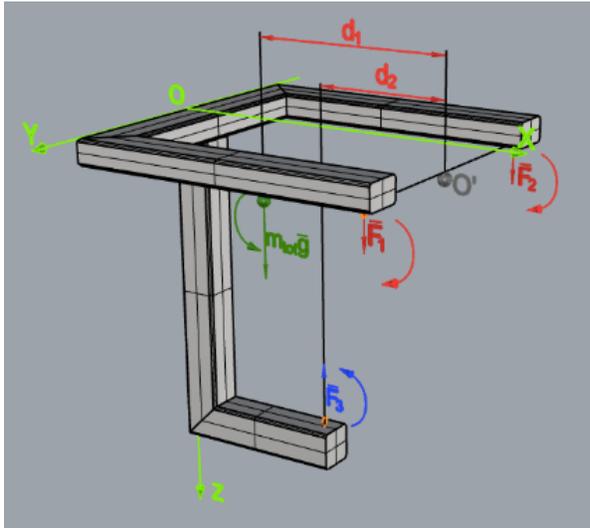


Fig. 5 : Schéma représentant les forces ainsi que leur moments

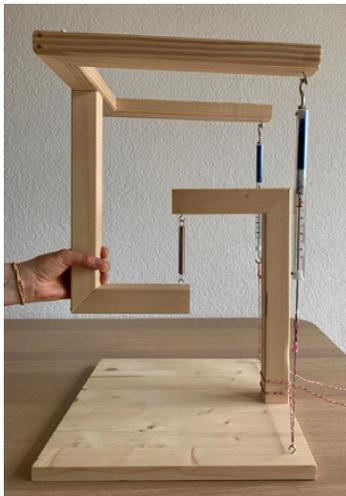


Fig.6 : Montage avec deux dynamomètres à ressort et un ressort

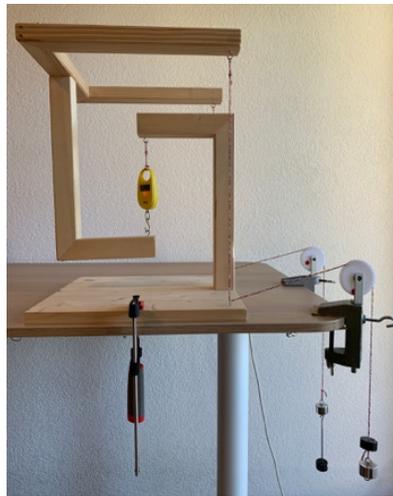


Fig.7 : Montage avec un dynamomètre électronique et un système de poulie



Fig.8 : Montage final utilisé lors de la prise de mesures