

Beat Jaggi
PH Bern, beat.jaggi@phbern.ch

Dynamische Abwicklung von Würfeln und Tesserakten

1 Einleitung

In der Mitte des 19. Jahrhunderts hat der Schweizer Mathematiker Ludwig Schläfli (1814-1895) das Tor zur höherdimensionalen Geometrie aufgestossen. In seinem in den Jahren 1850 bis 1852 entstandenen, aber erst 1901 in seiner Gesamtheit erschienenen Werk *Theorie der vielfachen Kontinuität* steht der Beweis, dass es im 4-dimensionalen Raum sechs reguläre Körper (Polytope) gibt, in den Räumen \mathbb{R}^n mit $n \geq 5$ aber nur noch je drei, nämlich die Entsprechungen von Tetraeder, Würfel und Oktader, siehe [2] und [4].

Das Studium von höherdimensionalen Polytopen ist nicht bloss Spielerei: Bei der linearen Programmierung sucht man das Optimum einer linearen Zielfunktion (in n Variablen) über einer Menge, die durch lineare Ungleichungen gegeben ist. Solche Mengen sind in der Regel Polytope.

Mit einem n -dimensionalen Würfel, dessen Eckpunkte leicht verschoben sind, haben Victor Klee und George J. Minty 1972 bewiesen, dass der von George Dantzig erfundene Simplex-Algorithmus zur Lösung von linearen Programmen im schlechtesten Fall exponentielle Laufzeit besitzt, siehe [3].

Der n -dimensionale Würfel (mit Seitenlänge 1) kann als die Menge

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, \text{ für } i = 1, 2, \dots, n\}$$

aufgefasst werden.

Die 2^n Eckpunkte haben dann die Koordinaten $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$.

Der 1-dimensionale Würfel ist eine Strecke und der 2-dimensionale Würfel ein Quadrat. Der 4-dimensionale Würfel wird auch als Tesserakt bezeichnet.

Fasst man den 0-dimensionalen Würfel als (Eck-)Punkt auf, dann gilt:

Der n -dimensionale Würfel hat genau $\binom{n}{i} \cdot 2^{n-i}$ Seitenflächen der Dimension i .

Alle Seitenflächen sind ebenfalls Würfel (niedriger Dimension).

Für eine Begründung siehe zum Beispiel [5].

Beispiel: Der Tesserakt hat

Sechzehn 0-dimensionale Seitenflächen (Eckpunkte); 32 1-dimensionale Seitenflächen (Kanten); 24 2-dimensionale Seitenflächen und acht 3-dimensionale Seitenflächen.

2 Abwicklungen

Von einer Abwicklung eines (konvexen) 3-dimensionalen Polyeders spricht man, wenn die Oberfläche des Polyeders entlang einiger Kanten so aufgeschnitten wird, dass die Seitenflächen in die Ebene ausgelegt werden können.

2.1 Abwicklung eines Würfels

Für den (3-dimensionalen) Würfel gibt es genau elf verschiedene Abwicklungen.

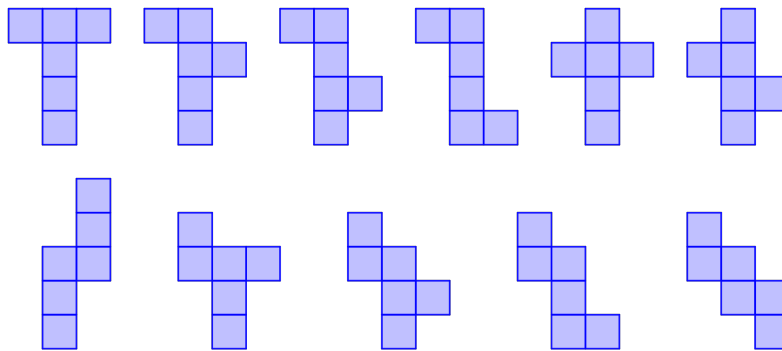


Abbildung 1

Um den Prozess des Abwickelns dynamisch darzustellen (zum Beispiel mit GeoGebra), führen wir einen Winkel φ ein, der Werte zwischen 0^0 und 90^0 annehmen kann.

Wir setzen $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$ $D(0, 1, 0)$,

$A'(-\cos(\varphi), 0, \sin(\varphi))$, $B'(1 + \cos(\varphi), 0, \sin(\varphi))$, $C'(1 + \cos(\varphi), 1, \sin(\varphi))$, $D'(-\cos(\varphi), 1, \sin(\varphi))$,

$A''(0, -\cos(\varphi), \sin(\varphi))$, $B''(1, -\cos(\varphi), \sin(\varphi))$, $C''(1, 1 + \cos(\varphi), \sin(\varphi))$, $D''(0, 1 + \cos(\varphi), \sin(\varphi))$,

$A'''(0, -\cos(\varphi) - \cos(2\varphi), \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))$, $B'''(1, -\cos(\varphi) - \cos(2\varphi), \sin(\varphi) + \sin(2\varphi))$.

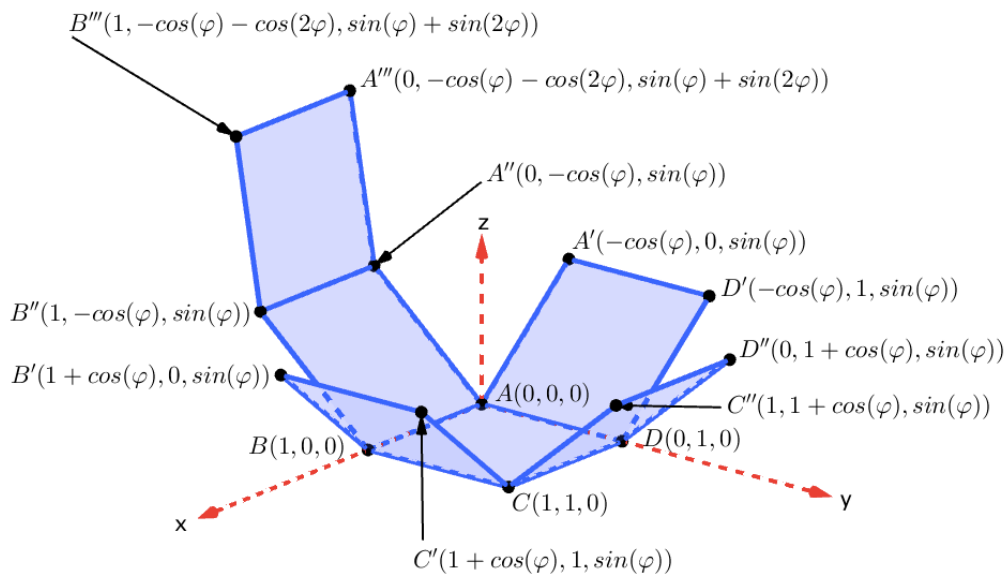


Abbildung 2

Man rechnet leicht nach, dass die Vierecke $ADD'A'$, $BCC'B'$, $CDD''C''$, $ABB''A''$ resp. $A''B''B'''A'''$ für jede Wahl von φ Quadrate mit der Seitenlänge 1 sind. Alle Kanten haben die Länge 1, der Winkel zwischen angrenzenden Kanten ist stets ein rechter.

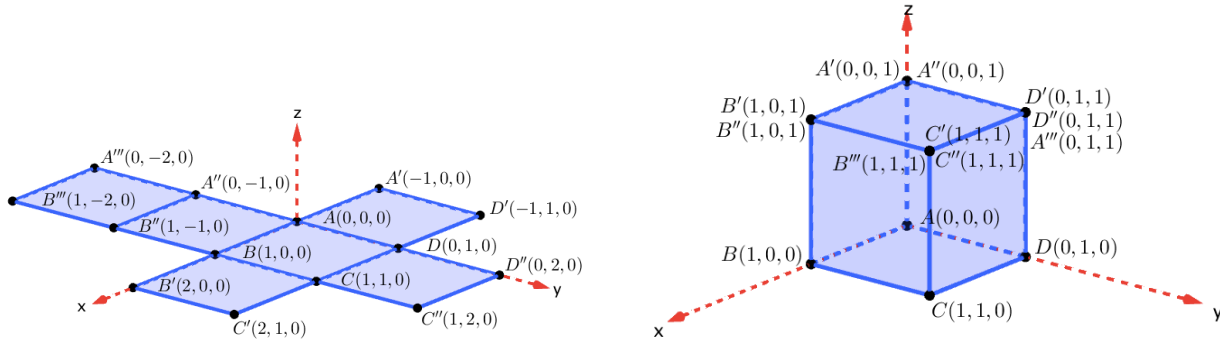


Abbildung 3a: Die Punkte mit $\varphi = 0^\circ$

Abbildung 3b: Die Punkte mit $\varphi = 90^\circ$

In der Abbildung 3a ist die Abwicklung des Würfels in Abbildung 3b zu sehen.

Die obige Idee lässt sich auf den 4-dimensionalen Würfel, den Tesseract übertragen.

2.2 Abwicklung eines Tesseracts

Eine elementare Rechnung zeigt, dass durch

$$P(p_1, p_2, p_3, p_4) \rightarrow P' \left(\frac{cp_1 - dp_2 - ap_3 + bp_4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}, \frac{-bp_1 + ap_2 - dp_3 + cp_4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}, \frac{-dp_1 - cp_2 + bp_3 + ap_4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} \right)$$

eine Parallelprojektion von \mathbb{R}^4 auf die Hyperebene $E : ax + by + cz + dt = 0$ mit $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ definiert ist.

In Abbildung 4 ist das Bild des Tesseracts für $a = 1.3$, $b = 2.5$, $c = 1.4$ $d = 1.2$ dargestellt.

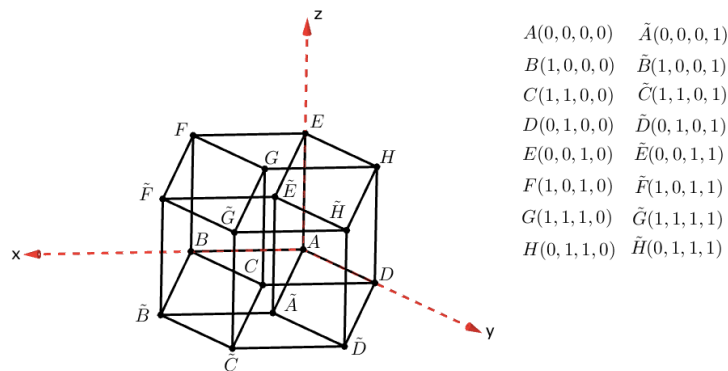


Abbildung 4

Man zählt sechzehn Eckpunkte, 32 Kanten, 24 2-dimensionale Seitenflächen (die als Parallelegramme erscheinen) und acht 3-dimensionalen Seitenflächen

$ABCDEFGH$, $ABCD\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$, $ABFE\tilde{A}\tilde{B}\tilde{F}\tilde{E}$, $ADHE\tilde{A}\tilde{D}\tilde{H}\tilde{E}$,
 $BCGF\tilde{B}\tilde{C}\tilde{G}\tilde{F}$, $CDHG\tilde{C}\tilde{D}\tilde{H}\tilde{G}$, $EFGH\tilde{E}\tilde{F}\tilde{G}\tilde{H}$ und $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}\tilde{G}\tilde{H}$,

die als Schrägbilder von Würfeln dargestellt sind.

In einem Bild von Salvador Dalí (1904-1989) ist eine von insgesamt 261 verschiedenen Abwicklungen eines Tesserakts dargestellt.

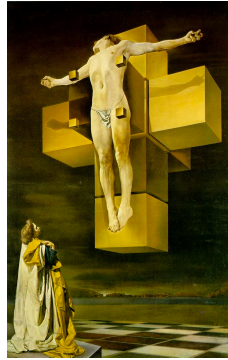


Abbildung 5: 'Crucifixion (Corpus Hypercubus)'

Wir setzen

$$\begin{aligned}
 &A(0, 0, 0, 0), \quad B(1, 0, 0, 0), \quad C(1, 1, 0, 0), \quad D(0, 1, 0, 0), \\
 &E(0, 0, 1, 0), \quad F(1, 0, 1, 0), \quad G(1, 1, 1, 0), \quad H(0, 1, 1, 0) \\
 &B'(1 + \cos \varphi, 0, 0, \sin \varphi), \quad C'(1 + \cos \varphi, 1, 0, \sin \varphi), \quad G'(1 + \cos \varphi, 1, 1, \sin \varphi), \quad F'(1 + \cos \varphi, 0, 1, \sin \varphi) \\
 &A'(-\cos \varphi, 0, 0, \sin \varphi), \quad D'(-\cos \varphi, 1, 0, \sin \varphi), \quad H'(-\cos \varphi, 1, 1, \sin \varphi), \quad E'(-\cos \varphi, 0, 1, \sin \varphi) \\
 &A''(0, -\cos \varphi, 0, \sin \varphi), \quad B''(1, -\cos \varphi, 0, \sin \varphi), \quad F''(1, -\cos \varphi, 1, \sin \varphi), \quad E''(0, -\cos \varphi, 1, \sin \varphi) \\
 &D''(0, 1 + \cos \varphi, 0, \sin \varphi), \quad C''(1, 1 + \cos \varphi, 0, \sin \varphi), \quad G''(1, 1 + \cos \varphi, 1, \sin \varphi), \quad H''(0, 1 + \cos \varphi, 1, \sin \varphi) \\
 &E'''(0, 0, 1 + \cos \varphi, \sin \varphi), \quad F'''(1, 0, 1 + \cos \varphi, \sin \varphi), \quad G'''(1, 1, 1 + \cos \varphi, \sin \varphi), \quad H'''(0, 1, 1 + \cos \varphi, \sin \varphi) \\
 &A'''(0, 0, -\cos \varphi, \sin \varphi), \quad B'''(1, 0, -\cos \varphi, \sin \varphi), \quad C'''(1, 1, -\cos \varphi, \sin \varphi), \quad D'''(0, 1, -\cos \varphi, \sin \varphi) \\
 &A''''(0, 0, -\cos \varphi - \cos 2\varphi, \sin \varphi + \sin 2\varphi), \quad B''''(1, 0, -\cos \varphi - \cos 2\varphi, \sin \varphi + \sin 2\varphi), \\
 &C''''(1, 1, -\cos \varphi - \cos 2\varphi, \sin \varphi + \sin 2\varphi), \quad D''''(0, 1, -\cos \varphi - \cos 2\varphi, \sin \varphi + \sin 2\varphi)
 \end{aligned}$$

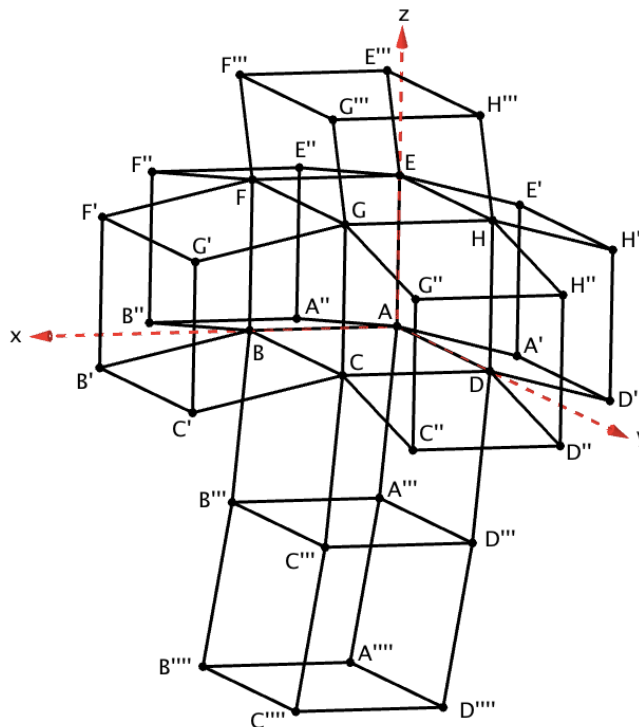


Abbildung 6

Der Übersicht halber sind unten Teile der Figur in Abbildung 6 dargestellt.

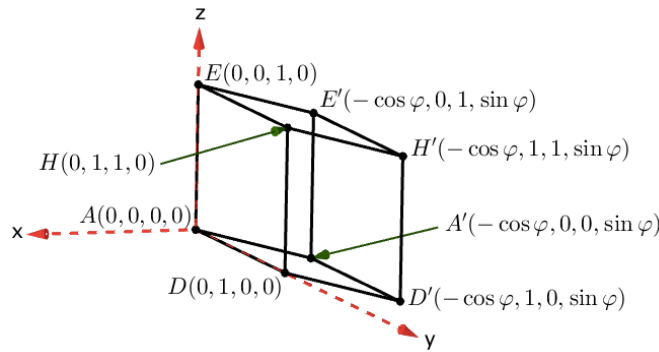


Abbildung 7a

Mit den Bezeichnungen von Abbildung 7a gilt:

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{EE'}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{AA'}| = 1 \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$$

Die acht Punkte $ADHEA'D'H'E'$ sind für jede Wahl von φ die Eckpunkte eines (regulären, 3-dimensionalen) Würfels mit Seitenlänge 1.

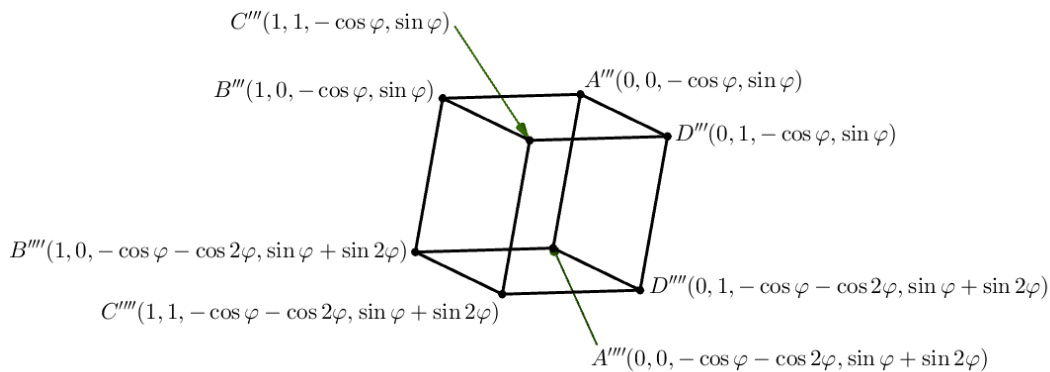


Abbildung 7b

Mit den Bezeichnungen von Abbildung 7b gilt:

$$\overrightarrow{A'''A''''} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix} = \overrightarrow{B'''B''''} = \overrightarrow{C'''C''''} = \overrightarrow{D'''D''''}$$

$$|\overrightarrow{A'''B''''}| = |\overrightarrow{A'''D''''}| = |\overrightarrow{A'''A''''}| = 1 \quad \text{und} \quad \overrightarrow{A'''B''''} \cdot \overrightarrow{A'''D''''} = \overrightarrow{A'''B''''} \cdot \overrightarrow{A'''A''''} = \overrightarrow{A'''D''''} \cdot \overrightarrow{A'''A''''} = 0$$

Die acht Punkte $A'''B'''C'''D'''A''''B''''C''''D''''$ sind ebenfalls für jede Wahl von φ die Eckpunkte eines (regulären, 3-dimensionalen) Würfels mit Seitenlänge 1.

Gleiches gilt für die Oktupel $ABCD A'''B'''C'''D'''$, $ABFE A''B''F''E''$, $BCGF B'C'G'F'$, $CDHG C''D''H''G''$ und $EFGH E'''F'''G'''H'''$.

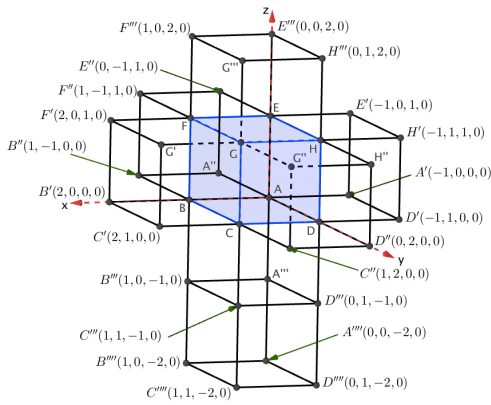


Abbildung 8a: Die Punkte mit $\varphi = 0^0$

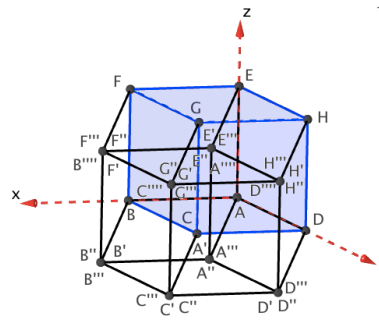


Abbildung 8b: Die Punkte mit $\varphi = 90^0$

$A(0,0,0,0)$	$A'(0,0,0,1) = A'' = A'''$
$B(1,0,0,0)$	$B'(1,0,0,1) = B'' = B'''$
$C(1,1,0,0)$	$C'(1,1,0,1) = C'' = C'''$
$D(0,1,0,0)$	$D'(0,1,0,1) = D'' = D'''$
$E(0,0,1,0)$	$E'(0,0,1,1) = E'' = E''' = A''''$
$F(1,0,1,0)$	$F'(1,0,1,1) = F'' = F''' = B''''$
$G(1,1,1,0)$	$G'(1,1,1,1) = G'' = G''' = C''''$
$H(0,1,1,0)$	$H'(0,1,1,1) = H'' = H''' = D''''$

In der Abbildung 8a ist die Abwicklung des Tesserakts (Abbildung 8b) zu sehen, vergleiche mit dem Bild von Dalí (Abbildung 5). Da für $\varphi = 0^0$ die t -Koordinaten aller Punkte gleich 0 sind, lässt sich das Gebilde im 'normalen' 3-dimensionalen Raum darstellen.

Abbildung 8b ist, bis auf die Bezeichnungen der Punkte, identisch mit Abbildung 4.

Fazit: Die aus sechs Quadraten bestehende Figur in Abbildung 3a ist, als Teilmenge von \mathbb{R}^2 , starr; als Teilmenge von \mathbb{R}^3 lässt sie sich zur Oberfläche eines Würfels hochklappen.

Die aus acht Würfeln bestehende Figur in Abbildung 8a ist, als Teilmenge von \mathbb{R}^3 , starr; als Teilmenge von \mathbb{R}^4 lässt sie sich zur Hyperoberfläche eines Tesserakts 'hochklappen'.

So wie wir Menschen uns nicht wirklich vorstellen können, dass acht aneinander geklebte Würfel in \mathbb{R}^4 ein bewegliches Gebilde darstellen, so können sich vermutlich die Wesen im 'Flächenland' nicht vorstellen, dass sechs aneinander geklebte Quadrate in \mathbb{R}^3 beweglich sind, siehe [1].

Schliesslich erinnern die obigen Ausführungen an eine Problematik, die Hans Walser in [6] sehr schön beschreibt.

Zitat: "Das Puzzle der Abbildung 9a ist beinahe fertig. Das fehlende Element rechts oben können wir aber nicht in der Ebene des Puzzles einpassen. Wir müssen es abheben und von oben her einpassen. Wir benötigen den Raum."

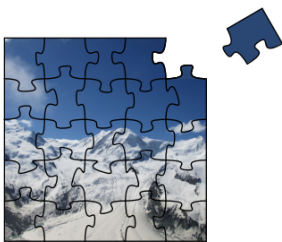


Abbildung 9a

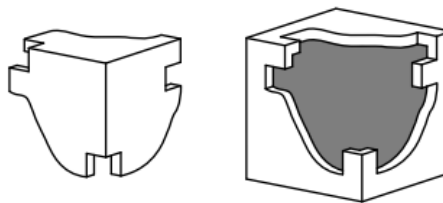


Abbildung 9b

Und weiter: "Im Beispiel der Abbildung 9b passt das Eckteil zwar in die Lücke, lässt sich aber nicht hineinschieben. Im 4-dimensionalen Raum liesse sich das Problem sehr einfach lösen. Wir könnten die 3-dimensionale Ecke in die vierte Dimension abheben und dann hineinschieben."

(Anm.: Die Nummerierung der Abbildungen wurde hier entsprechend angepasst.)

An einem exakten Beweis dieser letzten Behauptung (vielleicht mit einem Winkel φ ?) wäre der Autor sehr interessiert!

Literatur

- [1] Abbott, Edwin A., *Flächenland, Ein Märchen mit vielerlei Dimensionen*, (englischer Originaltitel: "Flatland"), Ra-Ba-Ka Publishing, 2009
- [2] Coxeter, Harold S. M., *Regular Polytopes*, Dover Publications, 1973
- [3] Klee, Victor, Minty, George J., *How Good Is the Simplex Algorithm?*, In *Inequalities*, Academic Press, New York, 1972
- [4] Schläfli, Ludwig, *Theorie der vielfachen Kontinuität*, verfasst in den Jahren 1850 bis 1852, herausgegeben im Auftrag der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, 1901, The Cornell University Library Digital Collections, ISBN 978-3-7643-8019-9
- [5] Walser, Hans, *Der n-dimensionale Hyperwürfel*, Hoahrhein-Seminar 2011/2012 für Mathematik und Naturwissenschaften Waldshut
- [6] Walser Hans, *Passen und Einpassen*, <https://www.walser-h-m.ch/hans/Vortraege/20200305/Skript.pdf>