Alexandre Junod
Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

Nombres de Fibonacci et approximation diophantienne

Nous établissons quelques propriétés des nombres de Fibonacci en évitant les habituelles preuves par induction et l'approche matricielle, puis montrons que le quotient de deux nombres de Fibonacci successifs est une “bonne approximation” du nombre d'or. Nous expliquons finalement que les “bonnes approximations” d'un irrationnel se cachent dans la fraction continue de ce dernier.

1 Les nombres de Fibonacci

Le *nombre d'or* φ et son *conjugué* $\widehat{\varphi}$ sont les deux solutions de l'équation $x^2 = x + 1$:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618 \qquad \text{et} \qquad \widehat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0{,}618.$$

On peut vérifier directement que $\varphi + \widehat{\varphi} = 1$, $\varphi \cdot \widehat{\varphi} = -1$ et $\varphi - \widehat{\varphi} = \sqrt{5}$. On peut également calculer une puissance de φ en multipliant la puissance précédente par φ :

$$\varphi^1 = 1\varphi + 0, \qquad \varphi^2 = \varphi + 1, \qquad \varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = (\varphi + 1) + \varphi = 2\varphi + 1,$$
$$\varphi^4 = 2\varphi^2 + \varphi = 2(\varphi + 1) + \varphi = 3\varphi + 2, \quad \varphi^5 = 3\varphi^2 + 2\varphi = 3(\varphi + 1) + 2\varphi = 5\varphi + 3.$$

De manière générale, s'il existe deux entiers F_n et F_{n-1} tels que $\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$, alors

$$\varphi^{n+1} = F_n\varphi^2 + F_{n-1}\varphi = F_n(\varphi + 1) + F_{n-1}\varphi = (F_n + F_{n-1})\varphi + F_n,$$

autrement dit $\varphi^{n+1} = F_{n+1}\varphi + F_n$ avec $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Nous voyons apparaître ici de manière naturelle les *nombres de Fibonacci*[1], définis par les valeurs initiales $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation de récurrence $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Les premières valeurs sont les suivantes.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Comme le nombre $\widehat{\varphi}$ vérifie la même équation que φ, ses puissances sont soumises à une relation analogue : on a $\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$ et $\widehat{\varphi}^n = F_n\widehat{\varphi} + F_{n-1}$. Des formules intéressantes peuvent alors être obtenues en additionnant, en soustrayant ou en multipliant ces deux relations.

- Par addition, on trouve $\varphi^n + \widehat{\varphi}^n = F_n(\varphi + \widehat{\varphi}) + 2F_{n-1} = F_n + 2F_{n-1} = F_{n+1} + F_{n-1}$. Ces nombres, notés L_n, sont appelés *nombres de Lucas*[2]. On a les valeurs initiales $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et la relation de récurrence $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

- Par soustraction, on trouve $\varphi^n - \widehat{\varphi}^n = F_n(\varphi - \widehat{\varphi}) = \sqrt{5}F_n$, donc

$$F_n = \frac{\varphi^n - \widehat{\varphi}^n}{\sqrt{5}} \qquad\qquad (\textit{formule de Binet})^3$$

1. Leonardo Fibonacci ou “Léonard de Pise” (∼ 1170 – 1250), mathématicien italien.
2. François Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891), mathématicien français.
3. Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856), mathématicien et astronome français.

- Par multiplication, on obtient $(\varphi \cdot \widehat{\varphi})^n = F_n^2(\varphi \cdot \widehat{\varphi}) + F_n F_{n-1}(\varphi + \widehat{\varphi}) + F_{n-1}^2$, c'est-à-dire $(-1)^n = -F_n^2 + F_n F_{n-1} + F_{n-1}^2$, donc $(-1)^n = -F_n^2 + F_{n-1}(F_n + F_{n-1})$, ou encore

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \textit{(identité de Cassini)}^4$$

La formule de Binet permet d'étendre la définition des nombres de Fibonacci aux indices négatifs :

$$F_{-n} = \frac{\varphi^{-n} - \widehat{\varphi}^{-n}}{\sqrt{5}} \overset{(*)}{=} \frac{\widehat{\varphi}^n - \varphi^n}{(-1)^n\sqrt{5}} = (-1)^{n+1}\frac{\varphi^n - \widehat{\varphi}^n}{\sqrt{5}} = (-1)^{n+1}F_n,$$

l'égalité $(*)$ provenant d'une amplification par $(\varphi \cdot \widehat{\varphi})^n = (-1)^n$. Nous pouvons encore établir une formule intéressante : pour des nombres entiers $k \geqslant 0$ et m, n quelconques, on peut écrire

$$F_{m+kn} = \frac{\varphi^m(\varphi^n)^k - \widehat{\varphi}^m(\widehat{\varphi}^n)^k}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^m(F_n\varphi + F_{n-1})^k - \widehat{\varphi}^m(F_n\widehat{\varphi} + F_{n-1})^k}{\sqrt{5}}$$

et en développant avec la formule du binôme, on trouve

$$\begin{aligned} F_{m+kn} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^m \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}F_n^j\varphi^j F_{n-1}^{k-j} - \widehat{\varphi}^m \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}F_n^j\widehat{\varphi}^j F_{n-1}^{k-j}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}F_n^j F_{n-1}^{k-j}\frac{\varphi^{m+j} - \widehat{\varphi}^{m+j}}{\sqrt{5}} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}F_n^j F_{n-1}^{k-j}F_{m+j}. \end{aligned}$$

On peut alors démontrer que $\mathrm{PGDC}(F_a, F_b) = F_{\mathrm{PGDC}(a,b)}$ pour des entiers a et b positifs.

- Avec $m = 0$, la formule établie ci-dessus montre que F_n divise F_{kn} car le terme correspondant à $j = 0$ est nul. En particulier, $F_{\mathrm{PGDC}(a,b)}$ divise F_a et F_b, donc divise $\mathrm{PGDC}(F_a, F_b)$.
- Avec $k = 1$, la formule ci-dessus devient $F_{m+n} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$. L'algorithme d'Euclide étendu fournit des nombres entiers x et y de signes différents tels que $ax + by = \mathrm{PGDC}(a, b)$. On a alors $F_{ax+by} = F_{by-1}F_{ax} + F_{by}F_{ax+1}$. Comme F_a divise F_{ax} et F_b divise F_{by}, on peut écrire $F_{ax+by} = F_a(\cdots) + F_b(\cdots)$ où les parenthèses contiennent des nombres entiers. Cela montre que $\mathrm{PGDC}(F_a, F_b)$ divise $F_{ax+by} = F_{\mathrm{PGDC}(a,b)}$. $\square$

En particulier, si des entiers a et b sont premiers entre eux, il en est de même pour F_a et F_b.

2 Approximations du nombre d'or

Pour un entier $n \geqslant 1$, les relations $\varphi + \widehat{\varphi} = 1$ et $\widehat{\varphi}^n = F_n\widehat{\varphi} + F_{n-1}$ permettent d'écrire

$$F_{n+1} - F_n\varphi = F_{n+1} - F_n(1 - \widehat{\varphi}) = F_n\widehat{\varphi} + F_{n+1} - F_n = F_n\widehat{\varphi} + F_{n-1} = \widehat{\varphi}^n.$$

Cette quantité s'approche de 0 lorsque n augmente, en étant positive si n est pair et négative si n est impair. La même conclusion est valable si on divise tout par F_n. On a donc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi \quad \text{et} \quad \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} < \varphi < \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 1.$$

4. Giovanni Domenico Cassini (1625 – 1712), astronome et ingénieur savoisien, naturalisé français.

Nous démontrons maintenant le résultat suivant, avant d'en donner une interprétation géométrique.

Proposition. Pour des entiers $n \geqslant 2$ et a, b avec $0 < b < F_{n+1}$, on a $|b\varphi - a| \geqslant |F_n\varphi - F_{n+1}|$, l'égalité n'ayant lieu que si $a = F_{n+1}$ et $b = F_n$.

Preuve. On peut trouver deux entiers u et v tels que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

car le déterminant de la matrice mise en jeu vaut $(-1)^{n+1}$ selon l'identité de Cassini.

- Si $u \geqslant 1$, alors $F_{n+1} > b = uF_{n+1} + vF_n \geqslant F_{n+1} + vF_n$, et en comparant les deux extrémités, on en déduit que $v < 0$.
- Si $u \leqslant 0$, alors $0 < b = uF_{n+1} + vF_n \leqslant vF_n$, ce qui implique que $v > 0$.

Dans tous les cas, les nombres u et v ont des signes opposés lorsque $u \neq 0$. On peut écrire

$$b\varphi - a \;=\; (uF_{n+1} + vF_n)\varphi - (uF_{n+2} + vF_{n+1}) \;=\; u(F_{n+1}\varphi - F_{n+2}) + v(F_n\varphi - F_{n+1}).$$

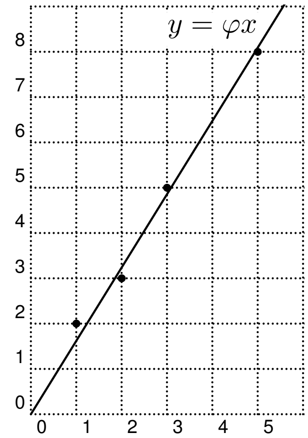
On a vu que les nombres $F_{n+2} - F_{n+1}\varphi$ $(= \widehat{\varphi}^{n+1})$ et $F_{n+1} - F_n\varphi$ $(= \widehat{\varphi}^{n})$ ont des signes opposés, donc $u(F_{n+1}\varphi - F_{n+2})$ et $v(F_n\varphi - F_{n+1})$ ont le même signe lorsque $u \neq 0$. On en déduit que

$$|b\varphi - a| \;=\; |u(F_{n+1}\varphi - F_{n+2})| + |v(F_n\varphi - F_{n+1})| \;\geqslant\; |v(F_n\varphi - F_{n+1})|.$$

L'égalité n'a lieu que si $u = 0$, auquel cas la condition $F_{n+1} > b = vF_n > 0$ montre que $v = 1$ (car $2F_n \geqslant F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$), donc $a = F_{n+1}$ et $b = F_n$. En cas d'inégalité stricte (c'est-à-dire lorsque $u \neq 0$), la relation $v \neq 0$ montre que $|b\varphi - a| > |v(F_n\varphi - F_{n+1})| \geqslant |F_n\varphi - F_{n+1}|$. $\square$

Construction. Si on veut rendre la quantité $|b\varphi - a|$ minimale, il est clair que a doit être l'entier le plus proche de $b\varphi$: $a = [b\varphi]$. On peut alors établir le tableau des valeurs $|b\varphi - [b\varphi]|$:

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lvert b\varphi - [b\varphi]\rvert$	**0,382**	**0,236**	**0,146**	0,472	**0,090**	0,292	0,326	**0,056**	0,438	0,180



Dans ce tableau, on a mis en évidence le nombre correspondant à $b = 1$ puis chaque nombre plus petit que le nombre mis en évidence précédemment. Selon la proposition ci-dessus, les valeurs de b correspondantes sont les nombres de Fibonacci.

Approche géométrique. On considère le point $(1; [\varphi] = 2)$ et on parcourt la droite d d'équation $y = \varphi x$ en retenant chaque point à coordonnées entières situé plus près de la droite d que ne l'était le point retenu précédemment. Les points $(b; a)$ retenus successivement sont $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 5)$, $(5; 8)$, et plus généralement $(F_n; F_{n+1})$, situés en alternance au-dessus et au-dessous de la droite. On peut remarquer que $F_{n+1} = [F_n\varphi]$ pour $n \geqslant 2$.

Corollaire. Si $n \geqslant 2$, si $0 < b \leqslant F_n$ et si $a \neq F_{n+1}$ au cas où $b = F_n$, alors $|b\varphi - a| > |F_n\varphi - F_{n+1}|$. En divisant l'inéquation par b, il s'ensuit

$$\left|\varphi - \frac{a}{b}\right| \;>\; \frac{F_n}{b}\left|\varphi - \frac{F_{n+1}}{F_n}\right| \;\geqslant\; \left|\varphi - \frac{F_{n+1}}{F_n}\right|,$$

donc $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ réalise la meilleure approximation de φ parmi toutes les fractions de dénominateur $\leqslant F_n$.

3 Cas général

La construction précédente peut être appliquée à tout nombre irrationnel $\theta > 0$. Par exemple, pour $\theta = \sqrt{2}$, on obtient le tableau suivant.

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\lvert q\sqrt{2} - [q\sqrt{2}]\rvert$	**0,41**	**0,17**	0,24	0,34	**0,07**	0,48	0,10	0,31	0,27	0,14	0,44	**0,02**

Les nombres $q > 1$ correspondant aux valeurs mises en évidence sont 2, 5, 12, puis viendront 29, 70, etc. Ce sont les *nombres de Pell*[5], définis par les valeurs $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et la relation $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. Chaque fraction associée $\frac{[q\theta]}{q}$ $\big(\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}$ ou $\frac{99}{70}$ dans notre exemple$\big)$ réalise alors la meilleure approximation de θ parmi toutes les fractions de dénominateur inférieur ou égal à q : on a

$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| \;>\; \left|\theta - \frac{[q\theta]}{q}\right|$$

pour tous les couples d'entiers $(a;b) \neq ([q\theta];q)$ avec $0 < b \leqslant q$. En adaptant la preuve faite dans le paragraphe précédent, on peut montrer que ces fractions $\frac{[q\theta]}{q}$ sont en réalité les réduites d'ordre non nul de la fraction continue associée à θ. Rappelons que pour tout irrationnel θ, il existe une unique suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ d'entiers strictement positifs, sauf éventuellement a_0, telle que

$$\theta \;=\; a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots}}} \;=\; [a_0; a_1, a_2, \dots].$$

La *réduite d'ordre* $n \geqslant 0$ est alors la fraction $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ mais on ne considère ici que $n \geqslant 1$.

Exemple 1. On peut écrire $\sqrt{2} \;=\; 1 + (\sqrt{2} - 1) \;=\; 1 + \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} \;=\; 1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$, donc

$$\sqrt{2} \;=\; [1; 1+\sqrt{2}] \;=\; [1; 2, 1+\sqrt{2}] \;=\; [1; 2, 2, 1+\sqrt{2}] \;=\; [1; 2, 2, 2, 1+\sqrt{2}] \;=\; \dots \;=\; [1; \overline{2}],$$

où la partie surlignée se répète indéfiniment. Les première réduites d'ordre non nul sont

$$[1;2] = \frac{3}{2}, \quad [1;2,2] = \frac{7}{5}, \quad [1;2,2,2] = \frac{17}{12}, \quad [1;2,2,2,2] = \frac{41}{29}, \quad [1;2,2,2,2,2] = \frac{99}{70}.$$

On reconnaît les fractions $\frac{[q\sqrt{2}]}{q}$ évoquées plus haut, avec les nombres de Pell au dénominateur.

Exemple 2. Le nombre d'or vérifie $\varphi^2 = \varphi + 1$, donc

$$\varphi \;=\; 1 + \frac{1}{\varphi} \;=\; [1;\varphi] \;=\; [1;1,\varphi] \;=\; [1;1,1,\varphi] \;=\; [1;1,1,1,\varphi] \;=\; \dots \;=\; [1;\overline{1}].$$

Les premières réduites d'ordre non nul sont $[1;1] = \dfrac{2}{1}$, $[1;1,1] = \dfrac{3}{2}$, $[1;1,1,1] = \dfrac{5}{3}$, $[1;1,1,1,1] = \dfrac{8}{5}$. On reconnaît les fractions $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ (avec $n \geqslant 2$) mentionnées dans le corollaire du paragraphe précédent.

Exemple 3. Les premières réduites d'ordre non nul de $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$ sont

$$[3;7] = \frac{22}{7}, \quad [3;7,15] = \frac{333}{106}, \quad [3;7,15,1] = \frac{355}{113}, \quad [3;7,15,1,292] = \frac{103'993}{33'102}.$$

L'avant dernière fraction est une excellente approximation de π (six décimales exactes), malgré son petit dénominateur. Elle est plus proche de π que ne l'est toute autre fraction $\frac{a}{b}$ avec $0 < b \leqslant 113$.

5. John Pell (1611 – 1685), diplomate et mathématicien anglais.