

Martin Lieberherr  
 MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

# Belasteter Transformator

## 1 Einleitung

Der Wechselstrom-Transformator ist eine weit verbreitete Anwendung des Induktionsgesetzes. Das Spannung-Transformationsverhältnis  $U_2/U_1 = N_2/N_1$  lässt sich gut motivieren, falls der Transformator leer läuft. Ebenso leicht lässt sich das Strom-Transformationsverhältnis für einen voll belasteten, technischen Transformator energetisch begründen:  $I_2/I_1 = N_1/N_2$ . Aber was ist mit den Fällen dazwischen? Wie sind die Verhältnisse bei Teillast? Da ich nur eine vage Ahnung hatte, machte ich mich gleich ans Werk und führte eine Messung durch.

## 2 Experiment

Abbildung 1: Messschaltung

Passives Wechselspannung-Netzgerät  $0 < U_1 < 30\text{ V}$ , 50 Hz. Schultransformator mit Windungszahlen  $N_1 = 600$ ,  $N_2 = 600$  und geschlossenem Kern aus lamelliertem Eisenblech. Verstellbarer Lastwiderstand mit  $0 < R \leq 113\ \Omega$ . Die Spannungen und Ströme wurden mit digitalen Multimetern gemessen (Effektivwerte).

6. April 2023, Lie.

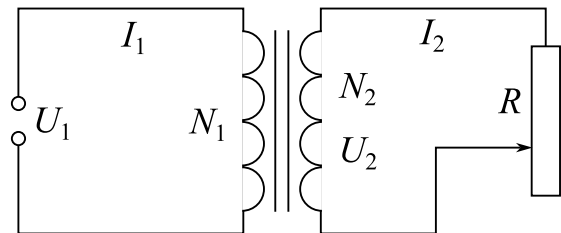
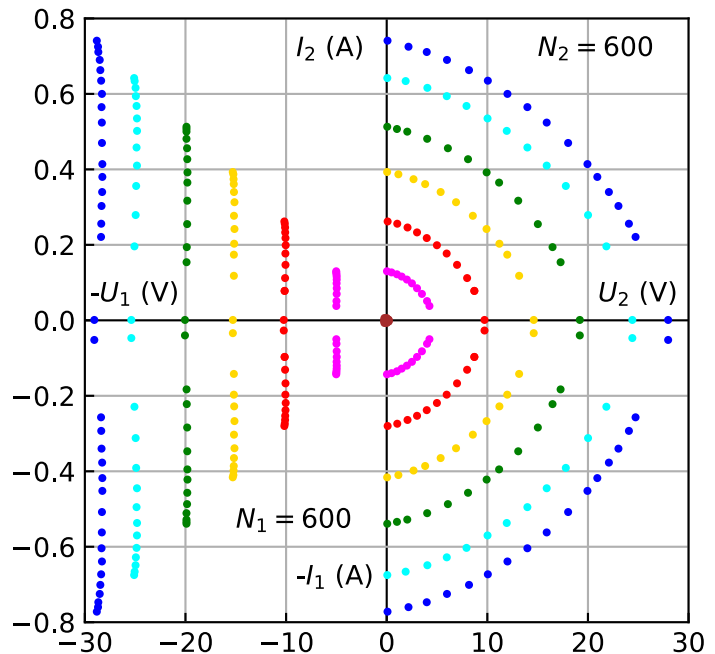


Abbildung 2: Messresultate

Am Netzgerät stellte ich eine Wechselspannung ein, dann variierte ich den Lastwiderstand und nahm Primärspannung  $U_1$ , Primärstrom  $I_1$ , Sekundärspannung  $U_2$  und Sekundärstrom  $I_2$  auf. Für die Grafik hab ich die Primärwerte negiert, damit sie in andere Quadranten zu liegen kommen.

Offenbar hängt die Primärspannung kaum von der Last ab; die Spannung des Netzgeräts ist fast stabil. Der Primärstrom ist ähnlich gross wie der Sekundärstrom. Die Sekundärspannung hängt stark von der Last ab. Je grösser der Sekundärstrom, desto kleiner die Sekundärspannung, d.h. die  $I_2(U_2)$ -Charakteristik ist fallend.



### 3 Theorie

Der Transformator wirkt im Leerlauf wie eine Drosselspule: Der Primärstrom wird durch Selbstinduktion begrenzt:  $u_1 = L_1 \cdot di_1/dt$ . Falls primär- und sekundärseitig Ströme fließen, wird der magnetische Fluss im Transformator Kern durch beide Ströme bestimmt. Die Primär- und Sekundärkreise beeinflussen sich durch Gegeninduktion:  $u'_1 = M \cdot di_2/dt$  und  $u'_2 = M \cdot di_1/dt$ . Die Anwendung lässt vermuten, dass die Wechselgrößen harmonisch und mit gleicher Frequenz oszillieren. Die Parameter werden als konstant angenommen.

$$L_{1,2} = \frac{\mu_{\text{eff}} \mu_0 N_{1,2}^2 A}{\ell} \sim N_{1,2}^2 \quad \text{Induktivität einer schlanken Zylinderspule} \quad (1)$$

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{Gegeninduktivität}^1 \text{ mit Kopplungskonstante } 0 \leq k \leq 1 \quad (2)$$

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \cos(\omega t) \quad \text{Primärspannung (gegeben)} \quad (3)$$

$$i_1(t) = \hat{i}_1 \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{Primärstrom} \quad (4)$$

$$u_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0 \quad \text{Kirchhoffsche Maschengleichung für Primärkreis} \quad (5)$$

$$M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} - R i_2 = 0 \quad \text{Kirchhoffsche Maschengleichung im Sekundärkreis} \quad (6)$$

$$i_2(t) = \hat{i}_2 \cos(\omega t + \beta) \quad \text{Sekundärstrom} \quad (7)$$

$$u_2(t) = R i_2(t) \quad \text{Sekundärspannung und -strom sind in Phase} \quad (8)$$

Durch diese Gleichungen sind Primär- und Sekundärstrom bestimmt. Das Gleichungssystem wird sofort viel einfacher, wenn wir mit komplexen Grössen rechnen. Amplituden mit Tilde sind im Folgenden komplex.

$$u_1 = \hat{u}_1 e^{j\omega t} \quad i_1 = \tilde{i}_1 e^{j\omega t} \quad i_2 = \tilde{i}_2 e^{j\omega t} \quad (9)$$

Setzen wir das in die Kirchhoff-Maschengleichungen (5) und (6) ein und vereinfachen, so folgt

$$j\omega L_1 \tilde{i}_1 + j\omega M \tilde{i}_2 = \hat{u}_1 \quad (10)$$

$$j\omega M \tilde{i}_1 - (j\omega L_2 + R) \tilde{i}_2 = 0 \quad (11)$$

Dieses lineare,  $2 \times 2$ - Gleichungssystem ist leicht lösbar.

$$\tilde{i}_2 = \frac{M \hat{u}_1}{L_1 R + j\omega(M^2 + L_1 L_2)} \quad \tilde{i}_1 = \frac{j\omega L_2 + R}{j\omega M} \cdot \tilde{i}_2 \quad (12)$$

Sodann können wir die Beträge von  $\tilde{i}_2$  und  $\tilde{i}_1$  berechnen, d.h. die reellen Amplituden.

$$i_2^2 = \tilde{i}_2 \cdot \tilde{i}_2^* = \frac{M^2 \cdot \hat{u}_1^2}{L_1^2 R^2 + \omega^2(M^2 + L_1 L_2)^2} \Rightarrow I_2 = \sqrt{\frac{k^2 L_1 L_2}{L_1^2 R^2 + \omega^2(k^2 + 1)L_1^2 L_2^2}} \cdot U_1 \quad (13)$$

$$U_2 = R \cdot I_2 \quad \text{und analog:} \quad \frac{I_2}{I_1} = \sqrt{\frac{\omega^2 M^2}{R^2 + \omega^2 L_2^2}} = \frac{\omega k \sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L_2^2}} \quad (14)$$

wobei wir die Effektivwerte  $I_{1,2} = \hat{i}_{1,2}/\sqrt{2}$  und  $U_{1,2} = \hat{u}_{1,2}/\sqrt{2}$  verwendet haben. Eliminieren wir den Lastwiderstand  $R$  aus der parametrischen Darstellung  $I_2(R)$  vs.  $U_2(R)$ , so erhalten wir die Gleichung einer Ellipse:

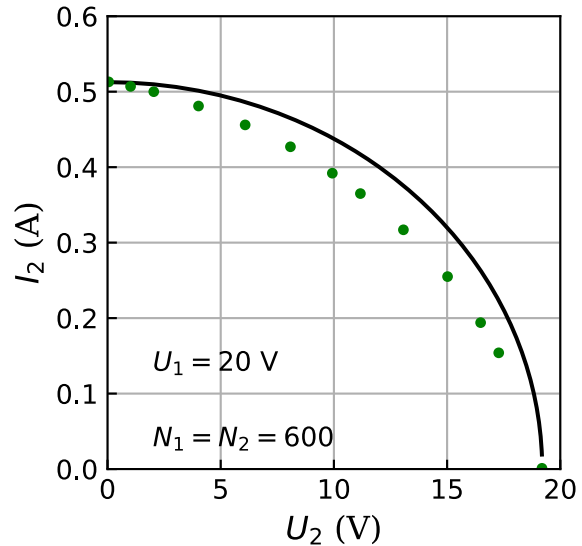
$$\frac{U_2^2}{\frac{k^2 L_2 U_1^2}{L_1}} + \frac{I_2^2}{\frac{k^2 U_1^2}{\omega^2(k^2 + 1)L_1 L_2}} = 1 \quad (15)$$

## 4 Diskussion

Im Jahr 1623, also genau vor 400 Jahren, ist Galileo Galileis “Il Saggiatore” (die Goldwaage oder der Prüfer) erschienen. Darin steht der berühmte Satz, dass das Buch der Natur in mathematischer Sprache geschrieben sei. Im Original ist das natürlich viel blumiger und italienisch geschrieben. Getreu diesem Motto gilt ein Phänomen erst dann als verstanden, wenn die Messung mit der Rechnung übereinstimmt. Vergleichen wir also die Theorie mit dem Experiment, siehe Abbildung 3.

Abbildung 3: Messung (Punkte) und Berechnung (Linie) des Sekundärstroms  $I_2$  eines Transformators als Funktion der Sekundärspannung  $U_2$  bei konstanter Primärspannung  $U_1$ . Der Graph der Theoriefunktion ist ein Ellipsen-Viertel.

Die Parameter in der Rechnung sind  $U_1 = 20\text{ V}$ ,  $L_1 = L_2 = 0.086\text{ H}$ ,  $k = 0.96$  und  $\omega = 2\pi \cdot 50\text{ Hz}$ . Diese Wahl passt die Ellipse an die extremalen Daten bei Kurzschluss und Leerlauf. Eine Ausgleichs-Ellipse würde besser aussehen.



Die Rechnung zeigt qualitativ das gleiche Verhalten wie die Messung. Die verwendeten Spulen waren mit “600 2.5  $\Omega$  9 mH” beschriftet. Die Induktivität  $L_1$  im Experiment lag also nur eine Größenordnung über dem Nennwert; ich hätte wegen des Eisenkerns mehr erwartet. Die Kopplungskonstante  $k$  ist dagegen fast Eins, d.h. der Eisenkern erfüllt seine Aufgabe. Die ohmschen Verluste im Kern und den Spulen sowie allfällige Nichtlinearitäten wurden in der Rechnung ignoriert. Es muss aber entsprechende Regeln geben, denn die Dimensionierung von Transformatoren ist ja eine typische Elektrotechnik-Aufgabe.

Wer noch nicht genug hat, kann die Phasenverschiebungen der Ströme gegen die Primärspannung berechnen: in erster Näherung via die Wirkleistung  $U_1 I_1 \cos(\alpha) \approx U_2 I_2$ , aufwändiger via die Argumente der Amplituden in den Gleichungen (12).

Der belastete Transformator wirkt in der Nähe des Leerlaufs wie eine Konstantspannungsquelle und kurzschlussnah wie eine Konstantstromquelle. Er teilt dieses Verhalten mit z.B. einer beleuchteten Photodiode oder Solarzelle. Eine Batterie weist ebenfalls eine fallende Kennlinie auf, aber diese ist fast gerade.

Testen wir noch, ob die Theorie die richtigen Grenzwerte liefert:

$$\text{Leerlauf: } I_2 = 0 \wedge \frac{U_2^2}{k^2 L_2 U_1^2} + \frac{I_2^2}{\omega^2 (k^2 + 1) L_1 L_2} = 1 \Rightarrow \frac{U_2^2}{U_1^2} = k^2 \frac{L_2}{L_1} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = k \cdot \frac{N_2}{N_1} \quad \checkmark \quad (16)$$

$$\text{Kurzschluss: } R = 0 \wedge \tilde{i}_1 = \frac{j\omega L_2 + R}{j\omega M} \cdot \tilde{i}_2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{k \sqrt{L_1 L_2}}{L_2} = k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = k \frac{N_1}{N_2} \quad \checkmark \quad (17)$$

In Abbildung 3 sind die Messwerte 0 bis 10 % tiefer als die berechneten Werte. Die Theorie beschreibt also etwa 95 % des Transformators korrekt; den Rest überlasse ich den Elektrotechnikern.

<sup>1</sup> J. M. Silveyra and J. M. Conde Garrido, “Electrically connected and magnetically coupled inductors: Aiding or opposing fluxes?”, Am. J. Phys. **90** (5), May 2022, 365-372