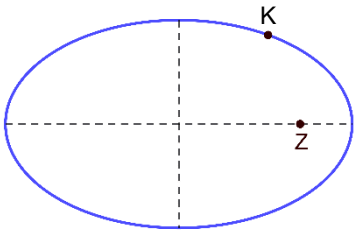
Georg Keller
Kantonsschule Schaffhausen, georg.keller@kanti.sh.ch

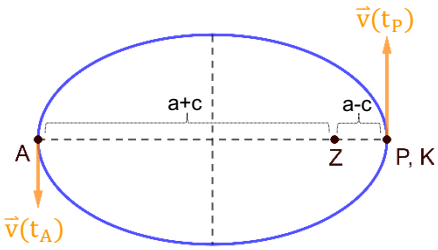
Vergleich von Kepler- und Kreisbahn: Eine Ergänzung

Im Schwerpunktfach „Anwendungen der Mathematik“ widme ich einen Teil des letzten Schuljahres vor der Matur einer naturwissenschaftlichen Perle: Wir untersuchen einige mathematisch-physikalisch relevante Aspekte erstens der 3 Keplerschen Gesetze und zweitens des Newtonschen Gravitationsgesetzes, und anschliessend studieren wir eine auf dem Newtonschen Gravitationsgesetz basierende Herleitung der 3 Keplerschen Gesetze. Der erste Unterrichtsteil, d.h. das Untersuchen der 3 Keplerschen Gesetze, ist wie folgt aufgebaut:

- Als Vorbereitung werden einige den Grundlagenfachunterricht ergänzende Kenntnisse über Kegelschnitte und Differentialrechnung / Vektorgeometrie erarbeitet, zum Beispiel dass ...
  - die Ellipsenfläche gleich $\pi ab = \pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$ ist (a, b sind die grosse resp. kleine Halbachse der Ellipse, $\varepsilon := \frac{c}{a}$ ist die numerische Exzentrizität, $c = \sqrt{a^2-b^2}$ die lineare Exzentrizität).
  - die Flächengeschwindigkeit $\dot{F}(t)$ eines Körpers K, welcher auf einer ebenen Bahn einen Zentralkörper Z umläuft, gemäss
  $$\dot{F}(t) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{ZK}(t) \times \vec{v}(t)\right| \qquad (1)$$
  berechnet werden kann, wobei $\vec{v}(t)$ der Geschwindigkeitsvektor von K zur Zeit t ist.
- Danach verwenden wir die neuen Kenntnisse, um den 3 Keplerschen Gesetzen einige physikalisch interessierende Eigenschaften von Keplerbahnen zu entnehmen, notabene ohne jegliche Verwendung der klassischen Mechanik und Gravitationstheorie, also mit einem Physikverständnis, welches Keplers Zeit nachempfunden ist. Ein Beispiel:
  - Wir betrachten einen Körper K (vgl. rechtsstehende Abbildung), welcher einen Zentralkörper Z auf einer Bahn umläuft, welche den 3 Keplerschen Gesetzen gehorcht. Aufgrund des 1. Keplerschen Gesetzes ist die Umlaufbahn elliptisch und Z befindet sich in einem der beiden Ellipsenbrennpunkte. Gemäss 2. Keplerschem Gesetz ist diejenige Fläche $F(t)$, welche ab einem beliebigen Anfangszeitpunkt und bis zur Zeit t von $\overrightarrow{ZK}$ überstrichen wird, eine lineare Funktion von t. Die t-unabhängige Steigung $\dot{F}$ des Graphen von $F(t)$ kann daher entweder via (1) berechnet werden (wobei t beliebig gewählt werden kann), oder mit Hilfe von irgendeinem Steigungsdreieck, z.B. einem Steigungsdreieck, welches einem vollen Umlauf von K um Z entspricht, was zu (T := Umlaufszeit von K)



$$\dot{F} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T} \qquad (2)$$
führt. Aufgrund von (1), (2) gilt also
$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{ZK}(t) \times \vec{v}(t)\right| = \frac{\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T} \quad (t = \text{beliebig}). \qquad (3)$$
  - Jetzt werten wir (3) für denjenigen Zeitpunkt t_P aus, wo sich K im Perizentrum P seiner Umlaufbahn befindet (vgl. rechtsstehende Abbildung; der Umlaufssinn von K sei positiv): Offenbar steht $\overrightarrow{ZK}(t_P)$ (mit Betrag $a - c = a(1-\varepsilon)$) senkrecht auf $\vec{v}(t_P)$ (dessen Betrag wir $v(t_P)$ nennen); daher lautet (3) für $t = t_P$



$$\frac{1}{2}a(1-\varepsilon)\cdot v(t_P) = \frac{\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T} \quad ,$$

woraus wir für $v(t_P)$ erhalten:

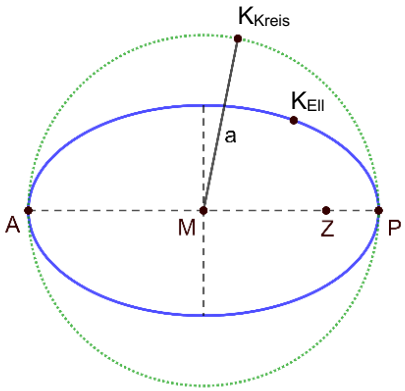
$$v(t_P) = \frac{2\pi a}{T}\cdot\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \quad . \tag{4}$$

- In analoger Weise erhält man für das Apozentrum A von K's Umlaufbahn (vgl. vorherige Abbildung)

$$v(t_A) = \frac{2\pi a}{T}\cdot\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \quad . \tag{5}$$

Die Geschwindigkeitsberechnungsformeln (4), (5) können wie folgt gelesen werden:

- Der auf der rechten Seite von (4) auftretende Faktor $\frac{2\pi a}{T}$ kann physikalisch als die Geschwindigkeit eines fiktiven Körpers interpretiert werden, welcher sich mit konstanter Geschwindigkeit auf der nebenstehend gezeichneten Kreisbahn mit Mittelpunkt M (= Ellipsenmittelpunkt) und Radius a und mit K's Umlaufszeit T bewegt. Um die Geometrie der Umlaufbahn des fiktiven Körpers deutlich hervorzuheben, werden wir ihn K_{Kreis} nennen; und aus gleichem Grund nennen wir K ab jetzt K_{Ell}.



- Wir können uns vorstellen, dass sich K_{Ell} und K_{Kreis} zur Zeit $t = 0$ bei P befinden, danach innerhalb der Zeitspanne T (z.B. im Gegenuhrzeigersinn) einen (im Falle von K_{Ell}) elliptischen Umlauf um Z resp. (im Falle von K_{Kreis}) kreisförmigen Umlauf um M absolvieren und sich daher zur Zeit $t = T$ wieder bei P begegnen.
- Bezüglich dieser beiden Umlaufsbewegungen macht (4) die Aussage, dass sich K_{Ell} am Punkt P um den Faktor $\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$ schneller bewegt als der fiktive Körper K_{Kreis}. Und (5) besagt, dass zur Zeit $t = \frac{T}{2}$ (zu welcher sich K_{Ell} und K_{Kreis} am Punkt A treffen) der Körper K_{Ell} um den Faktor $\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$ langsamer ist als der fiktive Körper K_{Kreis}.

Angesichts dieser Lesart von (4), (5) drängt sich die Frage auf, wie „synchron" die Umlaufsbewegungen von K_{Ell} und K_{Kreis} *zwischen* den Punkten P und A verlaufen. Konkret stellt sich z.B. die ...

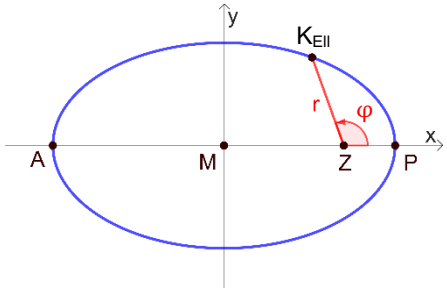
<u>Frage</u>: Ist es richtig, dass auf dem Weg von P nach A, und in x-Richtung gesehen, K_{Ell} jederzeit K_{Kreis} voraus ist, oder gibt es „Überholmanöver" ? (6)

Das Ziel dieses Beitrags ist, die obige Frage schwerpunktfachtauglich zu beantworten. Dazu werden wir als Vorbereitung in den nächsten zwei Kapiteln eine entsprechende, vertiefte Auswertung des 1. und 2. Keplerschen Gesetzes resp. der Bewegung von K_{Kreis} vornehmen, was uns dann in den letzten zwei Kapiteln zur erfreulich einfachen Antwort und zu weiteren interessanten Einsichten führen wird. Dies könnte mithelfen, sowohl das qualitative als auch das quantitative Verständnis der Schülerinnen und Schüler für den Bewegungsverlauf auf einer Keplerbahn zu verbessern.

Anmerkung: Vor ca. 400 Jahren verglich Kepler selbst die Keplerbahn von K_{Ell} mit der Kreisbahn von K_{Kreis}, um die Funktion $\varphi(t)$ (φ ist K_{Ell}'s Polarwinkel; vgl. nächste Seite) zu berechnen. $\varphi(t)$ konnte aber nicht in geschlossener Form ausgedrückt werden. Dieser Mangel wurde erst vor ca. 50 Jahren behoben, wobei das Resultat viel zu kompliziert ist, um praktisch von Nutzen zu sein (vgl. z.B. W. Neutsch, K. Scherer: Celestial Mechanics. BI Wissenschaftsverlag (1992)). Die Umkehrfunktion $t(\varphi)$ ist zwar deutlich „kundenfreundlicher", aber immer noch so kompliziert, dass man nicht hinreichend rasch und problemlos scheinbar harmlose Fragen wie (6) beantworten kann. Solche Fragen, oder wenigstens die bemerkenswert unkomplizierten, hilfreichen und z.T. überraschenden Antworten (17)-(20), scheinen leider kaum Eingang in die gymnasiale oder akademische Literatur gefunden zu haben, denn meine Literatursuche führte zu keinerlei Treffern.

Vorbereitung 1: Position und Geschwindigkeit auf der Keplerbahn

- *Wahl geeigneter Koordinaten*: Wir legen ein kartesisches Koordinatensystem über die Bahnellipse von K_{Ell}, sodass es im Mittelpunkt der Ellipse zentriert ist und die x-Achse so auf der grossen Ellipsenachse liegt, dass Z (und P) auf der positiven x-Achse liegen. Wir ergänzen dieses xy-Koordinatensystem um eine z-Achse, welche aus der Blattebene heraus gegen den Leser gerichtet ist (und der Einfachheit halber *nicht* gezeichnet wird, weil wir sie nur für eine kurze Rechnung verwenden werden). In der xy-Ebene wählen wir ausserdem ebene Polarkoordinaten r, φ, zentriert bei Z, wobei das Perizentrum $\varphi = 0$ entspricht.



- *Position und Geschwindigkeit von K_{Ell} in Polarkoordinaten*: Bekanntlich ist in unsern Polarkoordinaten die Lage der Ellipsenpunkte dadurch charakterisiert, dass der Radius r wie folgt vom Polarwinkel φ abhängt: $r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}$, wobei das Ellipsen-Quermass p gemäss $p = \frac{b^2}{a} = a(1-\varepsilon^2)$ durch die Halbachsen resp. durch a, ε ausgedrückt werden kann. Damit kann der Positionsvektor $\overrightarrow{ZK}_{Ell}$ im räumlichen kartesischen Koordinatensystem als

$$\overrightarrow{ZK}_{Ell} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

geschrieben werden. Ableiten nach t ergibt den mit $\vec{v}_{Ell}$ bezeichneten Geschwindigkeitsvektor von K_{Ell}

$$\vec{v}_{Ell} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)} \cdot \dot{\varphi} \cdot \left[\frac{\varepsilon\cdot\sin(\varphi)}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \right] , \tag{8}$$

wobei, wegen des als positiv angenommenen Umlaufssinns von K_{Ell}, offenbar $\dot{\varphi} > 0$ ist.

- *Auswertung der Vektoren $\overrightarrow{ZK}_{Ell}$ und $\vec{v}_{Ell}$* :
  - Erstens: Für die linke Seite von (3) erhalten wir via (7) und (8) und wegen $\dot{\varphi} > 0$:

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{ZK}_{Ell}(t) \times \vec{v}_{Ell}(t)\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}\right)^2 \cdot \dot{\varphi} \tag{9}$$

Aufgrund von (3) und (9) ist also zu allen Zeiten t

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{(1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi))^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \quad . \tag{10}$$

  - Zweitens: Gemäss (8) lautet die x-Komponente der Geschwindigkeit von K_{Ell} [1]

$$\begin{aligned} v_{Ell,1} &\overset{(8)}{=} \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)} \cdot \dot{\varphi} \cdot \left[\frac{\varepsilon\cdot\sin(\varphi)}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\right] \\ &= -\frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi))^2} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \\ &\overset{(10)}{=} -\frac{2\pi a}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \tag{11}$$

[1] Statt $v_{Ell,x}$ schreiben wir lieber $v_{Ell,1}$, weil wir später die Abhängigkeit dieser Grösse von der x-Koordinate untersuchen werden, wo die vielleicht problematische Schreibweise $v_{Ell,x}(x)$ vermieden werden soll.

- Drittens: Weil die x-Koordinate von Z gleich $c \equiv a \cdot \varepsilon$ ist, lautet wegen (7) die x-Koordinate von K_{Ell}

$$x = a \cdot \varepsilon + \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cdot \cos(\varphi)} \cdot \cos(\varphi) \quad .$$

Diese Gleichung lösen wir nach $\cos(\varphi)$ auf und erhalten

$$\cos(\varphi) = \frac{x-\varepsilon \cdot a}{a-\varepsilon \cdot x} \quad . \tag{12}$$

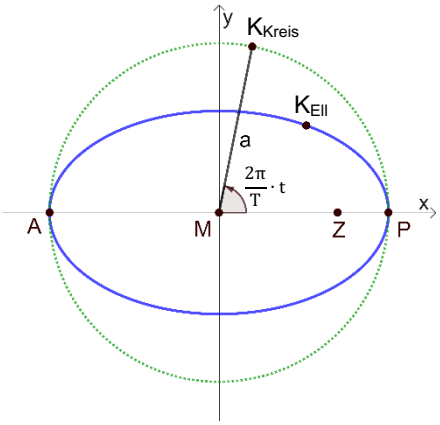
Mit Hilfe von (11), (12) und $\sin(\varphi) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}$ sehen wir schliesslich, in welcher Weise $v_{Ell,1}$ von x abhängt:

$$v_{Ell,1}(x) = \mp \frac{2\pi a}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{x-\varepsilon \cdot a}{a-\varepsilon \cdot x}\right)^2} = \mp \frac{2\pi a}{T} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon \cdot \frac{x}{a}} \tag{13}$$

(das Vorzeichen ist „-“ für eine Bewegung von P nach A, „+“ falls umgekehrt)

Vorbereitung 2: Position und Geschwindigkeit auf der Kreisbahn

In ähnlicher Weise gehen wir im viel einfacheren Fall des fiktiven Körpers K_{Kreis} vor, der sich mit konstanter Geschwindigkeit auf der erwähnten Kreisbahn (vgl. rechtsstehende Abbildung) bewegt und (vgl. „Einleitung“) zur Zeit $t = 0$ beim Punkt P befindet und positiven Umlaufssinn hat: Offenbar ist



$$\overrightarrow{MK}_{Kreis}(t) = a \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{pmatrix} \tag{14}$$

und daher

$$\vec{v}_{Kreis}(t) = \frac{2\pi a}{T} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{pmatrix} \quad . \tag{15}$$

Gemäss (15) ist $v_{Kreis,1}(t) = -\frac{2\pi a}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$. Wegen (14) kann die x-Koordinate von K_{Kreis} als $x = a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ geschrieben werden, d.h. $\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = \frac{x}{a}$. Daher sehen wir nun, wie $v_{Kreis,1}$ von x abhängt:

$$v_{Kreis,1}(x) = \mp \frac{2\pi a}{T} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \tag{16}$$

(wieder ist das Vorzeichen „-“ für eine Bewegung von P nach A, „+“ falls umgekehrt)

Antwort auf die Frage (6)

Aufgrund von (13) und (16) erhalten wir die überraschend einfache Beziehung

$$v_{Ell,1}(x) \overset{(13,16)}{\cong} v_{Kreis,1}(x) \cdot \frac{1}{1-\varepsilon \cdot \frac{x}{a}} \quad , \quad -a \le x \le a \quad , \tag{17}$$

zwischen der x-Komponente der Ellipsenbahn- resp. der Kreisbahn-Geschwindigkeit. Für nichttriviales ε, d.h. für $\varepsilon > 0$, führt dies für die Bewegung von P nach A (wo $v_{Ell,1}(x) < 0$ und $v_{Kreis,1}(x) < 0$ ist, für $-a < x < a$) zu Folgendem:

- Für $0 < x < a$: Hier gilt $\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\frac{x}{a}} > 1$, also ist $v_{Ell,1}(x) \overset{(17)}{\lessgtr} v_{Kreis,1}(x)$; dies besagt, dass in x-Richtung K_{Ell} je länger desto mehr K_{Kreis} voraus sein wird.
- Für $-a < x < 0$: Hier gilt $\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\frac{x}{a}} < 1$, also ist $v_{Ell,1}(x) \overset{(17)}{\gtrless} v_{Kreis,1}(x)$, was besagt, dass in x-Richtung K_{Ell} je länger desto mehr von K_{Kreis} eingeholt wird. Das Einholen wird genau bei $x = -a$ geschehen; nicht vorher, weil ansonsten K_{Kreis}, in x-Richtung gesehen, auf dem restlichen Weg von der Überholstelle bis zu $x = -a$ einen immer grösseren Vorsprung erlangen würde, was aber nicht möglich ist, weil zur Zeit $t = \frac{T}{2}$ K_{Ell} und K_{Kreis} simultan beim Punkt A ankommen werden. Es gibt also keine „Überholmanöver".

In analoger Weise sieht man ein, dass für den Rückweg, d.h. für die Bewegung von A nach P (wo $v_{Ell,1}(x) > 0$ und $v_{Kreis,1}(x) > 0$ ist, für $-a < x < a$), für $\varepsilon > 0$ gilt:

- Für $-a < x < 0$: In x-Richtung wird K_{Kreis} je länger desto mehr K_{Ell} voraus sein.
- Für $0 < x < a$: In x-Richtung wird K_{Kreis} je länger desto mehr von K_{Ell} eingeholt. Es gibt aber keine „Überholmanöver", d.h. das Einholen geschieht genau bei $x = a$.

Ergänzungen

Die bisherigen Überlegungen führen zu einigen weiteren, intuitiv z.T. unerwarteten Einsichten:

- (11) $\Rightarrow$ $v_{Ell,1}(\varphi)$ ist symmetrisch bezgl. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (und bezgl. $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, ...)
- $\left.\begin{array}{l}(11) \Rightarrow \left|v_{Ell,1}\right|_{max} = \frac{2\pi a}{T}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\text{, erreicht bei } x = c \\ (16) \Rightarrow \left|v_{Kreis,1}\right|_{max} = \frac{2\pi a}{T}\text{, erreicht bei } x = 0\end{array}\right\}$ für $\varepsilon > 0$ ist $\left|v_{Ell,1}\right|_{max} > \left|v_{Kreis,1}\right|_{max}$
- (17) $\Rightarrow$ $v_{Ell,1}(x = 0) = v_{Kreis,1}(x = 0)$
- Für die Bewegung von K_{Ell} von P nach A, z.B. für $0 \le t \le \frac{T}{2}$, entspricht (13) der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = -\frac{2\pi a}{T}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon\cdot\frac{x}{a}}$ für die x-Koordinate von K_{Ell}. Die Lösung dieser Differentialgleichung (mit der Anfangsbedingung $x(t = 0) = a$) lautet

$$t = T\cdot\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) \quad . \tag{18}$$

Via (18) kann man für einige spezielle x-Werte die entsprechenden, exakten t-Werte rasch von Hand bestimmen, z.B. $t(x = \frac{a\sqrt{3}}{2}) = T\cdot\left(\frac{1}{12} - \frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\right)$, $t(x = \frac{a}{\sqrt{2}}) = T\cdot\left(\frac{1}{8} - \frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $t(x = \frac{a}{2}) = T\cdot\left(\frac{1}{6} - \frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $t(x = 0) = T\cdot\left(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2\pi}\right)$. Und: Die ersten beiden Summanden auf der rechten Seite von (18) ergeben genau diejenige Zeit $t_{Kreis}(x)$, welche via Kreisbahn von a bis x vergeht. Daher kann (18) zwecks Vergleichs von Ellipsen- und Kreisbahn noch prägnanter als

$$t_{Ell}(x) = t_{Kreis}(x) - \varepsilon\cdot\frac{T}{2\pi}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \tag{19}$$

geschrieben werden. (19) bestätigt die weiter oben gefundene Antwort auf die Frage (6) in erstaunlich einfacher und quantitativ noch präziserer Weise: Die via Ellipsenbahn von a bis x vergehende Zeit ist, für $-a < x < a$ und $\varepsilon > 0$, kürzer als via Kreisbahn (und die entsprechende Zeitdifferenz ist bei $x = 0$ am grössten, wo sie $\varepsilon\cdot\frac{T}{2\pi}$ beträgt). Via (19) erkennen wir auch, dass für die Bewegung von x nach (-x) erstaunlicherweise gilt:

$$\Delta t_{Ell}\big|_{\text{von x nach }(-x)} = \Delta t_{Kreis}\big|_{\text{von x nach }(-x)} \tag{20}$$