Soluzione di certi sistemi del modello preda-predatore di Vito Volterra

Mauro Arrigoni

La soluzione per il modello preda-predatore di V. Volterra è ottenibile nel caso in cui i rispettivi tassi di crescita ed estinzione autonoma di preda e predatore siano uguali.

1. Prendiamo in esame, come caso particolare del modello classico di preda-predatore [6,7], il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \quad , & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = -ay + dxy \quad , & y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (1')$$

con $a,b,d,x_0,y_0 > 0$, che può essere scritto, senza limitarne la generalità,

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - xy \quad , & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = -ay + xy \quad , & y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

Il sistema (1) può essere risolto in forma implicita, dopo aver diviso tra loro le due equazioni; si ottiene così

$$xy = Le^{(x+y)/a} \quad , \quad \text{con} \quad L = x_0 y_0 e^{-(x_0+y_0)/a} \qquad (2)$$

Nota.- Il modello classico preda-predatore, pubblicato negli anni trenta da V. Volterra, non è mai stato risolto esplicitamente. La soluzione parametrica, nel caso proposto, è uno degli unici tentativi con successo. Per questo, pur avendo già pubblicato il lavoro in collaborazione con il prof. A. Steiner [2], ho ritenuto di proporlo, con sostanziali modifiche, anche nella nostra rivista.

Inserendo questa relazione, possiamo scrivere il sistema (1) nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - Le^{(x+y)/a} & , \quad x(0) = x_0 \\ \dot{y} = -ay + Le^{(x+y)/a} & , \quad y(0) = y_0 . \end{cases}$$

Introducendo le nuove variabili

$$\begin{cases} u := x + y \\ v := x - y \end{cases} \qquad (3)$$

ne risulta il sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = av & , \quad u(0) = u_0 = x_0 + y_0 \\ \dot{v} = au - 2Le^{u/a} & , \quad v(0) = v_0 = x_0 - y_0 \end{cases} \qquad (4)$$

che a sua volta si può ridurre all'equazione differenziale di secondo ordine

$$\ddot{u} = a^2u - 2aLe^{u/a} \quad ; \quad u(0) = u_0 \ , \ \dot{u} = av_0 \qquad (4')$$

Introducendo poi la funzione

$$p(u) := \dot{u} \qquad (5)$$

nella (4'), in modo da eliminare il fattore tempo, e considerando che

$$\ddot{u} = p'(u).p(u) = \tfrac{1}{2}\,(p^2)' \qquad \text{con} \quad p' = \frac{dp}{du},$$

si ottiene l'equazione differenziale lineare

$$(p^2)' = 2a^2u - 4aLe^{u/a} \quad , \quad p(u_0) = a(x_0 + y_0) \qquad (6)$$

Dalla sua soluzione

$$p^2 = a^2(u^2 - 4Le^{u/a})$$

si ricavano, considerando le equazioni (3), (4) e (5), le traiettorie di (1) in forma parametrica

$$\begin{cases} x = x(u) = \frac{1}{2}\,u \pm \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - 4Le^{u/a}} \\ y = y(u) = \frac{1}{2}\,u \mp \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - 4Le^{u/a}} \end{cases} \qquad (7)$$

Aggiungendo poi in queste equazioni la funzione $t=t(u)$ che descrive l'andamento del tempo dell'evoluzione del nostro sistema dinamico, per la cui determinazione abbiamo a disposizione l'equazione differenziale (4), ne risultano le soluzioni

$$\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \\ t = t(u) \end{cases} \qquad (8)$$

del sistema preda-predatore (1).

2. Per l'intervallo di variazione del parametro u deve valere : $p^2 > 0$. Con i valori iniziali prefissati $S(x_0,y_0)$, l'equazione $p^2 = 0$, che può anche essere scritta nella forma

$$f(u) := 1/4\, u^2e^{-u/a} = L \ , \qquad (9)$$

possiede due soluzioni $u_1 < u_2$ (un'unica solo per $x_0 = y_0 = a$) poichè la sua parte destra $L = x_0y_0e^{-(x_0 + y_0)/a}$ non può mai andare oltre il valore a^2e^{-2} che è il massimo della funzione f(u).

Inoltre vale

$$u_1 \leq u_0 \leq u_2$$

poichè per $u = u_0 = x_0 + y_0$ il radicando in (7) è positivo. La traiettoria chiusa del sistema (1), descritta dalle equazioni (7), relativa ai valori iniziali $S(x_0,y_0)$ si ottiene scegliendo dapprima i segni+ e – rispettivamente per x e y e facendo variare il parametro u da u_1 a u_2 : il punto (x,y) descrive così, in senso antiorario, la parte inferiore destra della traiettoria di fase.

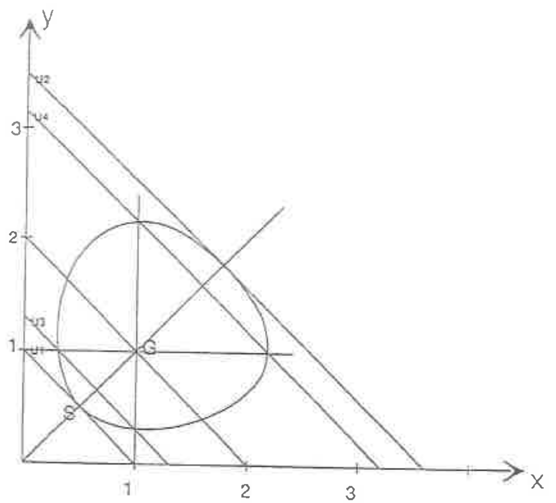

Fig.1.- Traiettoria di $\begin{cases} \dot{x} = x - xy \;, & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = -y + xy \;, & y(0) = y_0 \end{cases}$

Scegliendo poi i segni opposti nelle equazioni (7) e facendo diminuire il parametro u da u_2 a u_1 si ottiene una traiettoria che è simmetrica, rispetto alla retta y = x, a quella già tracciata e che, partendo dal punto $(u_2/2,u_1/2)$, riporta il punto (x,y) in $(u_1/2,u_2/2)$.

I valori del parametro u_3 e u_4 , $u_3 < u_4$ che forniscono gli estremi delle traiettorie, risultano quali soluzioni dell'equazione $y'(u) = 0$, cioè da

$$g(u) := a(u - a)e^{-u/a} = L \qquad (10)$$

La loro esistenza è assicurata, in quanto L non può mai superare il valore a^2e^{-2} che è il massimo della funzione g(u), con $u > 0$. Poichè $g(u) < f(u)$ si ricava, confrontando la (9) e la (10), la validità delle disuguaglianze

$$u_1 < u_3 < u_4 < u_2$$

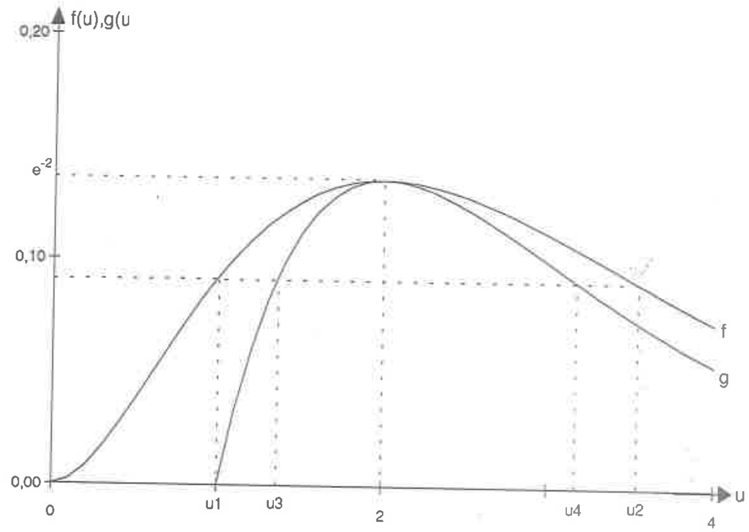

Fig. 2.- Determinazione dei valori dei parametri u_1,u_3,u_4 e u_2 con $x_0 = y_0 = 0,5$ e $a = 1$.

I punti estremi delle traiettorie si trovano sulle parallele agli assi cartesiani , passanti per il punto d'equilibrio G(a,a) del sistema preda-predatore (1): in effetti, ponendo la condizione $x = a$ nell'equazione (7), si ottiene l'equazione per la determinazione di u_3 e u_4.

3. Spostando lo zero della nostra cronologia dal momento dove $u = x_0 + y_0 = u_0$ al momento in cui il parametro $u = x + y$ assume ilvalore u_1, ne risulta, da (5) e (7) e con i valori di u che crescono da u_1 a u_2, il tempo t mediante l'integrazione dell'equazione differenziale

$$dt = du/ u^2 - 4Le^{u/a} \quad , \qquad t(u_1) = 0$$

cioè

$$t = t(u) = t_1(u) := \int_{u_1}^{u} \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 4Le^{s/a}}} \quad , \quad (u_1 \le u \le u_2) \qquad (11)$$

mentre successivamente

$$dt = \frac{-du}{\sqrt{u^2 - 4Le^{u/a}}} \quad , \quad t(u_2) = t_2(u_2)$$

da cui

$$t = t(u) = 2t_1(u_2) - t_1(u) .$$

Ciò significa che, ponendo

$$T := 2t_1(u_2) \qquad (11')$$

d'ora in poi varrà

$$t = t(u) = T - t_1(u) \quad , \quad (u_2 \ge u \ge u_1) \qquad (11'')$$

ed in particolare $t(u_1) = T - t_1(u_1) = T$, da cui, considerando le (7) e (9) , risulta chiaro che T è il periodo del ciclo di Volterra.

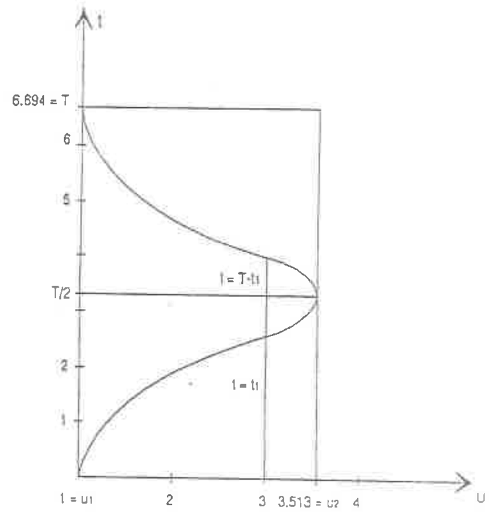

Fig.3.- t=t(u) e periodo T con $x_0=y_0=0,5$.
Confronta le figure 5 e 6.

4. Per meglio illustrare l'esposizione fatta, calcoliamo la soluzione del sistema preda-predatore (1) con a=1 e valori iniziali $S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Dalle equazioni (7) abbiamo dapprima la rappresentazione parametrica della traiettoria

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} u \pm \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - e^{u-1}} \\ y = \frac{1}{2} u \mp \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - e^{u-1}} \end{cases}$$

Gli zeri del radicando delimitano l'intervallo di variazione del parametro u (=x+y): $u_1 = u_0 = 1 < u < u_2 = 3{,}513$.
L'equazione (10) fornisce inoltre gli estremi della traiettoria nel piano di fase $u_3 = 1{,}358$ e $u_4 = 3{,}153$.

Per la determinazione dei valori della funzione $t_1(u)$ e del periodo $T = 2t_1(u_2)$ si deve tener conto del fatto che l'integrazione da eseguire secondo (11) e (11') parte da un polo dell'integrando e, nel secondo caso, termina di nuovo in un polo. E' consigliabile dunque di partire da un punto interno, per esempio u=2 e calcolare dapprima i valori della funzione

$$t_2(u) = \int_2^u \frac{ds}{\sqrt{s^2 - e^{s-1}}} \qquad (12)$$

fino ad arrivare nelle vicinanze degli estremi (1,01<u<3,51) con una integrazione numerica, per esempio con la regola di Simpson.

u	t_2	u	t_2
1.0000000	-	2.3	0.2487
1.01	−1.6900	2.4	0.3262
1.1	−1.2624	2.5	0.4021
1.2	−1.0091	2.6	0.4768
1.3	−0.8185	2.7	0.5511
1.4	−0.6606	2.8	0.6255
1.5	−0.5236	2.9	0.7008
1.6	−0.4012	3.0	0.7782
1.7	−0.2898	3.1	0.8590
1.8	−0.1868	3.2	0.9456
1.9	−0.0907	3.3	1.0425
2.0	0.0000	3.4	1.1603
2.1	0.0863	3.5	1.3586
2.2	0.1689	3.51	1.4107
2.3	0.2487	3.5128624	-

Fig.4.- Valori di $t_2 = \int_2^u \frac{ds}{\sqrt{s^2 - e^{s-1}}}$ per 1,01<u<3,51.

Per valori $1 < u < 1{,}01$ poniamo

$$t_2(u) = t_2(1{,}01) + \sqrt{2} \int_{1.01}^u \frac{ds}{\sqrt{s^2 - e^{s-1}}}$$

$$\cong 0{,}9096 - 2\sqrt{2} \ln(\sqrt{u+1} - \sqrt{u-1})$$

da cui

$$t_2(1) = -1{,}8898 . \qquad (13)$$

Analogamente si ottiene per l'altro estremo dell'intervallo $u_2 = 3{,}5128624$

$$t_2(u_2) = 1{,}4572 \qquad (13')$$

e con ciò, unitamente alla (13), anche il periodo

$$T = 6{,}694 \qquad (13'')$$

del nostro ciclo di Volterra.

u	t_1	u	t_1
1.0	0.000	2.3	2.139
1.1	0.627	2.4	2.216
1.2	0.881	2.5	2.292
1.3	0.071	2.6	2.367
1.4	1.229	2.7	2.441
1.5	1.366	2.8	2.515
1.6	1.489	2.9	2.591
1.7	1.600	3.0	2.668
1.8	1.703	3.1	2.749
1.9	1.799	3.2	2.835
2.0	1.890	3.3	2.932
2.1	1.976	3.4	3.050
2.2	2.059	3.5	3.248
2.3	2.139	3.5128624	3.347

Fig.5.- Valori di $t_1(u) = -t_2(1) + t_2(u)$ sull'insieme di definizione $[u_1,u_2]$ con $x_0 = y_0 = 0{,}5$periodo $T = 2t_1(u_2) = 6{,}69$

Per concludere diamo le soluzioni del sistema preda-predatore (1) con
$a = 1 \quad , \quad x_0 = y_0 = 0{,}5$:

Con u da $u_1 = 1$ a $u_2 = 3{,}513$:

$$\begin{cases} x = x(u) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - e^{u-1}} \\ y = y(u) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - e^{u-1}} \\ t = t(u) = t_1(u) \end{cases}$$

con u da u_2 a u_1 e $T = 6{,}694$:

$$\begin{cases} x = x(u) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - e^{u-1}} \\ y = y(u) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - e^{u-1}} \\ t = t(u) = T - t_1(u) \end{cases}$$

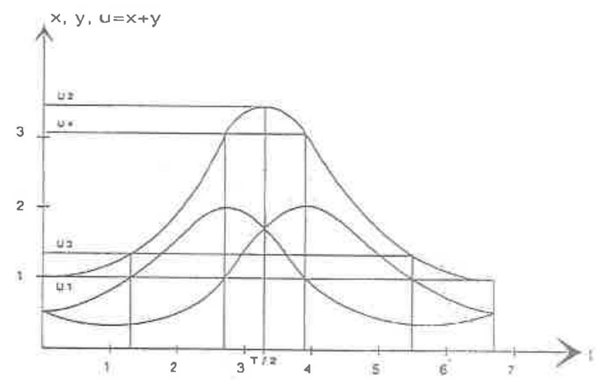

Fig.6.- Soluzioni del sistema $\begin{cases} \dot{x} = x - xy \ , & x(0) = 0{,}5 \\ \dot{y} = -y + xy \ , & y(0) = 0{,}5 \end{cases}$

Confronta con fig.3 .

Bibliografia

[1] A. Arrigoni : "Soluzione di un sistema del tipo preda-predatore". Universität Zürich (Diplomarbeit-1982).

[2] M. Arrigoni, A. Steiner : "Die Lösung gewisse Räuber-Beute-Systeme". Studia Biophysica Vol.123 (1988) Nr.2.

[3] G. Nicolis, I. Prigogine : "Self-Organisation in Nonequilibrium Systems". John Wiley & Sons, New York.

[4] A. Steiner : "Sistemi dinamici non lineari". Corso d'aggiornamento di matematica, Mendrisio (1987).

[5] V.S. Varna : Bulletin of Mathematical Biology, 39 (1977).

[6] V. Volterra : "Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi". Rendiconti Comitato Talassografico Italiano (1927).

[7] V. Volterra : "Leçon sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie". Cahiers Scientifiques, Paris (1931).