Einblick in die Behandlung parabolischer partieller Differentialgleichungen mithilfe der Theorie der Halbgruppen stetiger linearer Operatoren, Teil I

von Patrick Guidotti

0.ALLGEMEIN

In diesem Artikel möchte ich eine moderne Methode/Theorie darstellen, die man dazu brauchen kann, um partielle Differentialgleichungen, sowie Randwertprobleme und Anfangsrandwertprobleme für partielle Differentialgleichungen zu untersuchen. Dazu sind einige Grundkenntisse aus der Halbgruppentheorie nötig; die werde ich in diesem ersten Teil angeben, auch weil die an und für sich interessant sind. Im zweiten Teil werde ich dann auf die Anwendungen eingehen.

I. STARKSTETIGE (HALB-)GRUPPEN LINEARER BESCHRÆNKTER OPERATOREN

Notation.-

$\mathcal{L}(E)$:= Raum der stetigen linearen Operatoren auf E

BUC:=BUC($\mathbb{R}^n$):=Raum der gleichmässig stetigen beschränkten reelwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$

C_0;=$C_0(\mathbb{R}^n)$:= Raum der stetigen reelwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die im Unendlichen verschwinden

$L_p(\mathbb{R}^n)$,$1<p<\infty$: Raum der zur p-ten Potenz Lebesgue-integrierbaren reelwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$.

Definition.- (Halbgruppe)

(a) sei E ein Banachraum; eine Familie stetiger Operatoren auf E

$\{U(t): t\in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(E)$ heisst [Halb-]Gruppe, falls

(i) $U(0)= id_E$

(ii) $U(t+s)=U(t)U(s)$ für jedes $(t,s) \in \mathbb{R}^{[+]} \times \mathbb{R}^{[+]}$

(b) Eine [Halb-]Gruppe $U:=\{U(t): t\in \mathbb{R}^{[+]}\}$ heisst starkstetig, falls

(i) $U(t)x \to x$ $(t\to 0+)$ für jedes $x\in E$

Notation.-
Eine starkstetige [Halb]-Gruppe werden wir oft der Einfachheit halber C_0-[Halb]-Gruppe nennen.

(1.1) Lemma.-
Sei U eine starkstetige Halbgruppe auf E. Dann existieren $M\geq 1$ und $\omega\geq 0$ mit $\|U(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\omega t}$ für $t\geq 0$.

Beweis.- • $U(0)=id \Rightarrow M\geq 1$

• $\exists$ $M\geq 1$ und $T>0$ mit $\|U(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M$, $t\in [0,T]$ (*)

Nehmen wir an, das sei nicht der Fall, dann existiert eine Folge t_j , die gegen Null konvergiert, mit $\|U(t_j)\|_{\mathcal{L}(E)} \geq j$. Nach dem Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit muss jetzt ein $x\in E$ mit existieren $\|U(t_j)x\|_E \to \infty$ und das führt uns direkt zu einem Widerspruch zur starken Stetigkeit von U. Damit ist die Zwischenbehauptung (*) bewiesen.

• Merke jetzt, dass jedes t eine eindeutige Zerlegung der Form $t=kT+\tau$ mit $k\in \mathbb{N}$ und $\tau\in (0,T)$ zulässt. Es folgt:

$$\|U(t)\|_{\mathcal{L}(E)}\leq \|U(T)^kU(\tau)\|_{\mathcal{L}(E)}\leq MM^k = M \exp(k \log M)$$
$$\leq M\exp(\omega t),\ t\geq 0 \text{ für } \omega:=T^{-1} \log M$$

(1.2) Satz.-
Für jede starkstetige [Halb-]Gruppe auf E gilt: $U(\cdot)x \in C(\mathbb{R}^{[+]},E)$ für jedes $x\in E$.

Beweis. $t>0$:

$$U(t+s)x=U(t)U(s)x \to U(t)x \qquad (s\to 0+)\ (*)$$
$$\|U(t)x -U(t-s)x\|_E = \|U(t-s)(U(s)x -x)\|_E$$
$$\leq M \exp(\omega t)\|U(s)x -x\|_E \to 0 \quad (s\to 0+)\quad (**)$$

(*) und (**) ergeben zusammen die rechtseitige und die linkseitige Stetigkeit von $U(\cdot)x$ und somit die Stetigkeit. Im Falle einer Gruppe ist der Beweis völlig analog.

(1.3) Beispiele.-

(a) Sei E ein Banachraum und $A\in \mathcal{L}(E)$, dann ist $U(t):=\exp(tA)$ eine gleichmässig stetige[1] Gruppe auf E, also insbesondere eine C_0-Gruppe auf E.
Dabei ist $\exp(tA):= id + tA + 2^{-1}(tA)^2 + ... + (n!)^{-1}(tA)^n + ...$

(b) Sei $E\in \{BUC(\mathbb{R}^n),C_0(\mathbb{R}^n), L_p(\mathbb{R}^n)1<p<\infty\}$; dann ist $\{T(t): t\in \mathbb{R}^+\}$ eine C_0-Halbgruppe auf E, wobei $(T(t)u)(x):=u(x-ta)$ für jedes $x\in \mathbb{R}^n$ $(a\in \mathbb{R}^n -\{0\})$.

(c) Sei Ω ein offenes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ und f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf Ω. Dann erzeugt bekanntlich f einen lokalen Halbfluss φ_t auf Ω,und zwar ist dieser durch die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung $x'=f(x)$, $x(0)=x_0\in \Omega$ gegeben. Nehmen wir nun an, φ_t sei einen globalen Halbfluss, d.h. existieren die Lösungen der Differntialgleichung für alle Zeiten $t\in \mathbb{R}$.
Unter dieser Voraussetzungen sind wir jetzt in der Lage folgenden **Theorem** zu formulieren:

(i) $\operatorname{div} f \geq \omega > -\infty \Rightarrow \{(\varphi_t)^*: t\in \mathbb{R}^+\}$ ist eine C_0-Halbgruppe auf $L_p(\Omega)$ und genügt der folgenden Wachstumsabschätzung:
$\|(\varphi_t)^*\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \leq e^{-\omega t/p}$ für $t\geq 0$

(ii) (i) $|\operatorname{div} f| \leq \omega < \infty \Rightarrow \{(\varphi_t)^*: t\in \mathbb{R}\}$ ist eine C_0-Gruppe auf $L_p(\Omega)$ und genügt der folgenden Wachstumsabschätzung:
$\|(\varphi_t)^*\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \leq e^{\omega|t|/p}$ für $\in \mathbb{R}$

Beweis.- Transformatiossatz der Integralrechnung und Satz von Liouville.

(d) $w_t(x):= (4\pi t)^{-n/2} \exp(-|x|^2/4t)$, $t>0$
$U(t)(u)(x):= \int w_t(x-y)u(y)dy$ und $U(0):=id$
für $u\in E\in \{BUC(\mathbb{R}^n),C_0(\mathbb{R}^n),L_p(\mathbb{R}^n)1<p<\infty\}$
U ist eine C_0-Halbgruppe auf E, die Gauss-Weierstrass-Halbgruppe.

(1.4) Theorem.-
Sei $U=\{U(t): t\in \mathbb{R}^+\}$ eine C_0-Halbgruppe auf E. Dann ist U die Einschränkung einer C_0-Gruppe $V=\{V(t): t\in \mathbb{R}\}$ auf E (d.h

[1] Eine Halbgruppe heisst gleichmässig stetig, falls $\|U(t) - id\|_{\mathcal{L}(E)} \to 0$ für $t\to 0$ gilt.

$U(t)=V(t)$, für jedes $t\geq 0$) genau dann, wenn $U(t)\in \mathfrak{GL}(E)$ für ein (für alle) $t>0$.

Beweis.-

"$\Rightarrow$" $id_E=U(t)U(-t)=U(-t)U(t)$ wegen der Gruppeneigenschaft und somit folgt unmittelbar die Behauptung.

"$\Leftarrow$" Ist umgekehrt $U(t)\in \mathfrak{GL}(E)$, $t>0$, dann setzen wir einfach

$$V(t):=U(t),\ t\geq 0 \text{ und } V(t):=U(-t)^{-1},\ t<0$$

und erhalten so die gewünschte C_0-Gruppe V.

Es bleibt also zu zeigen, dass $U(t)\in \mathfrak{GL}(E)$ für ein $t>0$ $U(s)\in \mathfrak{GL}(E)$ für alle $s\geq 0$ nach sich zieht.

Sei also $t>0$ mit $U(t)\in \mathfrak{GL}(E)$; nun ist für $0<s<t$

$$U(t)=U(s)U(t-s)=U(t-s)U(s) \quad (*)$$

Wäre jetzt $U(s)\notin \mathfrak{GL}(E)$ dann müsste nach dem 'Open Mapping Theorem' und die Stetigkeit von U(s) entweder

$N(U(s))\neq\{0\}$ oder $R(U(s))\neq E$ gelten.

Beides würde aber mit (*) implizieren, dass auch

$N(U(t))\neq\{0\}$ oder $R(U(t))\neq E$, was die Voraussetzung widerspricht. Also ist

$$U(s)\in \mathfrak{GL}(E),\ 0\leq s\leq t.$$

Für $s>t$ zerlegen wir s wie in Lemma (1.1), d.h. schreiben wir

$s=kt+\tau$ mit $k\in \mathbb{N}^*:=\{1,2,3...\}$ und $0\leq t<\tau$

Dann gilt offensichtlich

$$U(s)=U(t)^kU(\tau)\in \mathfrak{GL}(E)$$

Definition.-(Infinitesimale Generator)

Sei U eine C_0-Halbgruppe auf dem Banachraum E; sei dann

A: dom(A) $\subset E\to E$ definiert durch

$$\mathrm{dom}(A):=\{f\in E \mid \lim_{h\to 0+} h^{-1}(U(t+h)f-f) \text{ existiert in } E\}$$

$$Af:= -\lim_{h\to 0+} h^{-1}(U(t+h)f-f),\ f\in \mathrm{dom}(A)$$

Dann heisst -A der (infinitesimale) Generator von U.

$$\mathfrak{G}(E):=\{A: \mathrm{dom}(A) \subset E\to E \mid -A \text{ ist der Generator einer } C_0\text{-Halbgruppe auf } E\}$$

(1.5) Theorem.-

Für jedes $x\in E$ und $t>0$ ist ${}_0\int^t U(\tau)d\tau \in \mathrm{dom}(A)$ und es gilt

$$U(t)x - x = -A\ {}_0\int^t U(\tau)xd\tau$$

Ist $x\in \mathrm{dom}(A)$, so ist $U(T)x\in \mathrm{dom}(A)$ und

$$U(t)Ax=AU(t)x,\ t\geq 0$$

Beweis.-

(i) Seien $x\in E$ und $t>0$ fest. Es gilt dann

$$\lim_{h\to 0+} h^{-1}(U(h)-id)\,{}_0\int^t U(\tau)xd\tau = \lim_{h\to 0+} h^{-1}({}_t\int^{t+h} - {}_0\int^h)U(\tau)xd\tau=$$
$$=U(t)x - x,$$ wegen der Stetigkeit des Integranden (Satz(1.2)).

Also folgt

$${}_0\int^t U(\tau)d\tau \in \mathrm{dom}(A) \text{ mit } -A\ {}_0\int^t U(\tau)xd\tau = U(t)x - x$$

(ii) Sei nun $x\in \mathrm{dom}(A)$ dann ist

$$\partial_+U(t)x:=\lim_{h\to 0+} h^{-1}(U(h)-id)U(t)x=U(t)\lim_{h\to 0+} h^{-1}(U(h)-id)x$$
$$= -U(t)Ax,\ t\geq 0$$

d.h es folgt $U(t)x\in \mathrm{dom}(A)$ und $AU(t)x=-\partial_+U(t)x=U(t)Ax$.

(1.6) Theorem.-

A: dom(A) $\subset E\to E$ ist abgeschlossen und dicht definiert.

Beweis.-

(i) Sei $x\in E$ beliebig, dann ist nach dem vorangehenden Theorem $x_t:= t^{-1}\ {}_0\int^t U(\tau)xd\tau \in \mathrm{dom}(A)$ und wegen der Stetigkeit des Integranden gilt $x_t\to x$ $(t\to 0+)$ in E. Das heisst aber ,dass dom(A) in E dicht liegt, und das war zu zeigen.

(ii) Seien nun $x_n \in \mathrm{dom}(A)$ und $x\in E$ mit $x_n\to x$ und $Ax_n\to y$ in E.

Wir müssen zeigen, dass $x\in \mathrm{dom}(A)$ und $Ax=y$ gilt.

Es gelten

$h^{-1}(U(h)x_n-x_n) \to h^{-1}(U(h)x-x)$ $(n\to\infty)$ und

$h^{-1}(U(h)x_n-x_n) \to -Ax_n$ $(h\to 0+)$ sowie

$-Ax_n\to y$, alle Konvergenzen sind natürlich in E.

Mit diesen Konvergenzen ist es nun leicht die Behauptung zu zeigen.

(1.7) Korollar.-

Für jedes $x\in E$ gilt

$$A\ {}_0\int^t U(\tau)xd\tau = {}_0\int^t AU(\tau)xd\tau,\ t\geq 0$$

und für jedes $x\in \mathrm{dom}(A)$

$$A\ {}_0\int^t U(\tau)xd\tau = {}_0\int^t U(\tau)Axd\tau,\ t\geq 0$$

Beweis.-
Das Korollar ist eine einfache Folgerung von Theorem(1.5) und der Abgeschlossenheit von A (Theorem(1.6)).

II. CHARAKTERISIERUNG VON GENERATOREN STARKSTETIGER HALBGRUPPEN

Wenn man nicht vergisst, dass wir eine Halbgreuppentheorie entwickeln möchten, die uns einen Zugang zur Behandlung Differentialgleichungen ermöglichen soll, dann müssen wir möglichst effizienten Kriterien zusammenstellen, die uns erlauben zu bestimmen, wann ein Operator $A: \mathrm{dom}(A) \subset E \to E$ eine C_0-Halbgruppe erzeugt. In unserer Anwendungen werden die Operatoren natürlich differentialoperatoren sein.
Wir werden also in diesem Abschnitt Bedingungen suchen, die sicherstellen, dass ein Operator A eine C_0-Halbgruppe erzeugt.

Wir geben jetzt, der Vollständigkeit halber, den allgemeinen Charakterisierungssatz von Generatoren C_0-Halbgruppen an; allerdings ohne Beweis, da sich mit dem in der Praxis nicht bequem umgehen lässt.

(2.1) Theorem.-(Hille-Yosida)
$-A: \mathrm{dom}(A) \subset E \to E$ ist genau dann der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe, wenn
(i) A ist abgeschlossen und dicht definiert.
(ii) es existieren $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit
$\lambda \in \rho(-A)$ für jedes $\lambda > \omega$ und
$\|(\lambda-\omega)^n(\lambda+A)^{-n}\| \leq M$ für jedes $\lambda > \omega$
Beweis.- Wir verweisen beispielsweise auf [Go],[Pa],[Yo].

Definition.-
$U=\{U(t): t \geq 0\}$ heisst C_0-Halbgruppe von Kontraktionen, oder C_0-Kontraktionshalbgruppe genau dann,wenn
(i) U ist C_0-Halbgruppe
(ii) $\|U(t)\| \leq 1$ für jedes $t \geq 0$

(2.2) Lemma.-
$A: \mathrm{dom}(A) \subset E \to E$ erfülle
(i) A ist abgeschlossen und dicht definiert.
(ii) $\mathbb{R}^+ \subset \rho(-A)$ und $\|(\lambda+A)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$ für jedes $\lambda > 0$.
Dann gilt für jedes $x \in E$
$\lambda(\lambda+A)^{-1} x \to x \quad (\lambda \to \infty)$

Beweis.- $x \in \mathrm{dom}(A)$
$\|(\lambda+A)^{-1} x - x\| = \|-(\lambda+A)^{-1}Ax\| \leq \lambda^{-1}\|Ax\| \to 0 \quad (\lambda \to \infty)$
Wenn jetzt x beliebig aus E ist, dann approximiert man das in E mit einer Folge in dom(A) und zeigt dass die Ungleichung auch für den Grenzwert gilt.

(2.3) Lemma.-
A sei wie in Lemma (2.2). dann gilt für die Yosida Approximation
$A_\lambda := A\lambda(\lambda+A)^{-1}$ und jedes $x \in \mathrm{dom}(A)$
$A_\lambda x \to Ax \quad (\lambda \to \infty)$
Beweis.- Das ist eine direkte Folgerung aus Lemma (2.2).

(2.4) Theorem.-(Hille-Yosida)
$A: \mathrm{dom}(A) \subset E \to E$ sei linear;
Dann ist -A genau dann der Generator einer C_0-Halbgruppe U von Kontraktionen, wenn
(i) A ist abgeschlossen und dicht definiert.
(ii) $\mathbb{R}^+ \subset \rho(-A)$ und $\|(\lambda+A)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$ für jedes $\lambda > 0$.
Beweis.-
"$\Rightarrow$" Nach Theorem(1.6) folgt,dass A abgeschlossen und dicht definiert ist. Definiere jetzt für $x \in E$
$R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)x\,dt$, dann gilt
$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|U(t)x\|dt \leq \|x\| \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt \leq \lambda^{-1}\|x\|$
Zu zeigen haben wir nun also, dass $R(\lambda)=(\lambda+A)^{-1}$ gilt. Sei $x \in E$, dann
$h^{-1}(U(h)-id)R(\lambda)x = h^{-1}\{\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t+h)x\,dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)x\,dt\} =$
$= h^{-1}\int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)}U(t)x\,dt - h^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)x\,dt = h^{-1}(e^{\lambda h}-1)\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)x\,dt$
$-h^{-1}e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t}U(t)x\,dt \to \lambda R(\lambda)x - x \quad (h \to 0+)$
Somit erhalten wir
$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$, d.h. $(\lambda+A)R(\lambda)x = x$ für jedes $x \in E$
Es bleibt also nur nachzuweisen, dass $AR(\lambda)|_{\mathrm{dom}(A)} = R(\lambda)A$.
Sei $x \in \mathrm{dom}(A)$, dann
$R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)Ax\,dt = A\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)x\,dt = AR(\lambda)x$, nach (1.6)
d.h. $R(\lambda)(\lambda+A) = id$ und damit $R(\lambda)=(\lambda+A)^{-1}$.

"$\Leftarrow$"
(α) Wir wissen aus Beispiel (1.3a), dass jedes $B \in \mathcal{L}(E)$ eine gleichmässig stetige Gruppe erzeugt, und zwar exp(-tB), also insbesondere auch die Yosida Approximation A_λ und

$\|\exp(-tA_\lambda)\| = \|\exp(-t\lambda\mathrm{id} + \lambda^2(\lambda+A)^{-1})\| \leq$
$\leq \|\exp(-t\lambda\mathrm{id})\|\, \|\exp(t\lambda^2(\lambda+A)^{-1})\| \leq \exp(-t\lambda)\exp(t\lambda)$
also ist $\exp(-tA_\lambda)$ eine Kontraktionsgruppe.

(β) $A_\lambda, A_\mu, \exp(-tA_\lambda)$ und $\exp(-tA_\mu)$ kommutieren
$\|\exp(-tA_\lambda) - \exp(-tA_\mu)\| = \|{}_0\int^1 \partial_s \exp(-tsA_\lambda)\exp(-t(1-s)A_\mu)x\,ds\| =$
$= \|{}_0\int^1 \exp(-tsA_\lambda)\exp(-t(1-s)A_\mu)t(-A_\lambda+A_\mu)x\,ds\| \leq t\|(-A_\lambda+A_\mu)x\|$

(γ) Wir zeigen jetzt, dass $(\exp(-tA_\lambda))_\lambda$ ein Cauchy-Netz in E ist.
$\|(\exp(-tA_\lambda) - \exp(-tA_\mu))x\| \leq t\|(-A_\lambda+A_\mu)x\| \to 0$ $(\lambda,\mu\to\infty)$ und zwar gleichmässig auf Kompakten Teilintervallen (bezüglich t). Mit einem Dichtheitsargument kriegt man das für beliebige $x \in E$ hin.
Somit existiert $\lim_{\lambda\to\infty}\exp(-tA_\lambda)x$ für alle $x\in E$ .Definieren wir also
$U(t)x := \lim_{\lambda\to\infty}\exp(-tA_\lambda)x$ für jedes $x\in E$, und das ist eine starkstetige Kontraktionshalbgruppe.

(δ) Zu zeigen bleibt noch, dass -A der Generator dieser Halbgruppe ist. Sei also A' der Generator von U und $x\in \mathrm{dom}(A)$:
$U(h)x - x = \lim_{\lambda\to\infty}(\exp(-hA_\lambda)x - x) = \lim_{\lambda\to\infty} -{}_0\int^h \exp(-tA_\lambda)A_\lambda x\,dt$
$= -{}_0\int^h U(t)Ax\,dt$
Das zeigt, dass $\mathrm{dom}(A) \subset \mathrm{dom}(A')$ und $A'x = Ax$, $x \in \mathrm{dom}(A)$.
Jetzt wissen wir, dass A' (i) und (ii) erfüllt, und daraus bekommen wir $1 \in \rho(-A')$ und damit $(\mathrm{id} + A')\mathrm{dom}(A) = (\mathrm{id} + A)\mathrm{dom}(A) = E$, d.h. $\mathrm{dom}(A') = (\mathrm{id} + A')^{-1}E = (\mathrm{id} + A)^{-1}E = \mathrm{dom}(A)$.

Definitionen.-
(a) A: dom(A) $\subset E \to E$ heisst akkretiv genau dann, wenn
$\|(\lambda+A)x\| \geq \lambda\|x\|$ für jedes $x\in\mathrm{dom}(A)$ und jedes $\lambda>0$.

(b) A: dom(A) $\subset E\to E$ heisst m-akkretiv genau dann, wenn A akkretiv ist und $R(\lambda+A)=E$ für ein $\lambda>0$.

(2.5) Bemerkungen.-
(a) In einem Hilbertraum (H,(.|.)) ist die Akkretivität dazu äquivalent, dass $\mathrm{Re}(Ax|x)\geq 0$ für jedes $x\in\mathrm{dom}(A)$ gilt.
(b) A ist genau dann m-akkretiv, wenn $R(\lambda+A)=E$ für alle $\lambda>0$.

Notation.-
$\mathfrak{G}(E,M,\omega) := \{A: \mathrm{dom}(A) \subset E\to E \mid -A$ erzeugt eine C_0-Halbgruppe U auf E mit $\|U(t)\| \leq M\exp(\omega t)$, $t\geq 0\}$

(2.6) Bemerkungen.-
(a) $\mathfrak{G}(E,\omega) := \cup\{\mathfrak{G}(E,M,\omega) \mid M\geq 1\}$
$\mathfrak{G}(E) = \cup\{\mathfrak{G}(E,\omega) \mid \omega\geq 0\}$
(b) -A erzeugt eine C_0-Kontraktionshalbgruppe genau dann, wenn $A\in\mathfrak{G}(E,1,0)$.

(2.7) Theorem.-
$A\in\mathfrak{G}(E,1,0)$ genau dann, wenn A dicht definiert und m-akkretiv ist.
Beweis.- Der Beweis kann man sich selber überlegen: der folgt ziemlich leicht aus dem Hille-Yosida. Es sei aber auch auf [Go],[Pa],[Yo] verwiesen.

Definition.-
Seien A: dom(A) $\subset E\to E$, $E' := \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$, $\mathbb{K} := \mathbb{R},\mathbb{C}$, $\langle x',x\rangle := x'(x)$ für $x\in E$ und $x'\in E'$ dann ist A': dom(A') $\subset E'\to E'$ folgendermassen erklärt:
$\mathrm{dom}(A') := \{x'\in E' \mid \langle x',A.\rangle \in E'$, d.h. es existiert ein $y'\in E'$ mit $\langle y',x\rangle = \langle x',Ax\rangle$ für jedes $x\in E\}$
$A'x' := y'$ für jedes $x\in\mathrm{dom}(A')$
A' heisst dann der duale Operator zu A.

(2.8) Bemerkungen.-
(a) Im allgemeinen ist A' keine einwertige Abbildung, aber das ist es doch wenn A dich definiert ist, wie in unserem Fall.
(b) Ist $A\in\mathcal{L}(E)$ dann ist $A'\in\mathcal{L}(E)$.

(2.9) Korollar.-
$A\in\mathfrak{G}(E,1,0)$ genau dann, wenn A und A' m-akkretiv sind.

(2.10) Satz.-
Sei (H,(.|.)) ein Hilbertraum und für A:dom(A) $\subset H\to H$ gelte $A=A^*$ (dabei ist A^* der zu A 'duale' Operator bezüglich des Skalarprodukts (.|.), also der zu A adjungierte Operator) und $A\geq\alpha$ (d.h. $\mathrm{Re}(Ax|x)\geq\alpha\|x\|^2$ für jedes $x\in\mathrm{dom}(A)$).
Dann ist $A\in\mathfrak{G}(H,1,0)$ und es gilt $U(t)=U(t)^*$, für die von -A erzeugte C_0-Halbgruppe U auf H.
Beweis.- (2.9), (2.5a) und Yosida-Approximation.

Definitionen.-

(a) $U \in \mathcal{L}(H)$ heisst unitär, falls $U^*U=UU^*=id$ gilt.

(b) $A:dom(A) \subset H \to H$ heisst symmetrisch, falls $A \subset A^*$, d.h. falls der zu A adjungierte Operator A^* eine Erweiterung von A ist.

(2.11) Bemerkung.-('Selbstadjungiertheitskriterium')
A ist selbstadjungiert, d.h. $A=A^*$, genau dann, wenn A symmetrisch ist und i,-i in der Resolvente von A liegen.

(2.12) Satz.-('Stone')
Sei H ein complexer Hilbertraum. Dann erzeugt -A genau dann eine C_0-Gruppe U unitärer Operatoren auf H, wenn $-A=A^*$, oder äquivalent dazu, wenn $(iA)=(iA)^*$ gilt.

Beweis.-

"⇒" Sei $\{U(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ die von -A erzeugte C_0-Gruppe und seien $x,y \in dom(A)$, dann

$$(t^{-1}(U(t)-id)x \mid y) \to (-Ax|y) \qquad (t \to 0+)$$
$$=(x \mid [t^{-1}(U(t)-id)]^*y)=(x \mid t^{-1}(U(-t)-id)y)=$$
$$=(x \mid U(-t)t^{-1}(id-U(t))y) \to (x|Ay) \qquad (t \to 0+)$$

Daraus folgt sofort $-A=A^*$ auf dom(A), d.h. $(iA) \subset (iA)^*$.

Auf der anderen Seite sind $A,-A \in \mathcal{G}(E,1,0)$ und der Satz von Hille-Yosida besagt dann $(0,\infty) \subset \rho(-A)$ und $(0,\infty) \subset \rho(A)$, und daraus folgert man sofort $i\mathbb{R}-\{0\} \subset \rho(iA)$, was mit (2.11) die Behauptung impliziert.

"⇐" $(iAx|x)=(x|iAx)=j(iAx|x)$ $[z=x+iy \in \mathbb{C},\ j(z)=j(x+iy)=x-iy]$
Daraus folgt $(iAx|x) \in \mathbb{R}$ und somit $Re(-Ax|x)=Re(Ax|x)=0$.

Nach (2.10) sind dann $A,-A \in \mathcal{G}(H,1,0)$ und nun schliessen wir die Behauptung daraus.Dabei nutzen wir folgenden **Satz** aus:

$A,-A \in \mathcal{G}(H,1,0)$ genau dann, wenn -A eine C_0-Gruppe unitärer Operatoren erzeugt.

(2.13) Beispiele.-

(a) (Vgl.1.3b)
$A=-\partial/\partial_a$ ist der infinitesimale Operator von U mit
$dom(A)=\{u \in E \mid \partial u/\partial_a=(gradu|a) \in E\}$

Ist n=1 dann gilt
$dom(A)= BUC^1$, falls E= BUC und
$dom(A)= C_0{}^1$, falls $E= C_0$

(b) (Vgl.1.3c)
$Au=(f|gradu)$ und $C_c{}^1:=\{u \in C^1 \mid supp(u) \subset\subset \mathbb{R}^n\} \subset dom(A)$
$supp(u):=cl\{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) \neq 0\}$

(c) (Vgl.1.3d)
$A=\Delta$, der Laplace Operator
$dom(A)= BUC^2$, falls E= BUC und
$dom(A)= C_0{}^2$, falls $E= C_0$

Literatur.-

[Go]: J.A.Goldstein, 'Semigroups of linear operators and applications', Oxford University Press, New York, 1985

[Pa]: A.Pazy, 'Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations', Springer, 1983

[Yo]: Yosida, 'Functional analysis', Springer, 1965