

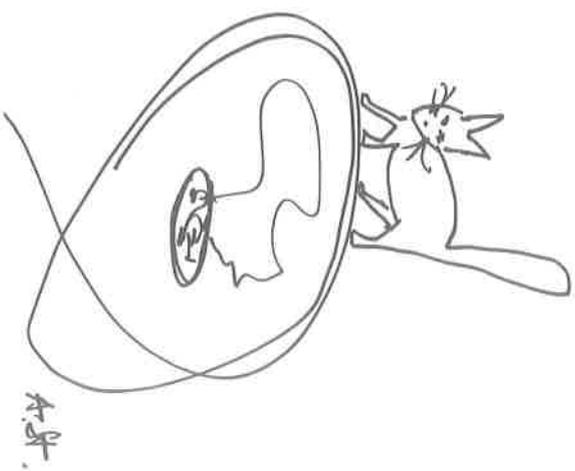
Autolimitazione quale naturale principio di convivenza

di Antonio Steiner e Martin Gander

La trilogia che qui presentiamo, per i metodi usati, ha tutto in comune con un nostro lavoro apparso nel precedente numero di questa rivista [1]. Per il caso di due popolazioni, legate fra loro da termini di accoppiamento logaritmici, si era riconosciuto che sia i sistemi preda-predatore, sia quelli di tipo competitivo, sia i cicli non più vincolati da alcuna condizione ambientale – mai considerati finora – tendono ad un punto di equilibrio stabile, che assicura anche a lunga scadenza la convivenza delle popolazioni, dopo l'aggiunta di un'autolimitazione il cui tasso superi un certo valore da noi indicato. Non appena però si introduce una semplice periodicità, anche in uno solo dei coefficienti di crescita intrinseca – comportamento questo che ci sembra molto naturale – allora si osserva in tutti i nostri sistemi l'insorgere di affascinanti cicli-limite. Il presente lavoro è dedicato soprattutto allo studio del loro influsso sul comportamento delle popolazioni. I calcoli che portano a soluzioni esplicite dei sistemi dinamici presi in considerazione sono tediosi ma forniscono formule finali di estrema semplicità e trasparenza.

I cicli-limite ci ricordano vivamente, come illustrato nella figura, i passi di un gatto, il quale, allettato e nel contempo respinto da un piatto di polenta e merluzzo troppo caldo, gli gira continuamente attorno.

Questi cicli-limite presentano inoltre una notevole stabilità strutturale rispetto ai cambiamenti, anche di segno, dei parametri del modello.



1. Sistemi preda-predatore con autolimitazione e crescita periodica della preda.

1.1 Presentazione del modello.

Già in un precedente articolo [2] fu esposto come l'introduzione di termini d'accoppiamento logaritmici in luogo di quelli classici renda facilmente risolvibili i corrispondenti sistemi preda-predatore. Mantenremo questo vantaggio considerando però in modo assai più generale equazioni del tipo

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 - k x_1 \ln x_1 - x_1 \ln x_2; & x_1^0 > 0 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + x_2 \ln x_1; & ; x_2^0 > 0 \end{cases}$$

nelle quali per i coefficienti di crescita si pone

$$(2) \quad a_1 = \alpha + \beta \cos t, \quad a_2 = \gamma$$

con costanti α, β, γ di segno arbitrario. Il tasso di autolimitazione k è supposto maggiore di un certo valore indipendente da α, β, γ che fisseremo in modo adeguato.

Attraverso la sostituzione

$$(3) \quad y_i = \ln x_i, \quad i=1,2$$

le equazioni (1) sono ricondotte al sistema lineare non autonomo

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = -k y_1 - y_2 + a_1; & y_1^0 \\ \dot{y}_2 = y_1 + a_2; & y_2^0 \end{cases}$$

Per ottenere una soluzione stabile sarà essenziale far sì che i valori propri del sistema omogeneo associato risultino *ambidue negativi*. Essi sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$(5) \quad \omega^2 + k\omega + 1 = 0$$

e sono dati da

$$(5) \quad \omega_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$

Basterà quindi supporre il tasso di autolimitazione k maggiore di 2 per garantire la positività dei valori propri

$$(6) \quad k > 2 \Rightarrow \omega_{1,2} < 0$$

1.2 I calcoli

Per risolvere il sistema (4) si parte dalla soluzione generale del sistema omogeneo

$$(7) \quad \begin{cases} y_1 = C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_2 t} \\ y_2 = \omega_2 C_1 e^{\omega_1 t} + \omega_2 C_2 e^{\omega_2 t} \end{cases}$$

dove si è tenuto conto di $\omega_1 + \omega_2 = k$. La variazione delle costanti C_i ci conduce al sistema

$$\begin{cases} \dot{C}_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_2 t} = a_1 \\ \omega_2 \dot{C}_1 e^{\omega_1 t} + \omega_1 \dot{C}_2 e^{\omega_2 t} = a_2 \end{cases}$$

dal quale, tenuto conto della (2) si ricava

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = \frac{\alpha\omega_1 - \gamma}{\omega_1 - \omega_2} \cdot e^{-\omega_1 t} + \frac{\beta\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} \cdot \cos t \cdot e^{-\omega_1 t} \\ \dot{C}_2 = \frac{-\alpha\omega_1 + \gamma}{\omega_1 - \omega_2} \cdot e^{-\omega_2 t} - \frac{\beta\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \cdot \cos t \cdot e^{-\omega_2 t} \end{cases}$$

Un'integrazione rispetto al tempo ci fornisce le funzioni $C_i(t)$, che, inserite in (7), ci danno la soluzione generale di (4) dipendente da due costanti di integrazione K_i . Raggruppando i termini, facendo opportuno uso delle formule di Viete $\omega_1 + \omega_2 = -k, \omega_1 \cdot \omega_2 = 1$ e della relazione derivante da (5) e (5') $(1 + \omega_1^2)(1 + \omega_2^2) = k^2$, dopo calcoli in sé semplici, le espressioni vanno semplificandosi confermando a posteriori la buona scelta dell'esempio! Si ottiene

$$(8) \quad \begin{cases} y_1 = -\gamma + \frac{\beta}{k} \cos t + K_1 e^{\omega_1 t} + K_2 e^{\omega_2 t} \\ y_2 = \alpha + k\gamma + \frac{\beta}{k} \sin t + \omega_2 K_1 e^{\omega_1 t} + \omega_1 K_2 e^{\omega_2 t} \end{cases}$$

dove le costanti di integrazione K_i dipendono dai valori iniziali $y_i^0 = \ln x_i^0$ nel modo seguente

$$(8') \quad \begin{cases} K_1 = -\frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} \left(\frac{\beta}{k} - \gamma - y_1^0 \right) + \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} (\alpha + k\gamma - y_2^0) \\ K_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \left(\frac{\beta}{k} - \gamma - y_1^0 \right) - \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} (\alpha + k\gamma - y_2^0) \end{cases}$$

1.3 Discussione della soluzione

Uno sguardo alle espressioni (8) mostra che, grazie alla (6), gli ultimi due termini tendono a zero per $t \rightarrow +\infty$. Se β fosse zero, la traiettoria uscente dal punto $S = (y_1^0, y_2^0)$ nel piano di fase delle y convergerebbe al punto di equilibrio $G = (-\gamma, \alpha + k\gamma)$. Con $\beta \neq 0$ la traiettoria si avvicina invece ad un ciclo limite che, nell'esempio considerato è una circonferenza con centro G e raggio $r = |\beta|/k$.

Nella figura 1 abbiamo rappresentato l'andamento della traiettoria nel piano di fase delle y per un esempio standard corrispondente alla seguente scelta dei parametri

$$(9) \quad k = 2.5, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 0/1, \quad \gamma = -1, \quad y_1^0 = y_2^0 = 0.$$

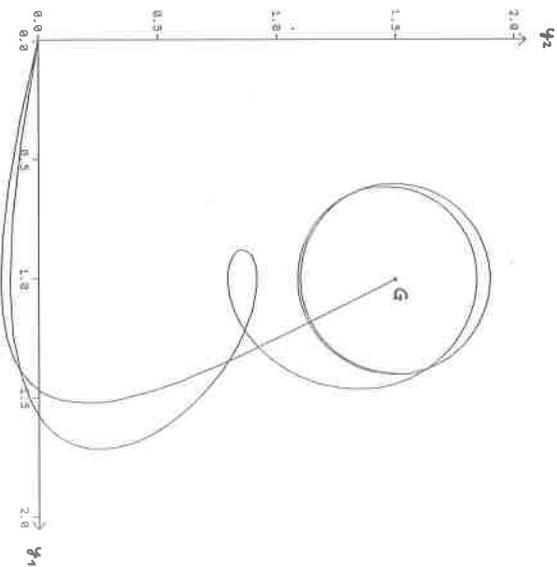


Fig. 1

Facendo uso della (3) siamo poi risaliti allo spazio degli $x_i > 0$, le popolazioni reali. La figura 2 rappresenta la loro evoluzione.

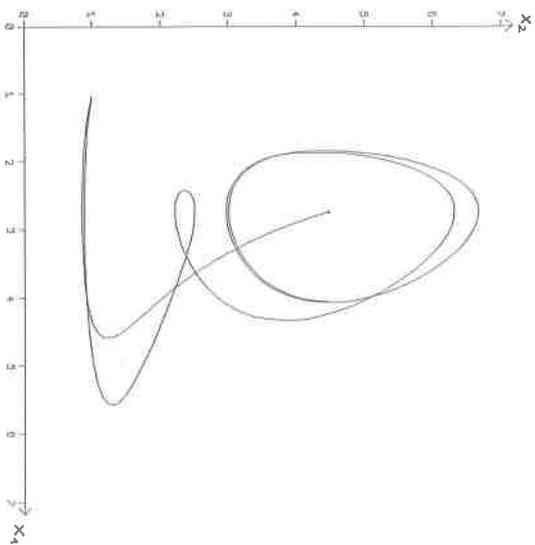


Fig. 2

1.3.1 Variazione del punto di partenza S

Mantenendo i valori dei parametri come in (9), ad eccezione dei valori iniziali (y_1^0, y_2^0) che vengono distribuiti attorno a $G(1, 1.5)$, otteniamo, per i due casi $\beta = 0$ e $\beta = 1$, nel piano di fase delle y , le traiettorie raffigurate nelle figure 3 e 4.

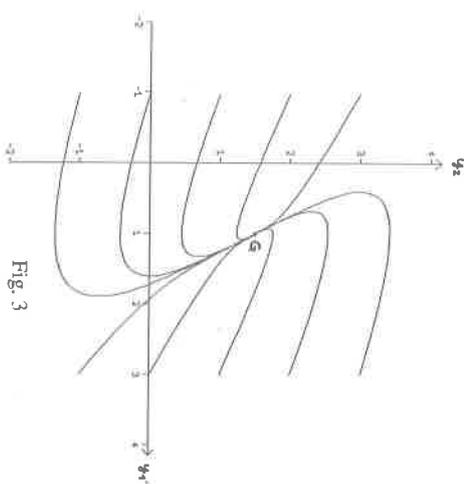


Fig. 3

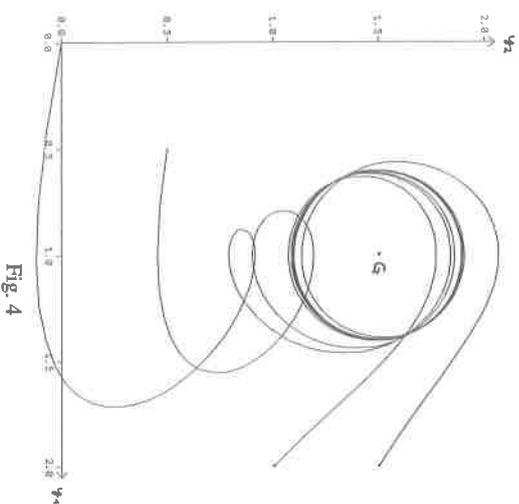


Fig. 4

1.3.1.1 Altri punti di partenza

Della Figura 5 ci limitiamo a segnalare tre casi interessanti: il primo, con $S = (1.4, 1.5)$, che per la (8') è l'unico per il quale $K_1 = K_2 = 0$, ossia dove il sistema gira per sempre sul ciclo-limite. Ciò non accade invece per il punto $S = (1, 1.9)$ che pure si trova su questo. Infine il centro $S = G = (1, 1.5)$ quale punto iniziale non presenta speciali caratteristiche.

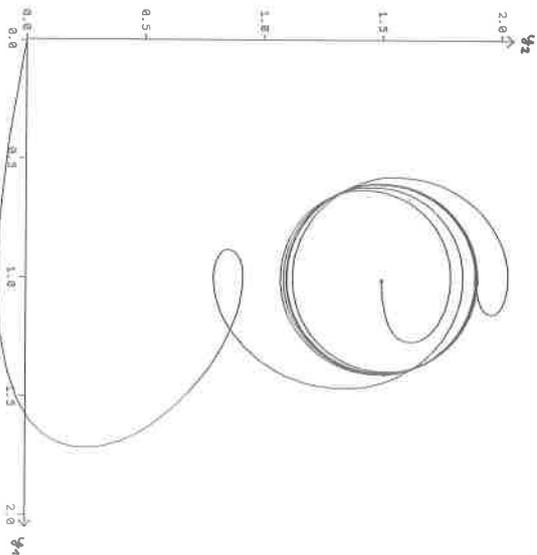


Fig. 5

1.3.2 Variazione dei parametri β e γ

Nella Figura 6, accanto alla traiettoria-standard corrispondente ai parametri scelti in (9) abbiamo inserito quella che risulta dalla sostituzione di $\beta = 1$ con $\beta = -1$.

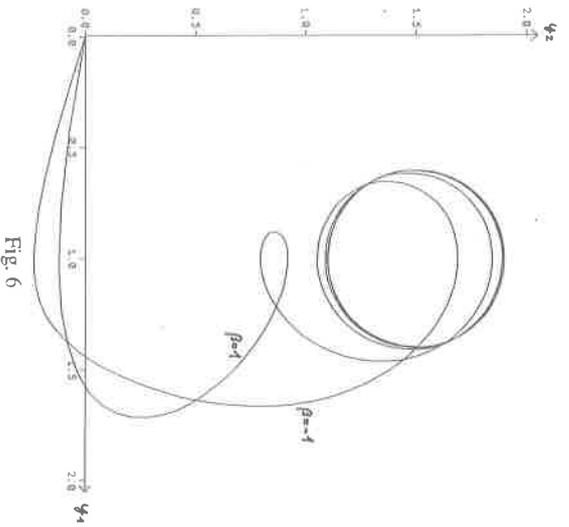


Fig. 6

La Figura 7 presenta invece la traiettoria-standard accanto a quelle ottenute ponendo $\gamma = 0$ e $\gamma = 1$.

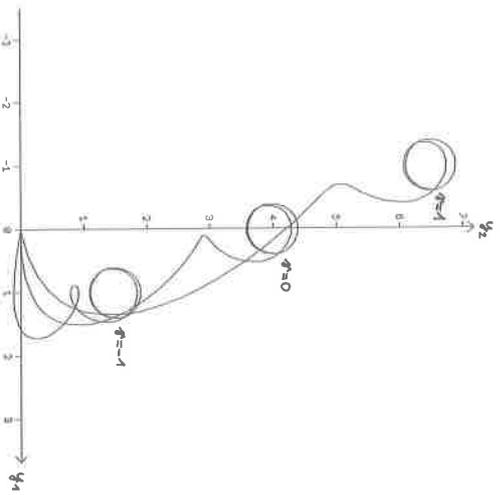


Fig. 7

1.3.3 Approcio lento o veloce ad uno stesso ciclo-limite

Nelle Figure 8a e 8b, accanto alla traiettoria-standard che serve da comodo riferimento, appaiono segnate le traiettorie determinate da

(a) $k = 10$, $\alpha = 11.5$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $y_1^0 = y_2^0 = 0$

rispettivamente da

(b) $k = 2.5$, $\alpha = 4$, $\beta = 0.25$, $\gamma = -1$, $y_1^0 = y_2^0 = 0$.

Esse convergono allo stesso ciclo-limite, la circonferenza con centro $G = (1, 1.5)$ e raggio $r = 0.1$, tuttavia con velocità ben differenti! La lentezza nel caso (a) si spiega con il fatto che il valore proprio $\omega_1 = -0.1$ è più prossimo a zero che nel caso (b) quando $\omega_1 = -0.5$.

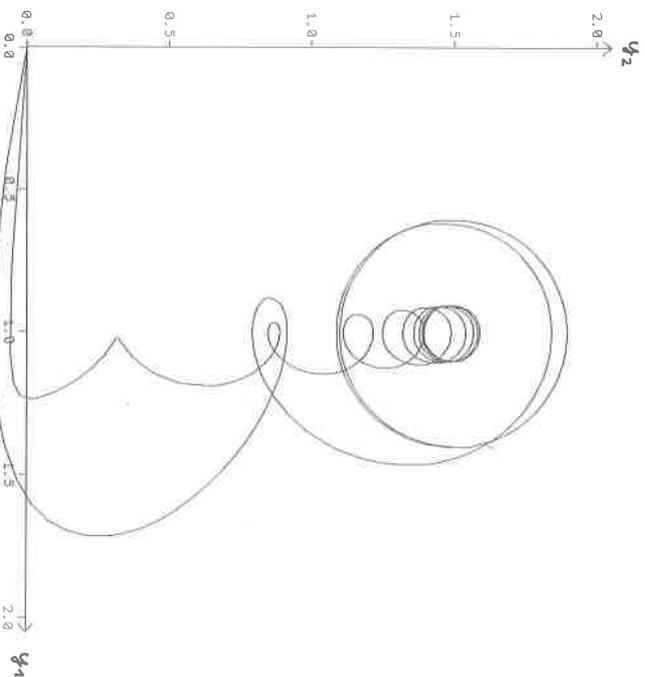


Fig. 8a

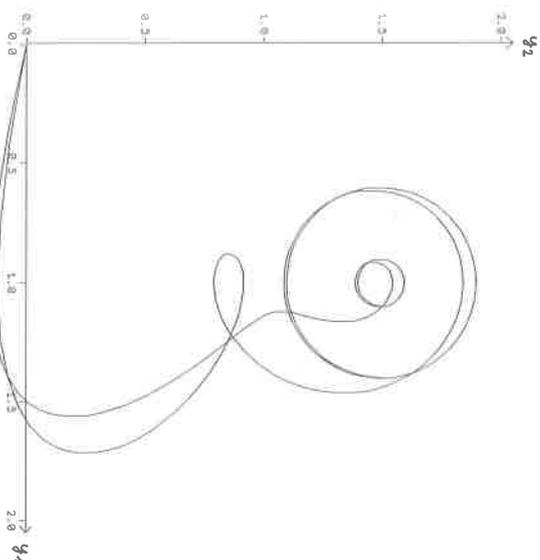


Fig. 8b

Passiamo ora alla discussione di un secondo modello.

2. Sistemi competitivi con autolimitazione delle popolazioni

2.1 Il modello

Esso è dato dalle equazioni

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot [a_1 - \gamma_1 (h_1 \ln x_1 + h_2 \ln x_2) - k \ln x_1] & ; \quad x_1^0 > 0 \\ \dot{x}_2 = x_2 \cdot [a_2 - \gamma_2 (h_1 \ln x_1 + h_2 \ln x_2) - k \ln x_2] & ; \quad x_2^0 > 0 \end{cases}$$

nelle quali poniamo, con scelta casuale

$$(10') \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 2, \quad h_1 = 0.2, \quad h_2 = 0.4$$

mentre per i tassi di crescita poniamo ancora

$$(2) \quad a_1 = \alpha + \beta \cos t, \quad a_2 = \gamma.$$

La trasformazione (3) riconduce (10), (10') al sistema lineare, in generale non autonomo

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = -(0.2 + k)y_1 - 0.4y_2 + a_1 & ; \quad y_1^0 \\ \dot{y}_2 = -0.4y_1 - (0.8 + k)y_2 + a_2 & ; \quad y_2^0 \end{cases}$$

La cui soluzione dipende essenzialmente dai valori propri del sistema omogeneo, ossia dalle soluzioni della sua equazione caratteristica

$$\omega^2 + (2k + 1)\omega + k(k + 1) = 0$$

che sono

$$\omega_1 = -k, \quad \omega_2 = -(k + 1)$$

Basta quindi un pur piccolo tasso

$$(12) \quad k > 0$$

di autolimitazione comune alle due popolazioni in (10) per rendere *ambidue* i valori propri negativi, assicurando la stabilità delle soluzioni, che nel piano di fase delle y convergono ad un punto di equilibrio G quando $\beta = 0$, ad un ciclo-limite altrimenti. Quest'ultimo è un'ellisse obliqua con centro G , come mostrato dalla Figura 9 per il caso

$$(13) \quad k = 0.5, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 0/1.5, \quad \gamma = 3, \quad y_1^0 = y_2^0 = 0.$$

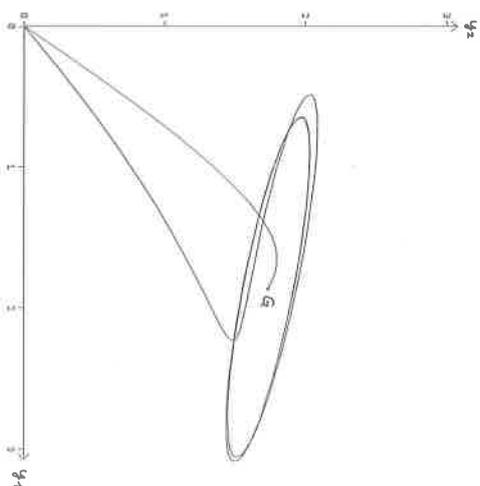


Fig. 9

Ripassando poi, tramite la (3), allo spazio delle x si ottiene la Figura (10)

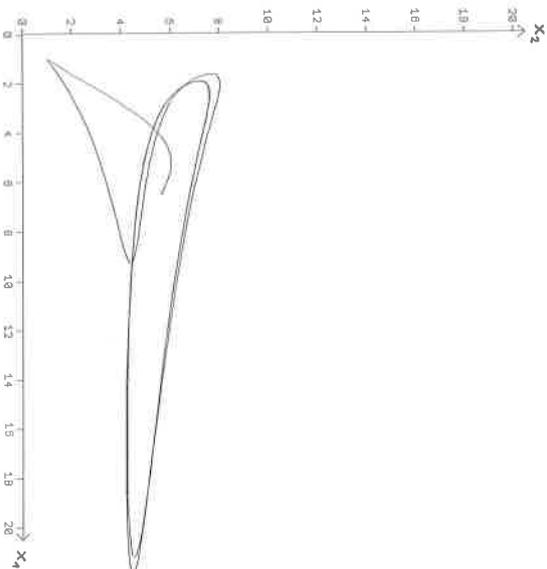


Fig. 10

Portiamo a termine questa trilogia considerando l'ultima parte.

3. Cicli non vincolati da condizione ambientale, con autolimitazione delle due popolazioni

3.1 Il modello

Leghiamo le due popolazioni x_i che nella loro crescita si danno mutuo supporto catalitico con tassi

$$(14) \quad b_i > 0$$

Supponiamo inoltre che entrambe le popolazioni si autolimitano con un tasso comune k . Le equazioni sono

$$(15) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_1 x_1 \ln x_2 - k x_1 \ln x_1 & ; \quad x_1^0 > 0 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + b_2 x_2 \ln x_1 - k x_2 \ln x_2 & ; \quad x_2^0 > 0 \end{cases}$$

I coefficienti di crescita intrinseca son di nuovo dati dalla (2)

$$(2) \quad a_1 = \alpha + \beta \cos t, \quad a_2 = \gamma.$$

La solita trasformazione (3) porta al sistema

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = -k y_1 + b_1 y_2 + a_1 & ; \quad y_1^0 \\ \dot{y}_2 = b_2 y_1 - k y_2 + a_2 & ; \quad y_2^0 \end{cases}$$

i cui valori propri sono negativi quando k è maggiore della media geometrica dei b_i :

$$(17) \quad k > \sqrt{b_1 b_2} \Rightarrow \omega_{1,2} = -k \pm \sqrt{b_1 b_2} < 0$$

Per i valori

$$(18) \quad b_1 = 2, \quad b_2 = 4.5, \quad k = 3.5, \quad \alpha = 0.25, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0.5, \quad y_1^0 = y_2^0 = 0$$

si ottengono delle soluzioni esplicite di (15), (16) con le traiettorie che appaiono nelle Figure 11 e 12.

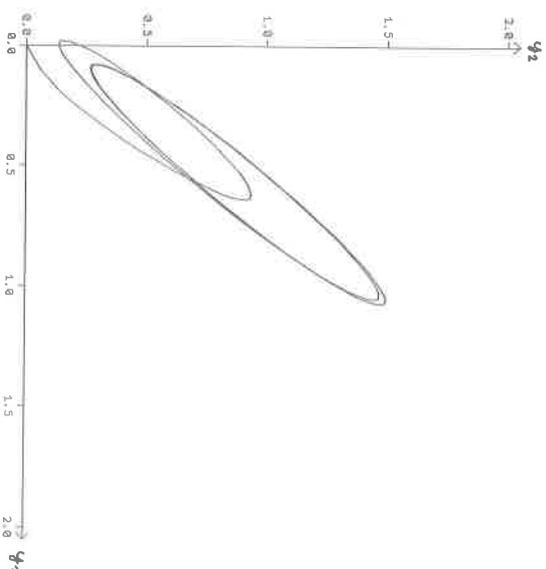


Fig. 11

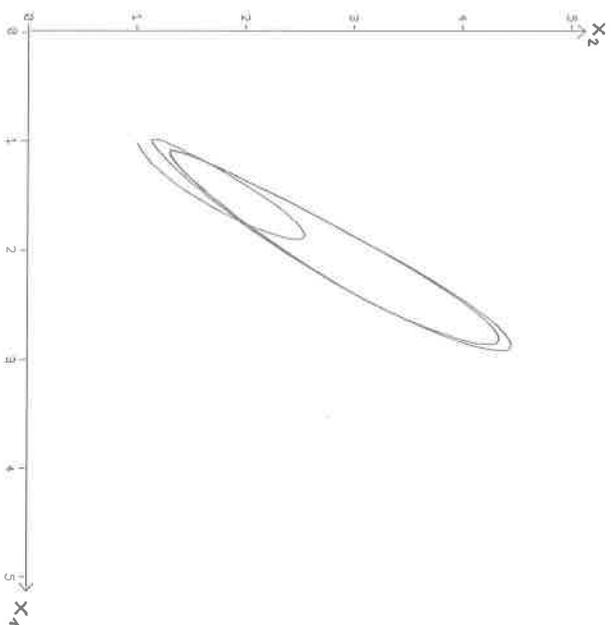


Fig. 12

Bibliografia

- [1] A. Steiner, M. Gander, *Perché il mondo non perirà*
Il Volterrano n.ro 2, Mendisio 1992
- [2] A. Steiner, *Sistemi preda-predatore con termini d'accoppiamento
logaritmici* Bollettino dei docenti di matematica n.ro 22,
Bellinzona 1991

Antonio Steiner, Salden 11, CH-4500 Solothurn

Martin Gander, Schachenstr. 43c, CH-4562 Biberist