Nella dimostrazione del Lemma 7.1 ho erroneamente stimato il modulo dell'esponenziale di un numero complesso dal basso usando l'esponenziale del modulo. Ovviamente l'identità corretta è $|e^w| = e^{\operatorname{Re} w}$. La svista non inficia l'idea base della dimostrazione: qui di seguito riporto le opportune modifiche, in rosso, alla dimostrazione del Lemma. L'errore mi è stato segnalato da Michela Dettori, a cui vanno i miei ringraziamenti.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che un tale intervallo e un tale polinomio esistano. In particolare, possiamo supporre che tale polinomio sia monico. Avremo allora

$$P(X) = X^n + \sum_{j=0}^{n-1} f_j X^j$$

dove ciascun f_j è una funzione razionale. Sia ora F l'insieme finito di punti sul piano complesso su cui almeno una delle funzioni $f_{m-1}, \dots, f_0, g$ non è definita. Un semplice argomento di continuazione analitica (si veda ad esempio [**?**]) mostra che, se

$$P(f(t)) = e^{ng(t)} + \sum_{j=0}^{n-1} f_j(t) e^{jg(t)} = 0 \qquad \forall t \in I$$

allora

$$P(f(z)) = e^{ng(z)} + \sum_{j=0}^{n-1} f_j(z) e^{jg(z)} = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus F\,.$$

Se la funzione razionale g non è un polinomio e ζ è uno zero del denominatore, allora per opportune costanti $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $C \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avremo

$$\left| g(z) - \frac{\alpha}{(z-\zeta)^N} \right| \leq \frac{C}{|z-\zeta|^{N-1}}$$

per ogni z in intorno U di ζ (eccetto $z = \zeta$). Scriviamo $\alpha = 2ce^{i\phi}$ con $2c = |\alpha| > 0$ e consideriamo un punto $z = \zeta + \varepsilon e^{i\phi/N}$, dove $\varepsilon > 0$ è piccolo. Avremo allora

$$|\operatorname{Re} g(z) - 2c\varepsilon^{-N}| = |\operatorname{Re}\,(g(z) - 2c\varepsilon^{-N})| \leq |g(z) - 2c\varepsilon^{-N}| \leq C\varepsilon^{-(N-1)}$$

da cui concludiamo

$$\operatorname{Re} g(z) \geq 2c\varepsilon^{-N} - |g(z) - 2c\varepsilon^{-N}| \geq 2c\varepsilon^{-N} - C\varepsilon^{-(N-1)}\,.$$

In particolare per ε sufficientemente piccolo concludiamo

$$\operatorname{Re} g(z) \geq c\varepsilon^{-N} \geq \frac{c}{\varepsilon} = \frac{c}{|z-\zeta|}.$$

Quindi esiste una successione $z_k \to \zeta$ con la proprietà che

$$\operatorname{Re} g(z_k) \geq \frac{c}{|z_k - \zeta|}\,. \tag{7.1}$$

D'altra parte, per una costante $C > 0$ e un intero $N \in \mathbb{N}$ opportuni, in un intorno V di ζ possiamo anche stimare

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} f_j(z)e^{jg(z)}\right| \leq C\left(e^{(n-1)\mathrm{Re}\, g(z)} + 1\right)|z-\zeta|^{-N} \qquad \forall z \in V \setminus \{\zeta\}\,.$$

Ne concludiamo

$$|P(f(z))| \geq e^{n\mathrm{Re}\, g(z)} - C\left(e^{(n-1)\mathrm{Re}\, g(z)} + 1\right)|z-\zeta|^{-N} \qquad \forall z \in V \setminus \{\zeta\}\,. \tag{7.2}$$

D'altra parte, da (7.1) e dalle proprietà di crescita dell'esponenziale, segue che

$$\lim_{k\to\infty} |P(f(z_k))| = \infty\,,$$

in contraddizione col fatto che $P(f)$ dovrebbe essere identicamente nulla in ogni intorno di ζ.

Pertanto abbiamo escluso che e^g possa essere algebrica su $\mathbb{C}(x)$ quando g non è un polinomio. D'altra parte, con un ragionamento del tutto analogo si vede che, se g è un polinomio non costante, allora

$$\limsup_{|z|\to\infty} |P(f(z))| = \infty\,.$$