

Introduction à la cosmologie (homogène)

Martin Kunz
Université de Genève

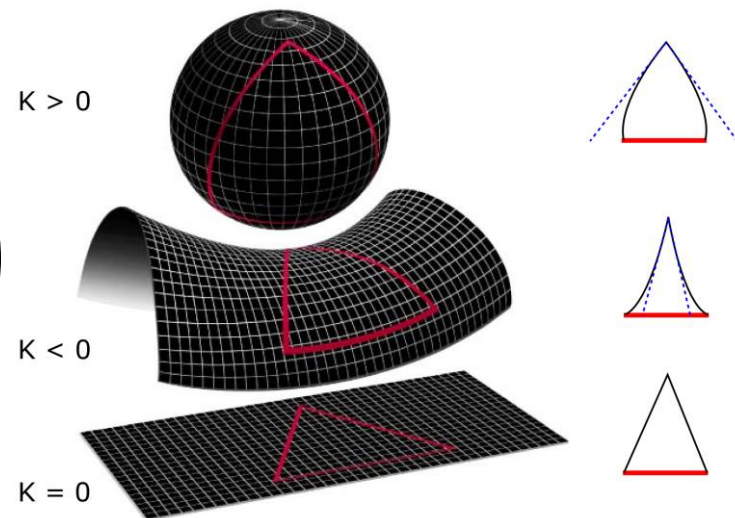
Contenu

- Structure métrique
 - la métrique
 - l'expansion de l'univers, le redshift et la loi de Hubble
 - distances cosmologiques, l'âge de l'univers
- Contenu et évolution de l'univers
 - Les équations d'Einstein et de conservation
 - la densité critique et les Ω
 - l'évolution de l'univers
- Résultats observationnels et sommaire

La métrique

- **principe cosmologique**: tout les points dans l'univers sont équivalents
- ceci implique que l'univers est homogène et isotrope
- au moins en ce qui concerne l'espace
- géométrie différentielle: espace à courbure constante $K(t)$

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{dR^2}{1 - KR^2} + R^2 d\Omega \right)$$



Le facteur d'échelle

- En effet, la condition que le sous-espace ait une symétrie maximale est encore plus forte: si nous mettons $R(t) = a(t) r$, alors

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega \right)$$

ou $\kappa = \pm 1$ ou 0 est une constante

- Pour cette métrique les courbes $(r, \theta, \phi) = \text{const}$ sont des géodesiques pour quadri-vitesse $u = (1, 0, 0, 0)$ parce que $\Gamma^\mu_{00} = 0$.

(éq. géodésique: $\ddot{X}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta = 0$)

redshift cosmologique

regardons deux galaxies avec une distance comobile d fixe, alors pour lumière se propageant entre les deux ($ds^2=0$):

$$d = \int_{t_1}^{t_0} dt/a(t) = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} dt/a(t),$$

si δt_1 est par exemple la période d'oscillation de la lumière à la galaxie d'émission, ceci nécessite une période δt_0

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)} \Rightarrow \frac{\delta t_1}{\delta t_0} = \frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$$

et on trouve donc un décalage spectral:

$$z \equiv (\lambda_0 - \lambda_1)/\lambda_1 \Rightarrow 1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}$$

La loi de Hubble

deux galaxies à une distance comobile fixe r_0 :

distance physique $x(t) = a(t)r_0$

-> vitesse apparente

$$\frac{dx}{dt} = \dot{a}r_0 = \frac{\dot{a}}{a}x \equiv H_0x$$

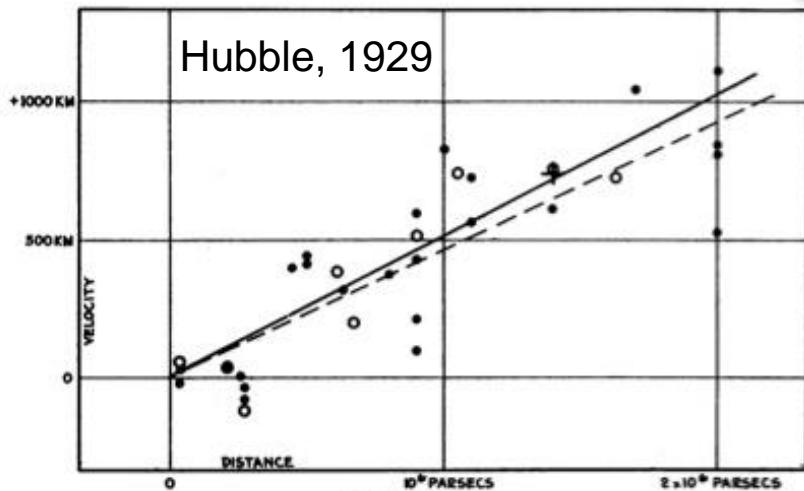


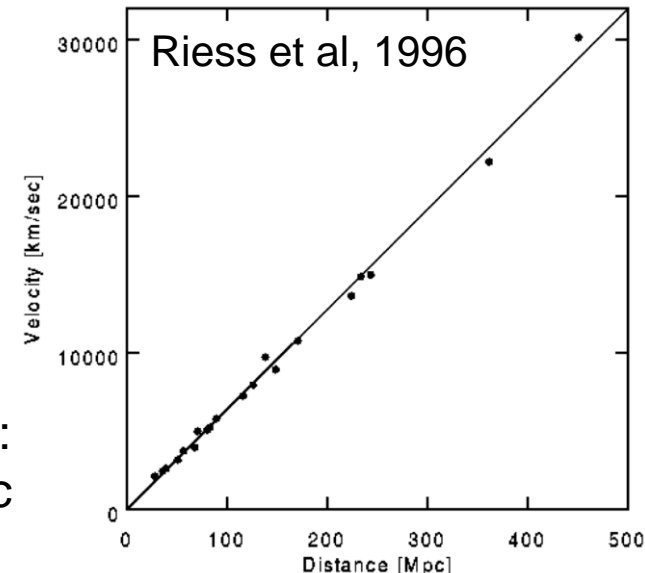
FIGURE 1

Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae.

Radial velocities, corrected for solar motion, are plotted against distances estimated from involved stars and mean luminosities of nebulae in a cluster. The black discs and full line represent the solution for solar motion using the nebulae individually; the circles and broken line represent the solution combining the nebulae into groups; the cross represents the mean velocity corresponding to the mean distance of 22 nebulae whose distances could not be estimated individually.

Utilisant les 42 nébuleuses figurant dans les listes de Hubble et de Strömberg (¹), et tenant compte de la vitesse propre du soleil (300 Km. dans la direction $\alpha = 315^\circ$, $\delta = 62^\circ$), on trouve une distance moyenne de 0,95 millions de parsecs et une vitesse radiale de 600 Km./sec, soit 625 Km./sec à 10^6 parsecs (²).

Lemaître, 1927 (!)



valeur moderne:
 72 ± 8 km/s/Mpc

distances cosmologiques

plus simple de changer la variable r pour

$$r = S_{\kappa}(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & \kappa = +1 \\ \chi & \kappa = 0 \\ \sinh \chi & \kappa = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ds^2 = dt^2 - a^2(t) (d\chi^2 + S_{\kappa}(\chi)^2 d\Omega)$$

$$\Rightarrow dV = a_0^2 S_{\kappa}(\chi)^2 d\Omega d\chi \text{ élément de volume aujourd'hui}$$

on peut *définir* une distance «métrique»:

$$d_m(\chi) = a_0 S_{\kappa}(\chi) \quad \chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{a_1}^{a_0} \frac{da}{a\dot{a}} = \frac{1}{a_0} \int_0^{z_1} \frac{dz}{H(z)}$$

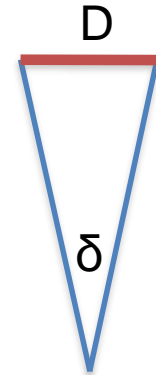
distances cosmologiques

mais il faut trouver qqc de mesurable!!

1) distance angulaire: objet de taille physique connue D observé sous un angle δ , mais les photons on été émis au temps t_1 :

$$D = a(t_1)S_\kappa(\chi)\delta = \frac{a(t_1)}{a_0}a_0S_\kappa(\chi)\delta \equiv d_A\delta$$

$$d_A = \frac{1}{1+z}d_m$$



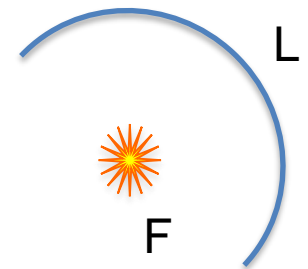
1) distance de luminosité: flux F observé pour objet avec luminosité intrinsèque L connue

$$F \equiv \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad \text{surface: } 4\pi d_m^2$$

source qui émet un photon par seconde:

- 1) décalage spectral
- 2) décalage de taux

$$d_L = (1+z)d_m$$



âge de l'univers

il est facile de calculer l'âge de l'univers:

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^{a_0} \frac{da}{\dot{a}} = \int_0^{a_0} \frac{da}{aH(a)} = \int_0^{\infty} \frac{dz}{H(z)(1+z)}$$

pour donner une valeur numérique, il est nécessaire de savoir l'évolution de $a(t)$. Ceci dépend de ce qu'il y a dans l'univers...

qu'est-ce qu'il y a dans l'univers?

- univers isotrope et homogène: matière doit aussi être distribué de manière isotrope et homogène
- dans un système de coordonnées le tenseur énergie impulsion est de la forme

$$T_0^i = 0, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$$

et les composantes ne dépendent que du temps,

$$T_{\mu}^{\nu} = \text{diag} (\rho(t), -p(t), -p(t), -p(t))$$

- La nature de fluide cosmique est donné par la pression $p = w \rho$:
 - $w = 0$: poussière sans pression
 - $w = 1/3$: radiation
 - quel est w pour $T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$?

eq. de conservation

- identité de Bianchi:

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0 = G_{;\mu}^{\mu\nu}$$

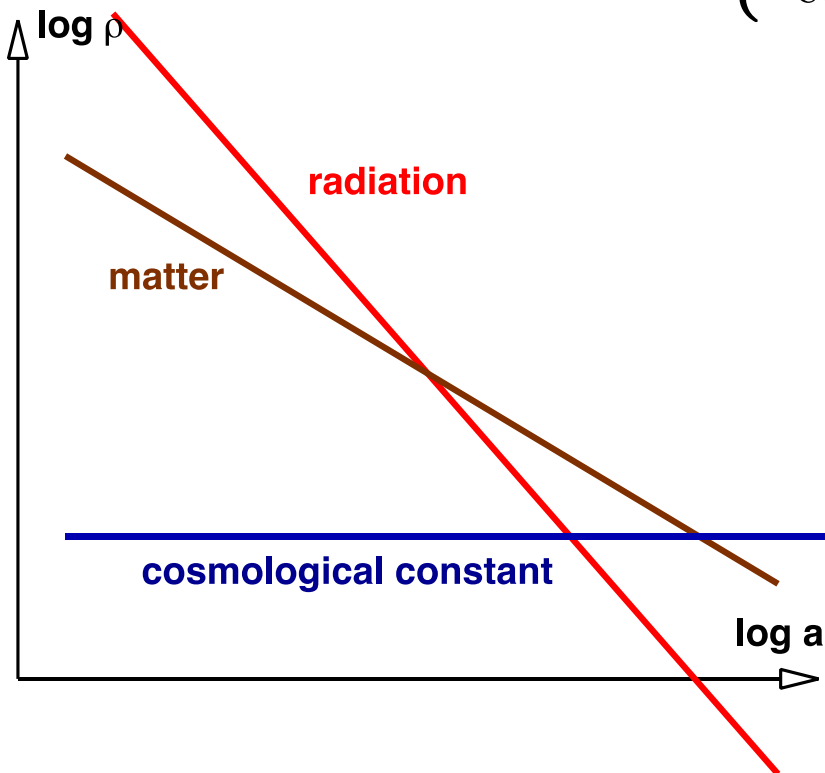
$$T_{0;\nu}^{\nu} = \dot{\rho} + \Gamma_{i0}^i(\rho + p) = \dot{\rho} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \underbrace{(\rho + p)}_{(1+w)\rho} = 0$$

Questions (5 minutes, en groupe):

- pour w constant, quel est le comportement de $\rho(a)$?
(éliminer le temps)
- pour les trois cas $w = 0, 1/3, -1$, quel est $\rho(a)$?
- est-ce que le résultat fait du sens physiquement?

évolution des densités d'énergies

$$\rho \propto a(t)^{-3(1+w)} \propto \begin{cases} a(t)^{-3} & \text{for } w = 0 & \text{(matter)} \\ a(t)^{-4} & \text{for } w = 1/3 & \text{(radiation)} \\ \text{const.} & \text{for } w = -1 & \text{(vacuum energy)} \end{cases}$$



poussière: dilution par l'expansion de l'espace

rayonnement: en plus décalage spectral

la densité d'énergie dans l'univers jeune (primordial) devrait alors être dominé par le rayonnement

eq. d'Einstein

- maintenant nous avons tous les ingrédients nécessaires pour calculer l'équation d'Einstein:
 - métrique
 - tenseur énergie impulsion

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_N T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^{\delta}_{\nu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\delta} - \Gamma^{\delta}_{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\nu\delta}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$$

il faut juste tout calculer... ☺

eq. de Friedmann

on trouve:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad R_{ij} = - \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2\frac{\kappa}{a^2} \right] g_{ij}$$

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} \right] \leftarrow \text{courbure de l'espace-temps est non-nulle même pour } k=0!$$

composante 0-0: $\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3} \rho \leftarrow \text{somme des } \rho$

composante i-i: $2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} = -8\pi G_N p$

eq. de Friedmann II

trois commentaires:

- on peut combiner les deux équations pour

trouver

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G_N}{3} (\rho + 3p)$$

alors l'expansion de l'univers accélère si $p < -\rho/3$

- les deux équations d'Einstein ne sont pas indépendantes de l'éq. de conservation
- on a 3 quantités inconnues (ρ , p et a) mais que deux équations, alors il faut donner une des trois (normalement p) – ainsi que la constante k .

la densité critique

Friedmann eq. $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3}\rho$

$$H \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \quad \frac{\kappa}{a^2 H^2} = \frac{8\pi G_N \rho}{3H^2} - 1 \equiv \frac{\rho}{\rho_c} - 1 \equiv \Omega - 1$$

$\Omega(t) > 1 \Rightarrow \kappa > 0 \Rightarrow$ **closed** universe

$\Omega(t) = 1 \Rightarrow \kappa = 0 \Rightarrow$ **flat** universe

$\Omega(t) < 1 \Rightarrow \kappa < 0 \Rightarrow$ **open** universe

et: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\Omega - 1}{\kappa} \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{\dot{a}^2} = -2 \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^3}$

$\underbrace{\quad}_{|\Omega - 1|} \quad (\kappa \neq 0)$

>0 pour univers rempli de poussière ou radiation en expansion (et $\kappa \neq 0$)
-> l'univers devient "moins plat"

évolution de l'univers I

évolution de ρ des 4 contributions mentionnées:

- radiation: a^{-4}
- poussière: a^{-3}
- courbure: a^{-2} ($H^2 + k/a^2 \sim \rho$)
- constante cosmologique: a^0

notation:

$$\Omega_X = \frac{\rho_X}{\rho_c} \Big|_{t_0}$$

l'univers primordial est dominé par la radiation –
suffisamment tôt nous pouvons négliger le reste!

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \Omega_r \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \Rightarrow a\dot{a} = \text{const.} \Rightarrow a da \propto dt$$

$$a(t) \propto t^{1/2}$$

évolution de l'univers II

plus tard dans l'évolution, la radiation peut être négligé
(et admettons que $\Lambda=0$)

$$\dot{a}^2 = -\kappa + \frac{C}{a}, \quad C = H_0 \Omega_0 a_0^3 > 0$$

1) $\kappa = 0 \rightarrow \sqrt{a} da = \sqrt{C} dt$ et $a(0) = 0 \Rightarrow a(t) \propto t^{2/3}$

2) $\kappa = 1 \rightarrow \dot{a}^2 = \frac{C}{a} - 1$

- pour $a=C$ on a que $\dot{a} = 0$ et l'univers passe d'expansion en contraction
- la substitution $a = C \sin^2 \theta$ mène à $2C \sin^2 \theta d\theta = dt$
- après intégration: $t = C(\theta - \cos \theta \sin \theta)$
- le "big crunch" prend place pour $\theta=\pi$ et $t=\pi C$

évolution de l'univers III

$$3) \kappa = -1 \rightarrow \dot{a}^2 = \frac{C}{a} + 1$$

- toujours $\dot{a} \geq 0$ et l'univers est en expansion pour toujours
- la substitution $a = C \sinh^2 \chi$ mène à $2C \sinh(\chi)^2 d\chi = dt$
- après intégration:

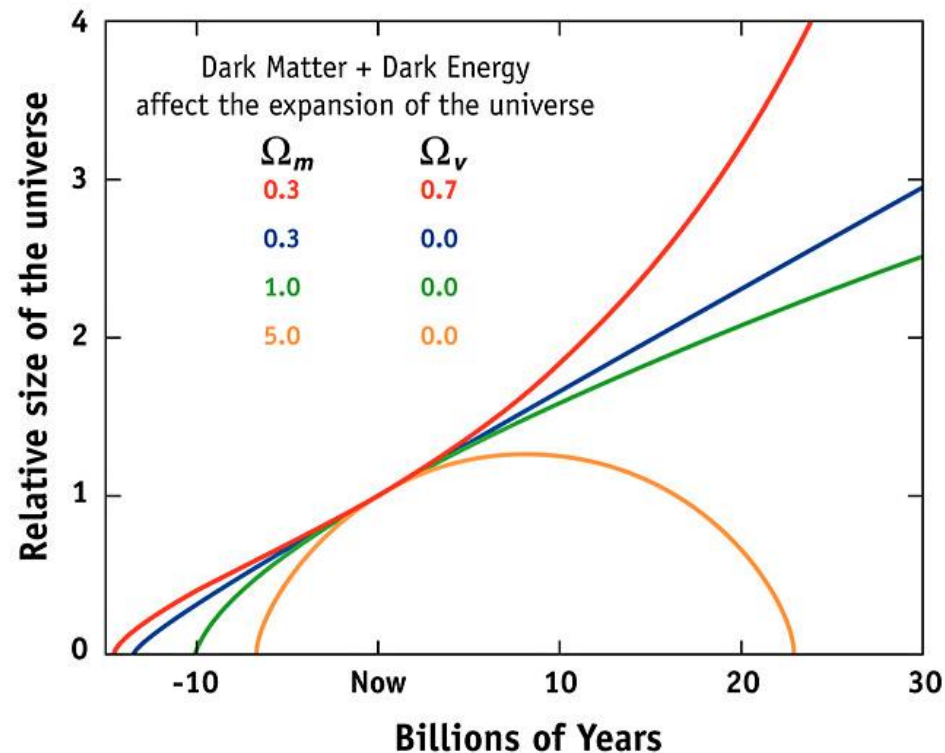
$$t = C(\cosh \chi \sinh \chi - \chi)$$

Finalement, $\Omega_\Lambda = 1$

$$\Omega_r = \Omega_m = \Omega_\kappa = 0$$

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{3} \Lambda a^2$$

$$a(t) = \exp(Ht), \quad H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$$



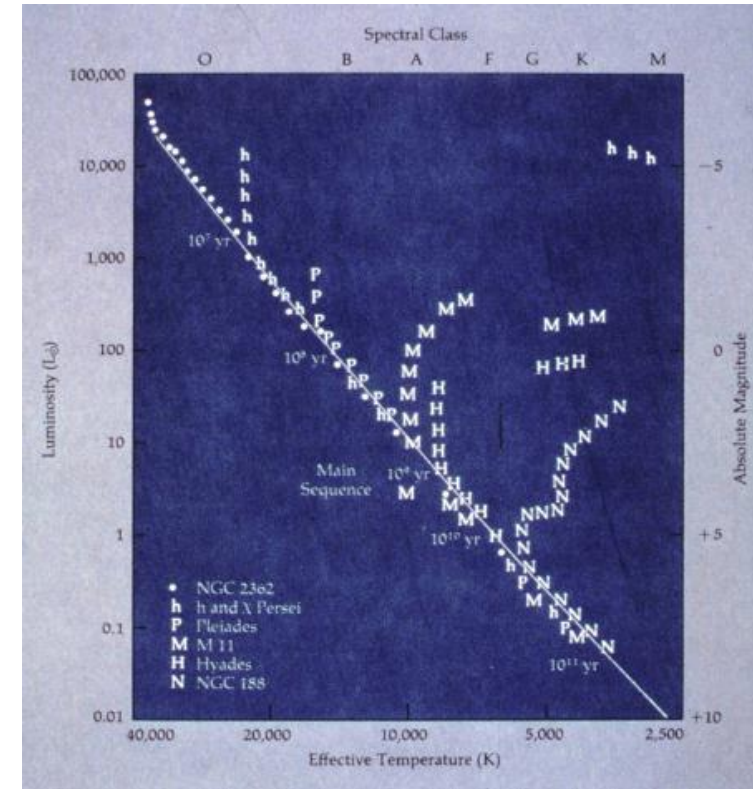
L'âge de l'univers revisité

On avait: $t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{H(z)(1+z)}$

Pour univers dominé par la matière:

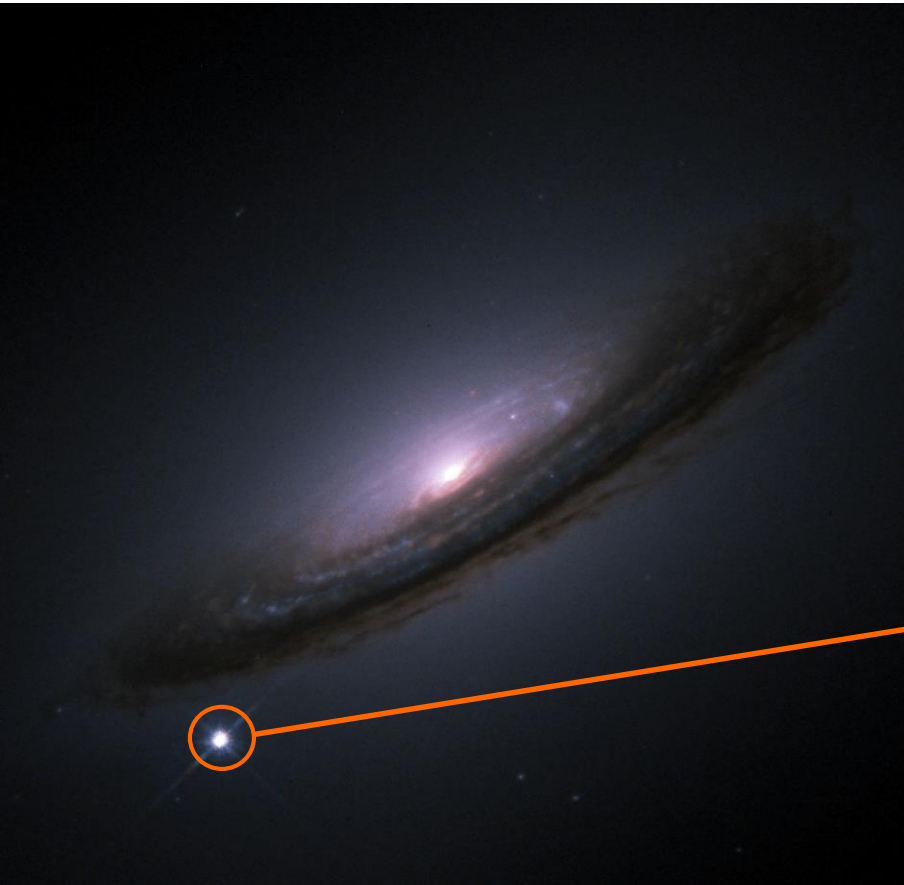
$$H = H_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3/2} = H_0 (1+z)^{3/2}$$

$$H_0 t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)^{5/2}} = \int_1^\infty \frac{du}{u^{5/2}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{u^{3/2}} \Big|_1^\infty = \frac{2}{3}$$

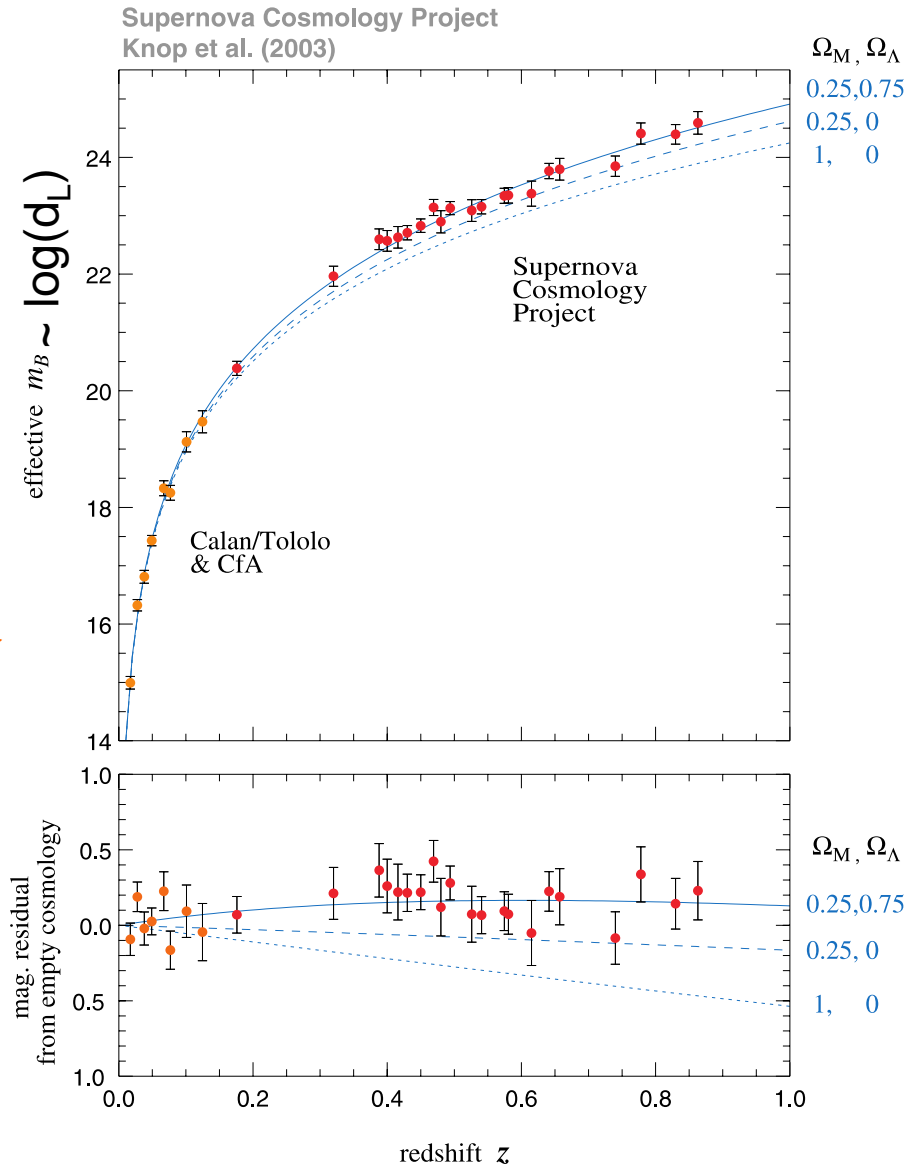


$1/H_0 \sim 9.8 \text{ Gyr}/[H_0/100 \text{ km/s/Mpc}] \sim 13.6 \text{ Gyr} \rightarrow t_0 \sim 9 \text{ Gyr}$
 Mais âge de vieux amas d'étoiles globulaires: 11-18 Gyr ...

distances revisitées



La distance de luminosité dépend des densités d'énergie dans l'univers par le taux d'expansion!



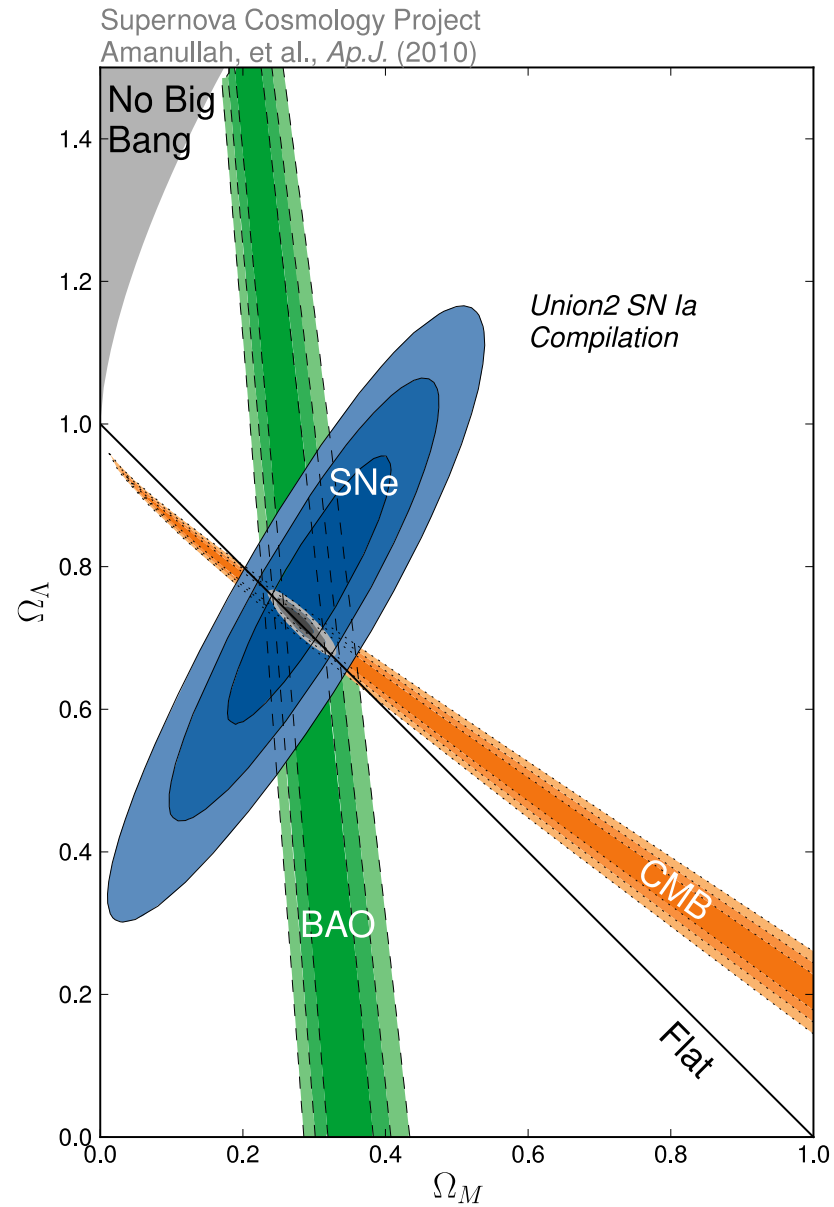
distances revisitées

Mesure du contenu de l'univers avec (effectivement) 3 distances:

- Distance de luminosité des SN-Ia
- Distance angulaire basé sur les oscillations acoustiques primordiales vue dans les galaxies et dans la fond diffus cosmologique

Les résultats sont en accord:

- l'univers est plat
 - matière: $\approx 30\%$
 - dont baryons: $\approx 5\%$
 - énergie du vide: $\approx 70\%$
- mais alors on ne connaît pas 95% de la densité d'énergie dans l'univers!



Sommaire

- Méthodes
 - métrique FLRW pour espace isotrope et homogène
 - tenseur énergie impulsion pour fluide parfait
 - Eq. d'Einstein (eq. de Friedmann) et identité de Bianchi
 - géodésiques pour particules et photons
- Résultats
 - système de coordonnées comobile
 - expansion de l'univers lié au contenu
 - Distances et redshift donnent des contraintes sur l'expansion