



# Dimensions supplémentaires dans les modèles de l'Univers

Katarzyna Zuleta

Brissago, 29 septembre 2011



# Notre intuition de l'espace

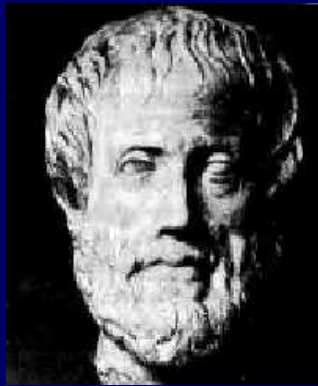
Basée sur la géométrie Euclidienne :

Trois degrés de liberté  $\Leftrightarrow$  trois dimensions

# Notre intuition de l'espace

Basée sur la géométrie Euclidienne :

Trois degrés de liberté  $\Leftrightarrow$  trois dimensions



Aristote (384-322 av. JC): "Du ciel":

"Parmi les grandeurs, l'une n'est divisible qu'en un sens unique, c'est la ligne ; l'autre, l'est en deux, c'est la surface ; l'autre, l'est en trois, c'est le corps. Il n'y a pas de grandeurs autres que celles-là, parce que trois est tout et que trois renferme toutes les dimensions possibles. En effet, ainsi que le disent les Pythagoriciens, l'univers entier et toutes les choses dont il est composé sont déterminées par ce nombre Trois."

# Notre intuition de l'espace



Ptolémée (~ 150 AD): "De la distance":  
"Dessine trois lignes perpendiculaires.  
Essaie de dessiner une quatrième.  
Elle est entièrement sans mesure et sans  
définition"

# Notre intuition de l'espace



Ptolémée (~ 150 AD): "De la distance":  
"Dessine trois lignes perpendiculaires.  
Essaie de dessiner une quatrième.  
Elle est entièrement sans mesure et sans  
définition"

Est-ce vraiment une preuve que les dimensions  
supplémentaires sont impossibles?

# Notre intuition de l'espace



Ptolémée (~ 150 AD): "De la distance":  
"Dessine trois lignes perpendiculaires.  
Essaie de dessiner une quatrième.  
Elle est entièrement sans mesure et sans  
définition"

Est-ce vraiment une preuve que les dimensions  
supplémentaires sont impossibles?

**Non!**



# Notre intuition de l'espace



Ptolémée (~ 150 AD): "De la distance":  
"Dessine trois lignes perpendiculaires.  
Essaie de dessiner une quatrième.  
Elle est entièrement sans mesure et sans  
définition"

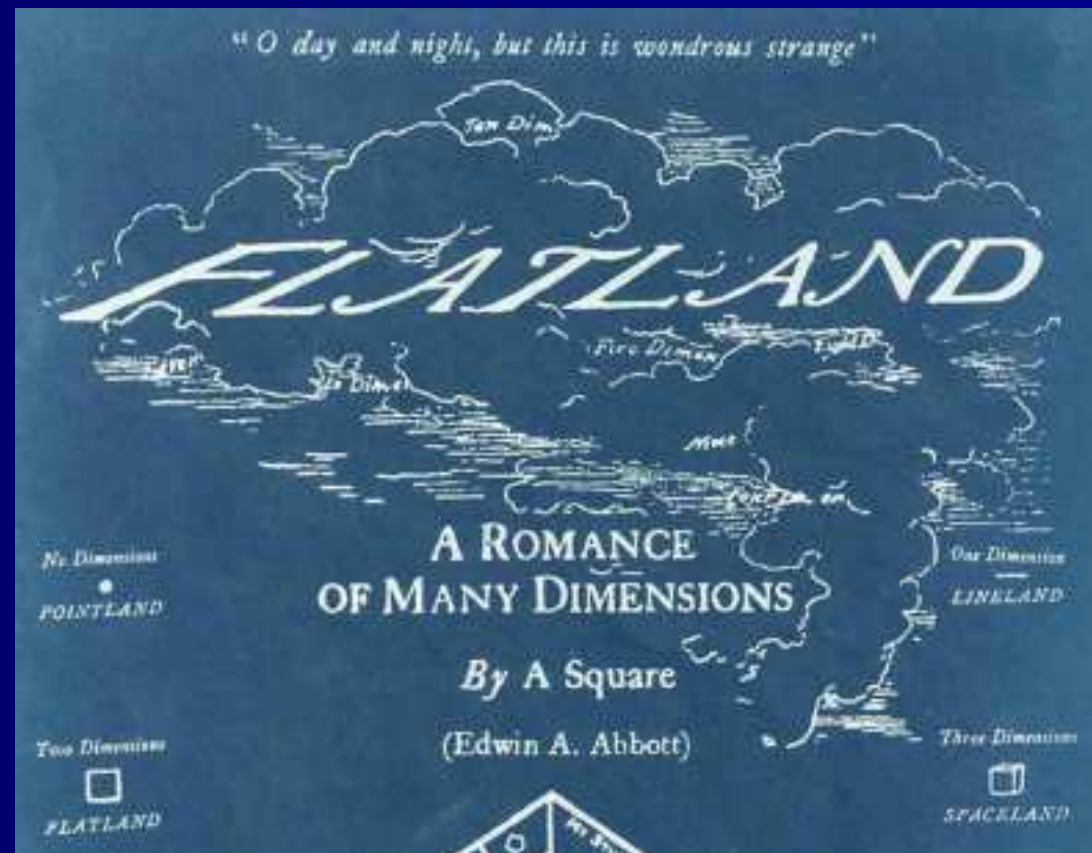
Est-ce vraiment une preuve que les dimensions  
supplémentaires sont impossibles?

**Non!**

Ce type de raisonnement montre seulement qu'elle sont  
difficiles à visualiser!

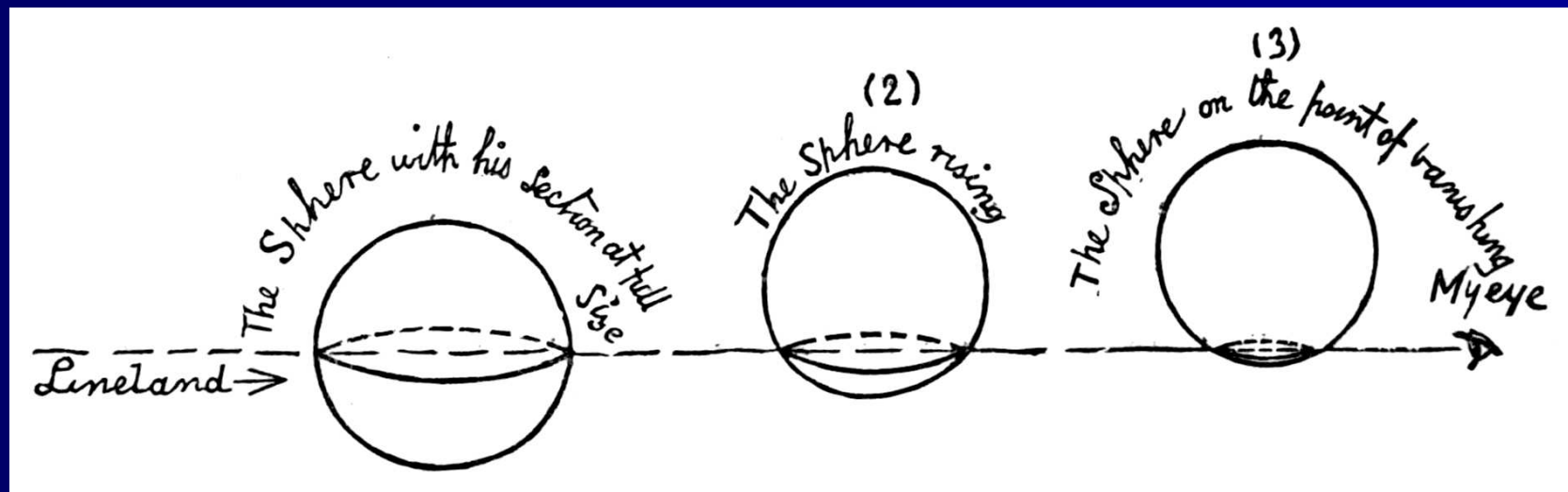
# Notre intuition de l'espace

“Flatland – une aventure à plusieurs dimensions”  
(Edwin A. Abbott, 1884)



# Notre intuition de l'espace

"Flatland - une aventure à plusieurs dimensions"  
(Edwin A. Abbott, 1884)



- (1) La sphère présentant sa section maximale
- (2) La sphère en le train de s'élever
- (3) La sphère sur point de disparaître

# Notre intuition de l'espace

“Flatland – une aventure à plusieurs dimensions”  
(Edwin A. Abbott, 1884)

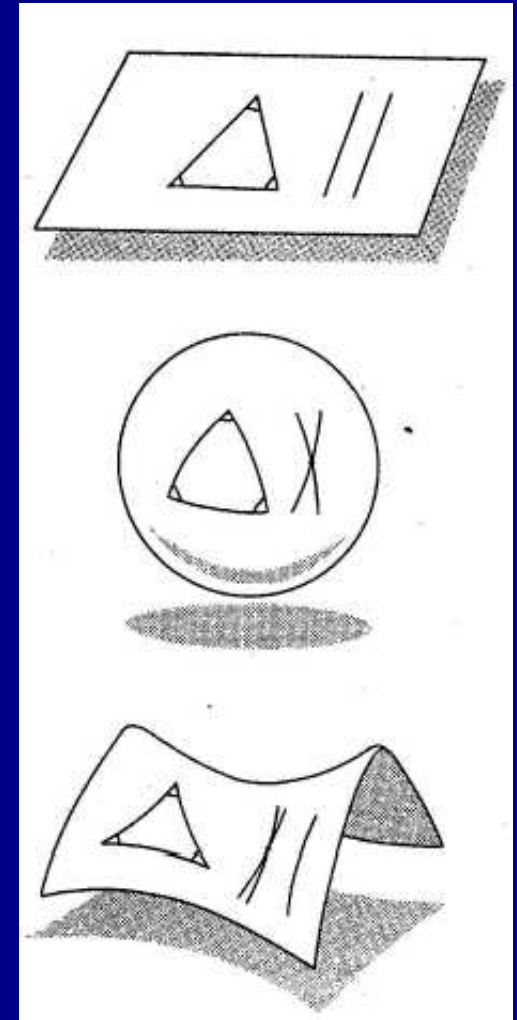
Il est vrai que nous avons à Flatland une Troisième Dimension, inconnue de nous, que l'on pourrait appeler “hauteur”, tout comme vous avez, chez vous, à Spaceland, une Quatrième Dimension, pour laquelle vous ne possédez pas encore, de nom mais que j'appellerai “extra-hauteur”.

# Dimensions supplémentaires en mathématiques

Riemann (10 juin 1854): Généralisation de la géométrie aux espaces courbes de dimension arbitraire

Élément de distance:

$$ds^2 = (d\vec{x})^T g d\vec{x}$$



# Dimensions supplémentaires en physique

- Constat:

Nous ne voyons pas des dimensions supplémentaires et il n'y a aucune preuve expérimentale de leur existence

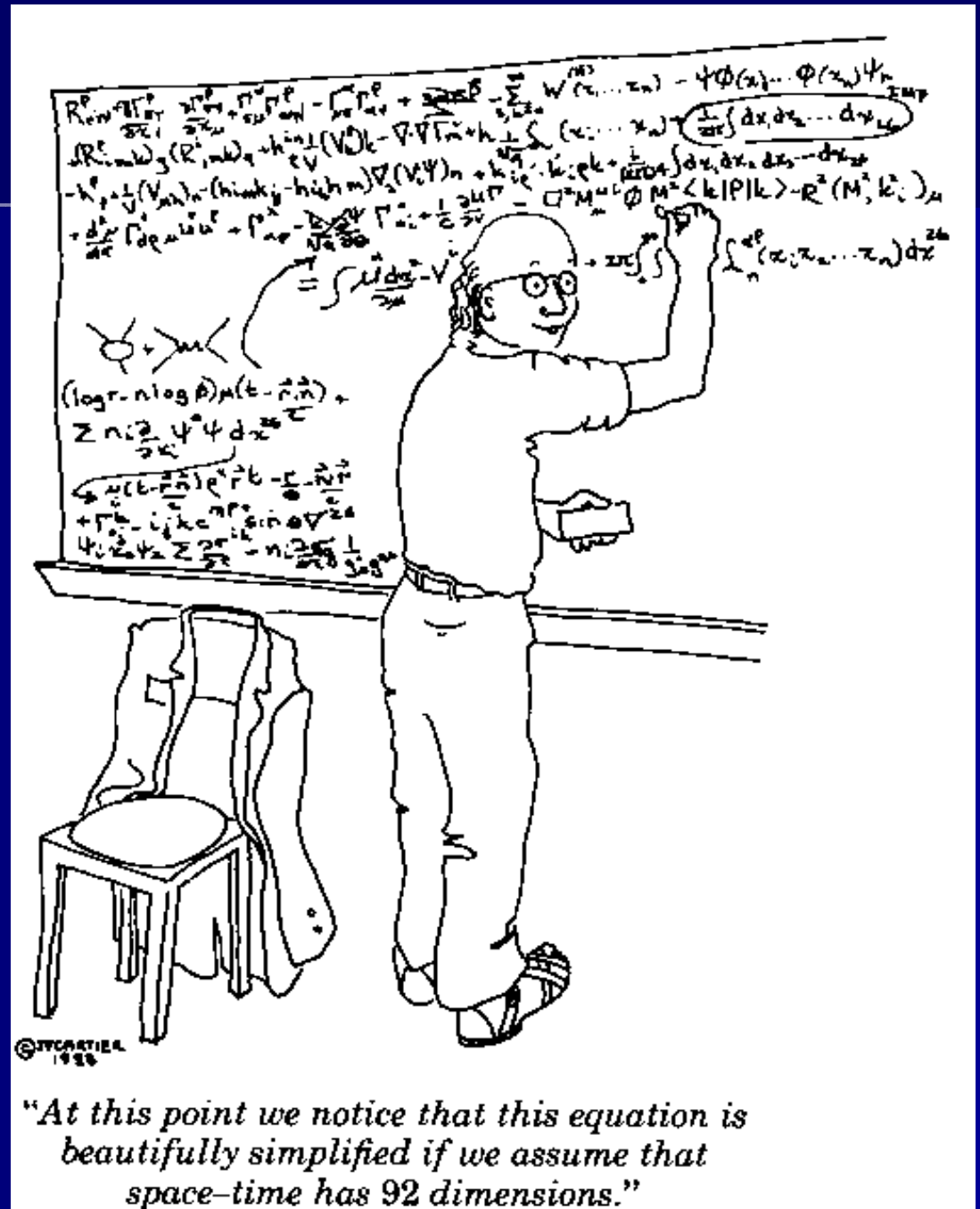
# Dimensions supplémentaires en physique

- Constat:

Nous ne voyons pas des dimensions supplémentaires et il n'y a aucune preuve expérimentale de leur existence

- Pourquoi devrait-on y songer?

“Ici nous voyons que cette équation est joliment simplifiée si nous supposons que l’espace-temps a 92 dimensions”



<http://www3.tsl.uu.se/~flechl/misc.html>



# Dimensions supplémentaires en physique

- Constat:

Nous ne voyons pas des dimensions supplémentaires et il n'y a aucune preuve expérimentale de leur existence

- Pourquoi devrait-on y songer?

Raison première:

Recherche de la théorie unifiée d'interactions

# Dimensions supplémentaires en physique

- **Constat:**

Nous ne voyons pas des dimensions supplémentaires et il n'y a aucune preuve expérimentale de leur existence

- Pourquoi devrait-on y songer?

**Raison première:**

Recherche de la théorie unifiée d'interactions

- **Absence de preuves expérimentales :**

⇒ Toute théorie contenant des dimensions supplémentaires doit trouver une manière de les "cacher" !

# Théorie de Kaluza-Klein

T. Kaluza, "On the problem of unity in physics", 1921

O. Klein, "Quantum theory and five-dimensional theory of relativity", 1926

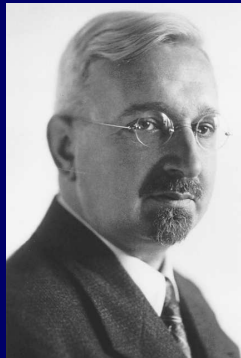
**Inspiration:** Description géométrique de la gravitation en relativité générale (Einstein, 1914) & Unification de l'électricité et du magnétisme (Maxwell, 1864)

# Théorie de Kaluza-Klein

T. Kaluza, "On the problem of unity in physics", 1921

O. Klein, "Quantum theory and five-dimensional theory of relativity", 1926

**Inspiration:** Description géométrique de la gravitation en relativité générale (Einstein, 1914) & Unification de l'électricité et du magnétisme (Maxwell, 1864)



**Idée de Kaluza (1919):**

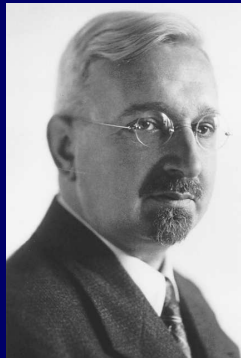
Introduire une cinquième dimension pour unifier la gravitation et l'électromagnétisme — les deux forces connues à l'époque

# Théorie de Kaluza-Klein

T. Kaluza, "On the problem of unity in physics", 1921

O. Klein, "Quantum theory and five-dimensional theory of relativity", 1926

**Inspiration:** Description géométrique de la gravitation en relativité générale (Einstein, 1914) & Unification de l'électricité et du magnétisme (Maxwell, 1864)



**Idée de Kaluza (1919):**

Introduire une cinquième dimension pour unifier la gravitation et l'électromagnétisme — les deux forces connues à l'époque

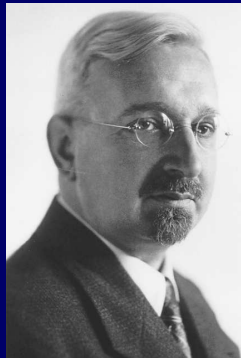
Les champs électromagnétique et gravitationnel en 4D sont des manifestations de la gravitation en 5D.

# Théorie de Kaluza-Klein

T. Kaluza, "On the problem of unity in physics", 1921

O. Klein, "Quantum theory and five-dimensional theory of relativity", 1926

**Inspiration:** Description géométrique de la gravitation en relativité générale (Einstein, 1914) & Unification de l'électricité et du magnétisme (Maxwell, 1864)



**Idée de Kaluza (1919):**

Introduire une cinquième dimension pour unifier la gravitation et l'électromagnétisme — les deux forces connues à l'époque

Les champs électromagnétique et gravitationnel en 4D sont des manifestations de la gravitation en 5D.



**Contribution de Klein (1926):**

Justification naturelle du pourquoi la cinquième dimension reste invisible

# Electrodynamique

Equations de Maxwell (1864) – description unifiée de phénomènes magnétiques et électriques:

- Loi de Gauss-Coulomb:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- Loi de Gauss (magnétique):  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- Loi de Faraday:  $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$
- Loi d'Ampère:  $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$

# Electrodynamique

Equations de Maxwell (1864) – description unifiée de phénomènes magnétiques et électriques:

- Loi de Gauss-Coulomb:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- Loi de Gauss (magnétique):  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- Loi de Faraday:  $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$
- Loi d'Ampère:  $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$

dans le vide:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = 0 \qquad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} = 0$$

⇒ ondes EM se propageant à la vitesse de la lumière!



# Electrodynamique – formulation covariante

- Les équations de Maxwell sont invariantes sous les transformations de Lorentz, qui préservent l'élément de longueur

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Principe de covariance – les lois physiques ne doivent pas dépendre du référentiel choisi.

Les lois de Maxwell peuvent être écrites sous forme manifestement covariante (c.-à-d sous forme tensorielle)

# Parenthèse - Tenseurs

Sous transformation de coordonnées  $x \rightarrow x'$ :

- Vecteur contravariant:  $v'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} v^{\beta}$
- Vecteur covariant:  $v'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} v_{\beta}$
- Tenseur  $k$  fois contravariant et  $n$  fois covariant:

$$T'^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\gamma_1 \dots \gamma_n} = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x'^{\alpha_k}}{\partial x^{\beta_k}} \frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x'^{\gamma_1}} \dots \frac{\partial x^{\delta_n}}{\partial x'^{\gamma_n}} T^{\beta_1 \dots \beta_k}_{\delta_1 \dots \delta_n}$$

En absence de gravitation,

$$x' = \Lambda x + a,$$

avec  $\Lambda$  transformation de Lorentz

# Electrodynamique – formulation covariante

- Les équations de Maxwell sont invariantes sous les transformations de Lorentz, qui préservent l'élément de longueur

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Principe de covariance – les lois physiques ne doivent pas dépendre du référentiel choisi.

Les lois de Maxwell peuvent être écrites sous forme manifestement covariante (c.-à-d sous forme tensorielle)

# Electrodynamique - formulation covariante

Introduisons le 4-vecteur potentiel:  $A_\mu = (\varphi, \vec{A})$  tel que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t - \vec{\nabla}\varphi$$

Les équations  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  et  $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial\vec{B}/\partial t = 0$  sont alors automatiquement satisfaites, au vu des identités

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0$$

Les deux équations  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$  et  $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial\vec{E}/\partial t = \vec{J}$  peuvent être réexprimées en termes du **tenseur du champ électromagnétique**

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

et deviennent

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad \text{où} \quad J^\mu = (\rho, \vec{J})$$

# Electrodynamique - formulation covariante

Equations de Maxwell:

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = J^{\nu} \quad \text{où} \quad J^{\mu} = (\rho, \vec{J})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_{\nu} F_{\lambda\sigma} = 0$$

où  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ , le tenseur du champ EM (covariant, d'ordre deux, antisymétrique).

# Electrodynamique - formulation covariante

Equations de Maxwell:

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = J^{\nu} \quad \text{où} \quad J^{\mu} = (\rho, \vec{J})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_{\nu} F_{\lambda\sigma} = 0$$

où  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ , le tenseur du champ EM (covariant, d'ordre deux, antisymétrique).

Elles peuvent être obtenues à partir de l'action

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

# Electrodynamique - formulation covariante

Equations de Maxwell:

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = J^{\nu} \quad \text{où} \quad J^{\mu} = (\rho, \vec{J})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_{\nu} F_{\lambda\sigma} = 0$$

où  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ , le tenseur du champ EM (covariant, d'ordre deux, antisymétrique).

Elles peuvent être obtenues à partir de l'action

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$F_{\mu\nu}$  et  $\mathcal{L}_{EM}$  sont invariants sous les transformations de jauge:

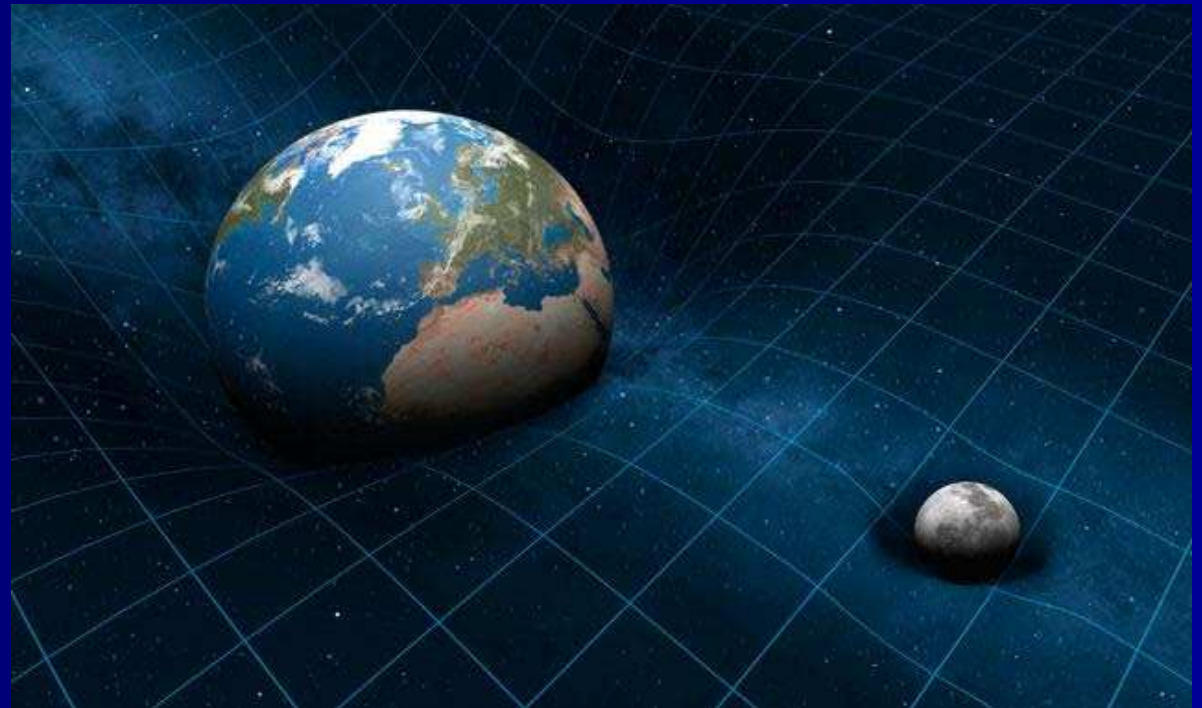
$$A_{\mu}(x) \rightarrow A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\alpha(x)$$

# Gravitation – relativité générale

Force gravitationnelle de Newton remplacée par la déformation de l'espace due à la présence de la matière.

“Matter tells space how to curve, and space tells matter how to move.”

(John Wheeler)



<http://www.bbc.co.uk/science/space/universe/>  
credit: Mark Garlick/SPL



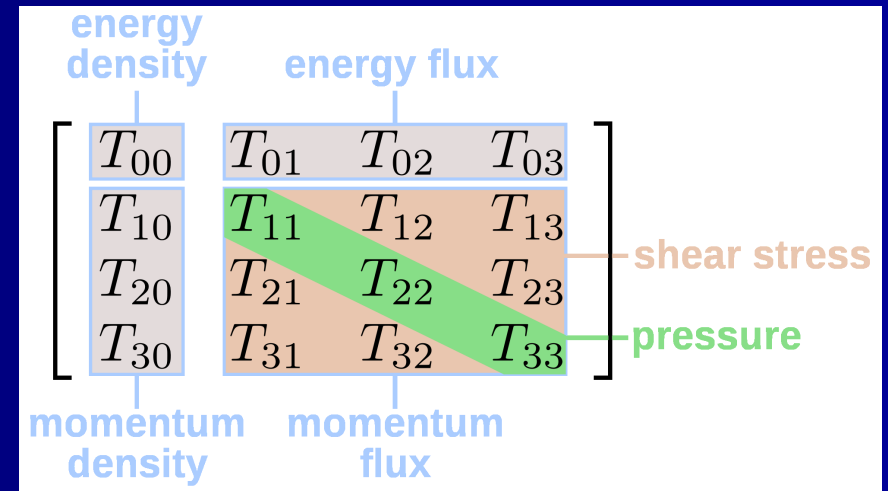
# Gravitation - relativité générale

L'équation d'Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\kappa^2 T_{\mu\nu}$$

Peut être dérivée de l'action d'Einstein-Hilbert:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} R + \mathcal{L}_M \right].$$



Particules dans le champ gravitationnel suivent des géodésiques:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

**Principe de covariance généralisé:** les lois physiques doivent être formulées en termes d'équations dont la forme ne change pas sous des changements de coordonnées et qui redonnent les lois habituelles quand  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ .

# Théorie de Kaluza-Klein

Kaluza (1919): Le symbole de Christoffel et le tenseur du champ électromagnétique se ressemblent :

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2} [\partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\nu}]$$

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$

# Théorie de Kaluza-Klein

Kaluza (1919): Le symbole de Christoffel et le tenseur du champ électromagnétique se ressemblent :

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2} [\partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\nu}]$$

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$



Si l'on introduit une cinquième dimension, le tenseur du champ EM pourrait être vu comme un symbole de Christoffel "amputé"!

# Théorie de Kaluza-Klein

**Kaluza (1919):** Le symbole de Christoffel et le tenseur du champ électromagnétique se ressemblent :

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2} [\partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\alpha g_{\mu\nu}]$$

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$



Si l'on introduit une cinquième dimension, le tenseur du champ EM pourrait être vu comme un symbole de Christoffel "amputé"!

En effet, en identifiant  $A_\mu = g_{\mu 5}$  et supposant que la métrique ne dépend pas de  $x^5$

$$\Gamma_{\mu\nu 5} = \frac{1}{2} [\partial_\nu g_{\mu 5} - \partial_\mu g_{\nu 5} + \partial_5 g_{\mu\nu}] = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu = F_{\nu\mu}$$

# Théorie de Kaluza-Klein

Métrique:

$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \lambda^2 A_\mu A_\nu & \lambda A_\mu \\ \lambda A_\nu & -1 \end{pmatrix}, \quad \partial_5 \hat{g}_{MN}(x) = 0$$

# Théorie de Kaluza-Klein

Métrique: 
$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \lambda^2 A_\mu A_\nu & \lambda A_\mu \\ \lambda A_\nu & -1 \end{pmatrix}, \quad \partial_5 \hat{g}_{MN}(x) = 0$$

L'élément de longueur est invariant sous deux classes de transformations de coordonnées:

# Théorie de Kaluza-Klein

Métrique: 
$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \lambda^2 A_\mu A_\nu & \lambda A_\mu \\ \lambda A_\nu & -1 \end{pmatrix}, \quad \partial_5 \hat{g}_{MN}(x) = 0$$

L'élément de longueur est invariant sous deux classes de transformations de coordonnées:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$$

$$x^5 \rightarrow x^5$$

transformations de coordonnées 4d

# Théorie de Kaluza-Klein

Métrique: 
$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \lambda^2 A_\mu A_\nu & \lambda A_\mu \\ \lambda A_\nu & -1 \end{pmatrix}, \quad \partial_5 \hat{g}_{MN}(x) = 0$$

L'élément de longueur est invariant sous deux classes de transformations de coordonnées:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$$

$$x^5 \rightarrow x^5$$

transformations de coordonnées 4d

$A_\mu$  se transforme comme un quadrivecteur,  $g_{\mu\nu}$  comme un tenseur 4d,  $\hat{g}_{55}$  invariant



# Théorie de Kaluza-Klein

Métrique: 
$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \lambda^2 A_\mu A_\nu & \lambda A_\mu \\ \lambda A_\nu & -1 \end{pmatrix}, \quad \partial_5 \hat{g}_{MN}(x) = 0$$

L'élément de longueur est invariant sous deux classes de transformations de coordonnées:

- $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$   
 $x^5 \rightarrow x^5$  transformations de coordonnées 4d

$A_\mu$  se transforme comme un quadrivecteur,  $g_{\mu\nu}$  comme un tenseur 4d,  $\hat{g}_{55}$  invariant

- $x^\mu \rightarrow x^\mu$   
 $x^5 \rightarrow x'^5 = x^5 + \lambda f(x)$  déplacements dans  $x^5$

# Théorie de Kaluza-Klein

Métrique: 
$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \lambda^2 A_\mu A_\nu & \lambda A_\mu \\ \lambda A_\nu & -1 \end{pmatrix}, \quad \partial_5 \hat{g}_{MN}(x) = 0$$

L'élément de longueur est invariant sous deux classes de transformations de coordonnées:

- $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$   
 $x^5 \rightarrow x^5$  transformations de coordonnées 4d

$A_\mu$  se transforme comme un quadrivecteur,  $g_{\mu\nu}$  comme un tenseur 4d,  $\hat{g}_{55}$  invariant

- $x^\mu \rightarrow x^\mu$   
 $x^5 \rightarrow x'^5 = x^5 + \lambda f(x)$  déplacements dans  $x^5$

$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$  transformation de jauge de  $A_\mu$ !

# Théorie de Kaluza-Klein

Il s'avère que la correspondance est plus profonde:

$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \lambda^2 A_\mu A_\nu & \lambda A_\mu \\ \lambda A_\nu & -1 \end{pmatrix}$$

# Théorie de Kaluza-Klein

Il s'avère que la correspondance est plus profonde:

$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \lambda^2 A_\mu A_\nu & \lambda A_\mu \\ \lambda A_\nu & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule tous les symboles de Christoffel

$$\hat{\Gamma}_{MN}^L = \frac{1}{2} [\partial_N \hat{g}_{NL} + \partial_M \hat{g}_{NL} - \partial_L \hat{g}_{MN}]$$

# Théorie de Kaluza-Klein

Il s'avère que la correspondance est plus profonde:

$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \lambda^2 A_\mu A_\nu & \lambda A_\mu \\ \lambda A_\nu & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule tous les symboles de Christoffel

$$\hat{\Gamma}_{MN}^L = \frac{1}{2} [\partial_N \hat{g}_{ML} + \partial_M \hat{g}_{NL} - \partial_L \hat{g}_{MN}]$$

On calcule toutes les composantes du tenseur de Ricci

$$\hat{R}_{MN} = \partial_N \hat{\Gamma}_{ML}^L - \partial_L \hat{\Gamma}_{MN}^L - \hat{\Gamma}_{MN}^L \hat{\Gamma}_{LK}^K + \hat{\Gamma}_{ML}^K \hat{\Gamma}_{NK}^L$$

# Théorie de Kaluza-Klein

Il s'avère que la correspondance est plus profonde:

$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \lambda^2 A_\mu A_\nu & \lambda A_\mu \\ \lambda A_\nu & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule tous les symboles de Christoffel

$$\hat{\Gamma}_{MN}^L = \frac{1}{2} [\partial_N \hat{g}_{ML} + \partial_M \hat{g}_{NL} - \partial_L \hat{g}_{MN}]$$

On calcule toutes les composantes du tenseur de Ricci

$$\hat{R}_{MN} = \partial_N \hat{\Gamma}_{ML}^L - \partial_L \hat{\Gamma}_{MN}^L - \hat{\Gamma}_{MN}^L \hat{\Gamma}_{LK}^K + \hat{\Gamma}_{ML}^K \hat{\Gamma}_{NK}^L$$

On calcule le scalaire de courbure  $\hat{R} = \hat{g}^{MN} R_{MN}$  et...

# Théorie de Kaluza-Klein

Il s'avère que la correspondance est plus profonde:

$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \lambda^2 A_\mu A_\nu & \lambda A_\mu \\ \lambda A_\nu & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule tous les symboles de Christoffel

$$\hat{\Gamma}_{MN}^L = \frac{1}{2} [\partial_N \hat{g}_{ML} + \partial_M \hat{g}_{NL} - \partial_L \hat{g}_{MN}]$$

On calcule toutes les composantes du tenseur de Ricci

$$\hat{R}_{MN} = \partial_N \hat{\Gamma}_{ML}^L - \partial_L \hat{\Gamma}_{MN}^L - \hat{\Gamma}_{MN}^L \hat{\Gamma}_{LK}^K + \hat{\Gamma}_{ML}^K \hat{\Gamma}_{NK}^L$$

On calcule le scalaire de courbure  $\hat{R} = \hat{g}^{MN} R_{MN}$  et...

Miracle de Kaluza-Klein:

$$\hat{R} = R + \frac{\lambda^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

# Théorie de Kaluza-Klein - l'action

Vu que la métrique ne dépend pas de  $x^5$ , l'action d'Einstein-Hilbert à 5D devient:

$$S = -\frac{1}{2\hat{R}^2} \int d^5x \sqrt{\hat{g}} \hat{R} = -\frac{1}{2\hat{R}^2} \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \hat{R} \int dx^5$$



# Théorie de Kaluza-Klein - l'action

Vu que la métrique ne dépend pas de  $x^5$ , l'action d'Einstein-Hilbert à 5D devient:

$$S = -\frac{1}{2\hat{K}^2} \int d^5x \sqrt{\hat{g}} \hat{R} = -\frac{1}{2\hat{K}^2} \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \hat{R} \int dx^5$$

Pour garantir que  $\int dx^5$  est finie, supposons que la 5<sup>e</sup> dimension est un cercle de rayon  $L$

$$S = -2\pi L \frac{1}{2\hat{K}^2} \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \hat{R} = - \int d^4x \sqrt{g} \left[ \frac{1}{2K^2} R + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]$$

# Théorie de Kaluza-Klein - l'action

Vu que la métrique ne dépend pas de  $x^5$ , l'action d'Einstein-Hilbert à 5D devient:

$$S = -\frac{1}{2\hat{K}^2} \int d^5x \sqrt{\hat{g}} \hat{R} = -\frac{1}{2\hat{K}^2} \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \hat{R} \int dx^5$$

Pour garantir que  $\int dx^5$  est finie, supposons que la 5<sup>e</sup> dimension est un cercle de rayon  $L$

$$S = -2\pi L \frac{1}{2\hat{K}^2} \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \hat{R} = - \int d^4x \sqrt{g} \left[ \frac{1}{2K^2} R + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]$$

⇒ Nous obtenons la théorie de Maxwell-Einstein à 4D!

# Théorie de Kaluza-Klein - géodésiques

Les particules suivent les géodésiques déterminées par notre géométrie 5D:

$$\ddot{x}^M + \hat{\Gamma}_{MN}^L \dot{x}^M \dot{x}^N = 0$$

# Théorie de Kaluza-Klein - géodésiques

Les particules suivent les géodésiques déterminées par notre géométrie 5D:

$$\ddot{x}^M + \hat{\Gamma}_{MN}^L \dot{x}^M \dot{x}^N = 0$$

Les composantes "λ"

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = (A_\alpha \dot{x}^\alpha + \dot{x}^5) F^\lambda{}_\nu \dot{x}^\nu$$

# Théorie de Kaluza-Klein - géodésiques

Les particules suivent les géodésiques déterminées par notre géométrie 5D:

$$\ddot{x}^M + \hat{\Gamma}_{MN}^L \dot{x}^M \dot{x}^N = 0$$

Les composantes "λ"

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = (A_\alpha \dot{x}^\alpha + \dot{x}^5) F^\lambda{}_\nu \dot{x}^\nu$$

Comme la métrique ne dépend pas de  $x^5$ ,  $(A_\alpha \dot{x}^\alpha + \dot{x}^5)$  doit être conservé le long des géodésiques.

# Théorie de Kaluza-Klein - géodésiques

Les particules suivent les géodésiques déterminées par notre géométrie 5D:

$$\ddot{x}^M + \hat{\Gamma}_{MN}^L \dot{x}^M \dot{x}^N = 0$$

Les composantes "λ"

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = (A_\alpha \dot{x}^\alpha + \dot{x}^5) F^\lambda{}_\nu \dot{x}^\nu$$

Comme la métrique ne dépend pas de  $x^5$ ,  $(A_\alpha \dot{x}^\alpha + \dot{x}^5)$  doit être conservé le long des géodésiques.

En identifiant cette constante comme  $e/m$

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{e}{m} F^\lambda{}_\nu \dot{x}^\nu \quad \text{force de Lorenz}$$

# Théorie de Kaluza-Klein - géodésiques

Les particules suivent les géodésiques déterminées par notre géométrie 5D:

$$\ddot{x}^M + \hat{\Gamma}_{MN}^L \dot{x}^M \dot{x}^N = 0$$

Les composantes "λ"

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = (A_\alpha \dot{x}^\alpha + \dot{x}^5) F^\lambda{}_\nu \dot{x}^\nu$$

Comme la métrique ne dépend pas de  $x^5$ ,  $(A_\alpha \dot{x}^\alpha + \dot{x}^5)$  doit être conservé le long des géodésiques.

En identifiant cette constante comme  $e/m$

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{e}{m} F^\lambda{}_\nu \dot{x}^\nu \quad \text{force de Lorenz}$$

- la charge él. est reliée avec la vitesse initiale dans  $x^5$ !

# Théorie de Kaluza-Klein

Tout cela est merveilleux, mais tout n'est pas clair:



# Théorie de Kaluza-Klein

Tout cela est merveilleux, mais tout n'est pas clair:

- Est-ce que la dimension supplémentaire devrait être vue comme une réalité physique ou juste comme un outil mathématique?

# Théorie de Kaluza-Klein

Tout cela est merveilleux, mais tout n'est pas clair:

- Est-ce que la dimension supplémentaire devrait être vue comme une réalité physique ou juste comme un outil mathématique?
- Si la dimension supplémentaire est une vraie dimension physique, pourquoi n'a-t-elle pas déjà été découverte?

# Théorie de Kaluza-Klein

Tout cela est merveilleux, mais tout n'est pas clair:

- Est-ce que la dimension supplémentaire devrait être vue comme une réalité physique ou juste comme un outil mathématique?
- Si la dimension supplémentaire est une vraie dimension physique, pourquoi n'a-t-elle pas déjà été découverte?
- Si elle devait être réelle, pourquoi rien ne dépend de  $x^5$ ?

# Théorie de Kaluza-Klein

Tout cela est merveilleux, mais tout n'est pas clair:

- Est-ce que la dimension supplémentaire devrait être vue comme une réalité physique ou juste comme un outil mathématique?
- Si la dimension supplémentaire est une vraie dimension physique, pourquoi n'a-t-elle pas déjà été découverte?
- Si elle devait être réelle, pourquoi rien ne dépend de  $x^5$ ?
- **Oups!** Les équations d'Einstein à 5D:  $\hat{R}_{MN} = 0$ .  
Mais  $\hat{R}_{55} = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ , donc  $\hat{R}_{MN} = 0 \Rightarrow F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 0$   
Poser  $\hat{g}_{55} = 1$  n'est pas consistant...

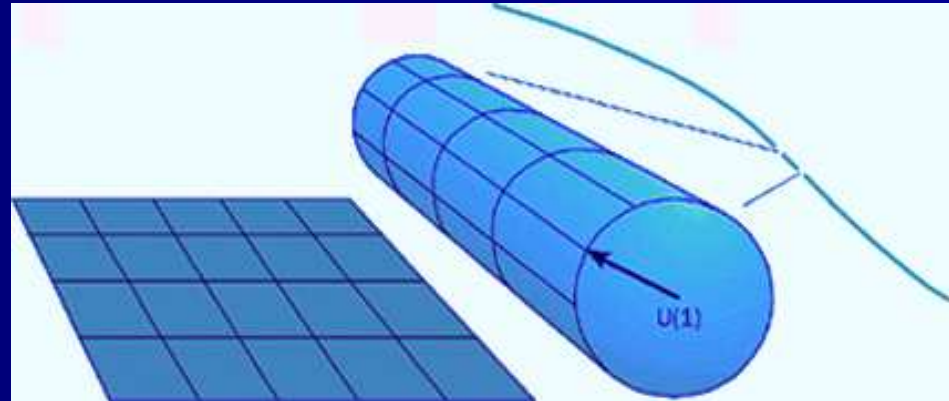
# Mécanisme de Kaluza-Klein (compactification)

Considérons la cinquième dimension comme physique. Nous avons supposé qu'elle est **compactifiée** (c-à-d un cercle).

# Mécanisme de Kaluza-Klein (compactification)

Considérons la cinquième dimension comme physique. Nous avons supposé qu'elle est **compactifiée** (c-à-d un cercle).

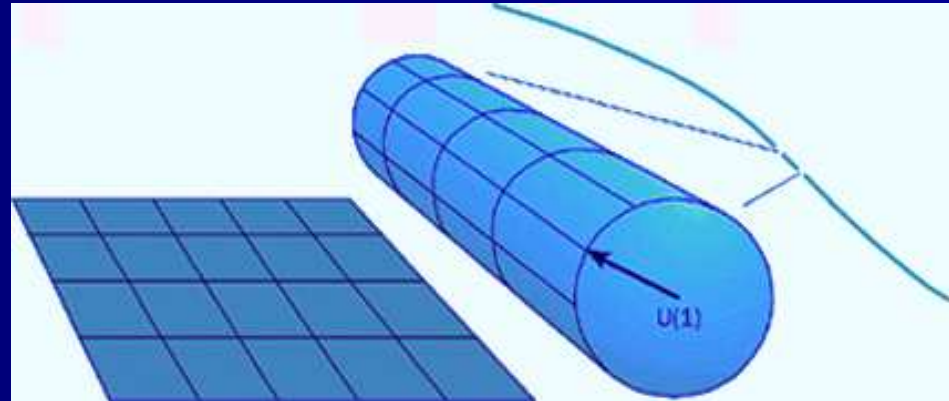
Si le cercle est de taille microscopique, la dimension supplémentaire reste inobservable!



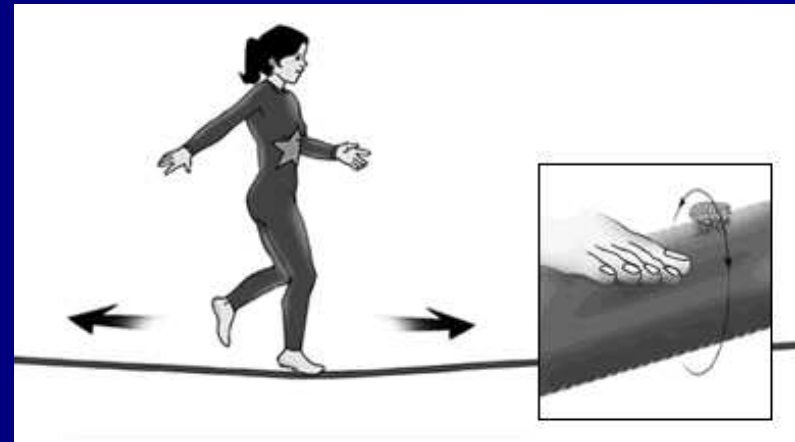
# Mécanisme de Kaluza-Klein (compactification)

Considérons la cinquième dimension comme physique. Nous avons supposé qu'elle est **compactifiée** (c-à-d un cercle).

Si le cercle est de taille microscopique, la dimension supplémentaire reste inobservable!



⇒ La théorie est 4D si nous considérons les distances beaucoup plus grandes que le rayon de la cinquième dimension.



## Compactification – suite

Considérons un champ scalaire  $\Phi$  dans un espace 5D avec la métrique de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$$

L'équation du champ pour  $\Phi$  (équation de Klein-Gordon):

$$\partial^M \partial_M \Phi(x^\mu, x^5) = \ddot{\Phi} - \nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{KG})$$



## Compactification - suite

Considérons un champ scalaire  $\Phi$  dans un espace 5D avec la métrique de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$$

L'équation du champ pour  $\Phi$  (équation de Klein-Gordon):

$$\partial^M \partial_M \Phi(x^\mu, x^5) = \ddot{\Phi} - \nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{KG})$$

Supposons que la 5<sup>e</sup> dimension est un cercle de rayon  $L$ .

Nous avons alors

$$\Phi(x^\mu, x^5 + 2\pi L) = \Phi(x^\mu, x^5)$$

et  $\Phi$  peut être écrit comme une série de Fourier:

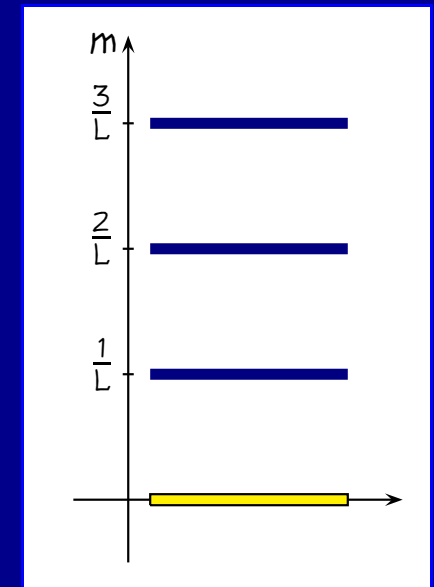
$$\Phi(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x^\mu) \chi_n(x^5) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x^\mu) e^{inx^5/L}$$

# Compactification - suite

⇒ Nombre infini d'équations découplées;  
équation de Klein-Gordon pour chaque mode  
de Fourier:

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m_n^2) \varphi_n = 0 \quad \text{avec} \quad m_n^2 = \frac{n^2}{L^2}$$

“Tour” infinie de modes de Kaluza-Klein  
(champs scalaires 4D de masse  $m_n$ )



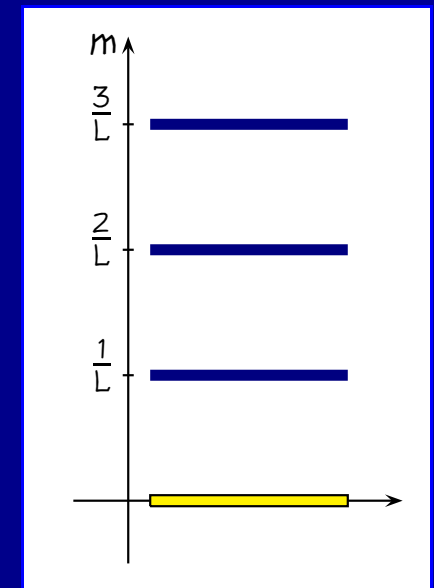
## Compactification - suite

⇒ Nombre infini d'équations découplées;  
équation de Klein-Gordon pour chaque mode  
de Fourier:

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m_n^2) \varphi_n = 0 \quad \text{avec} \quad m_n^2 = \frac{n^2}{L^2}$$

“Tour” infinie de modes de Kaluza-Klein  
(champs scalaires 4D de masse  $m_n$ )

Si  $L$  est très petit, les  $m_n$  sont grands et les modes massifs  
peuvent être produits seulement pour les énergies  $E \sim L^{-1}$ .



## Compactification - suite

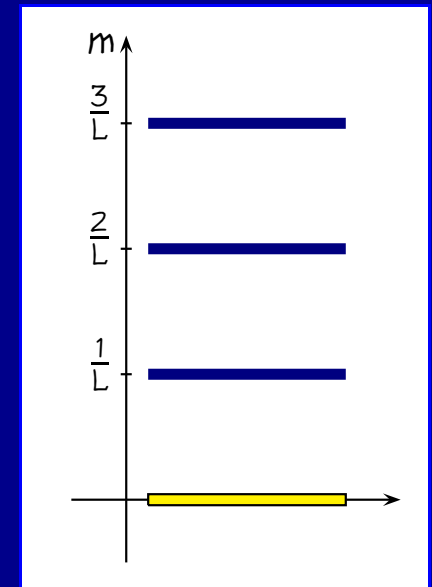
⇒ Nombre infini d'équations découplées; équation de Klein-Gordon pour chaque mode de Fourier:

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m_n^2) \varphi_n = 0 \quad \text{avec} \quad m_n^2 = \frac{n^2}{L^2}$$

“Tour” infinie de modes de Kaluza-Klein (champs scalaires 4D de masse  $m_n$ )

Si  $L$  est très petit, les  $m_n$  sont grands et les modes massifs peuvent être produits seulement pour les énergies  $E \sim L^{-1}$ .

A basse énergie ( $E \ll L^{-1}$ ) la théorie effective contient uniquement le mode zéro.



## Compactification – suite

⇒ Nombre infini d'équations découplées; équation de Klein-Gordon pour chaque mode de Fourier:

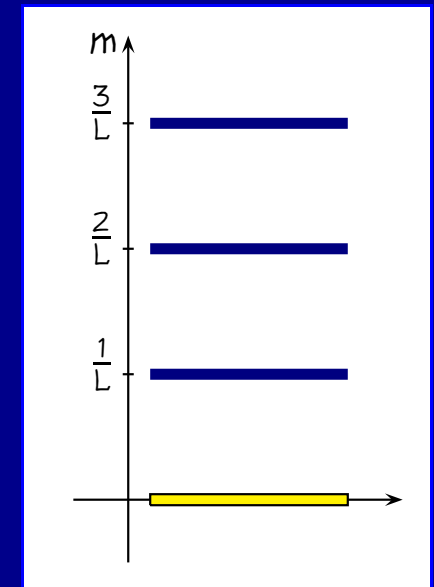
$$(\partial^\mu \partial_\mu - m_n^2) \varphi_n = 0 \quad \text{avec} \quad m_n^2 = \frac{n^2}{L^2}$$

“Tour” infinie de modes de Kaluza-Klein (champs scalaires 4D de masse  $m_n$ )

Si  $L$  est très petit, les  $m_n$  sont grands et les modes massifs peuvent être produits seulement pour les énergies  $E \sim L^{-1}$ .

A basse énergie ( $E \ll L^{-1}$ ) la théorie effective contient uniquement le mode zéro.

**Observation:**  $\chi_0$  ne dépend pas de  $x^5$



# Théorie de Kaluza-Klein

Nous pouvons appliquer cette philosophie à  $\hat{g}_{MN}$  de la théorie de Kaluza-Klein:

$$\hat{g}_{MN}(x^\mu, x^5) = \sum_n \hat{g}_{MN}^{(n)} e^{inx^5/L}$$

où  $\hat{g}_{MN}^{(0)}$  ne dépend pas de  $x^5$ . En paramétrisant

$$\hat{g}_{MN}^{(0)} = \varphi^{-1/3} \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \lambda^2 \varphi A_\mu A_\nu & \lambda A_\mu \\ \lambda A_\nu & \varphi \end{pmatrix}$$

nous obtenons l'action

$$S^{(0)} = -\frac{1}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R + \frac{1}{4} \varphi F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{6} \varphi^{-2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi \right]$$

Théorie de Einstein-Maxwell plus un champ scalaire – le dilaton

# Théorie de Kaluza-Klein

- Défaut:  
Ne produit pas de particules chargées légères

# Théorie de Kaluza-Klein

- Défaut:

Ne produit pas de particules chargées légères  
⇒ théorie ignorée pendant presque 50 ans !



# Théorie de Kaluza-Klein

- Défaut:

Ne produit pas de particules chargées légères  
⇒ théorie ignorée pendant presque 50 ans !

- Peut être généralisée à d'autres interactions (symétrie de jauge de la théorie  $\Leftrightarrow$  isométrie de l'espace compact)

# Théorie de Kaluza-Klein

- Défaut:

Ne produit pas de particules chargées légères  
⇒ théorie ignorée pendant presque 50 ans !

- Peut être généralisée à d'autres interactions (symétrie de jauge de la théorie  $\Leftrightarrow$  isométrie de l'espace compact)

- Hypothèse courante:

Rayon de compactification  $\sim M_p^{-1} \approx 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}$

# Théorie de Kaluza-Klein

- Défaut:

Ne produit pas de particules chargées légères  
⇒ théorie ignorée pendant presque 50 ans !

- Peut être généralisée à d'autres interactions (symétrie de jauge de la théorie  $\Leftrightarrow$  isométrie de l'espace compact)

- Hypothèse courante:

Rayon de compactification  $\sim M_p^{-1} \approx 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}$

- Ce n'est pas une théorie réaliste, néanmoins. . .

**Kaluza (1921):** "il semble difficile d'imaginer que ces relations, sans égal au niveau formel, ne sont rien d'autre qu'une coïncidence saugrenue"

# Motivations modernes

- Retour spectaculaire de l'idée dans les années 1970-1980:  
naissance de la théorie des cordes

# Motivations modernes

- Retour spectaculaire de l'idée dans les années 1970–1980 : naissance de la théorie des cordes
- Candidats actuels pour la théorie unifiant toutes les interactions:
  - théorie de supercordes : 10 dimensions
  - théorie M (M-theory): 11 dimensions

# Motivations modernes

- Retour spectaculaire de l'idée dans les années 1970-1980: naissance de la théorie des cordes
- Candidats actuels pour la théorie unifiant toutes les interactions:
  - théorie de supercordes : 10 dimensions
  - théorie M (M-theory): 11 dimensions
- Aussi: cadre attractif pour étudier les questions fondamentales de la physique de particules et de la cosmologie :
  - problème de hiérarchie
  - problème de constante cosmologique
  - . . .

Est-il absolument nécessaire que les dimensions supplémentaires soient compactes?

Est-il absolument nécessaire que les dimensions supplémentaires soient compactes?

Non!



Est-il absolument nécessaire que les dimensions supplémentaires soient compactes?

Non!

Il existe une manière alternative de les cacher :

Scénarios branaires

Les dimensions supplémentaires peuvent être (assez) grandes et même non-compactes!

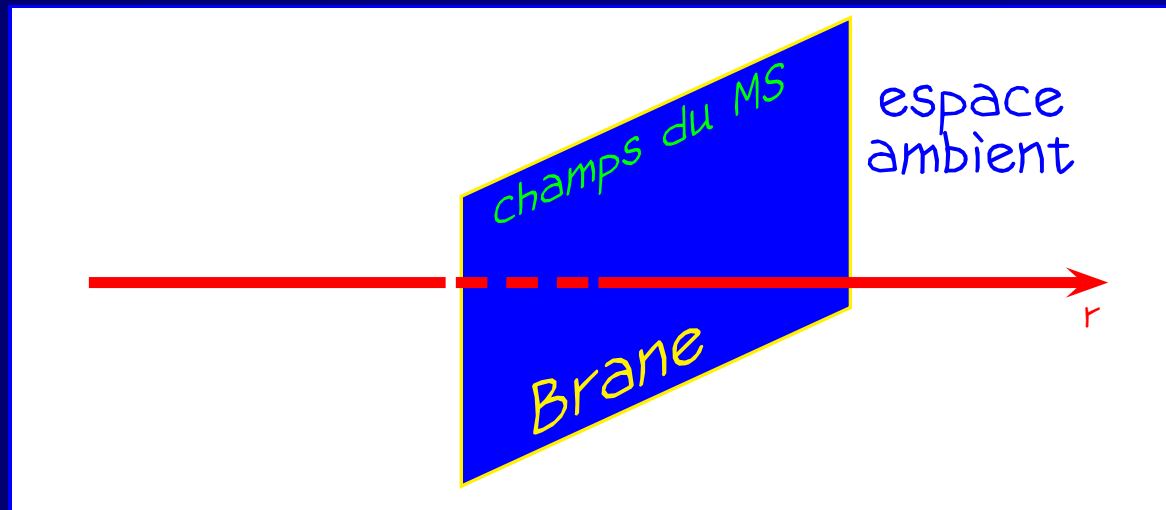
# Modèles branaires

- Idée:

Notre univers est une "brane": un défaut topologique dans un espace-temps de dimension  $d > 4$ :

Rubakov and Shaposhnikov, 1983

Akama, 1983



Matière (champs du MS) localisée sur la brane

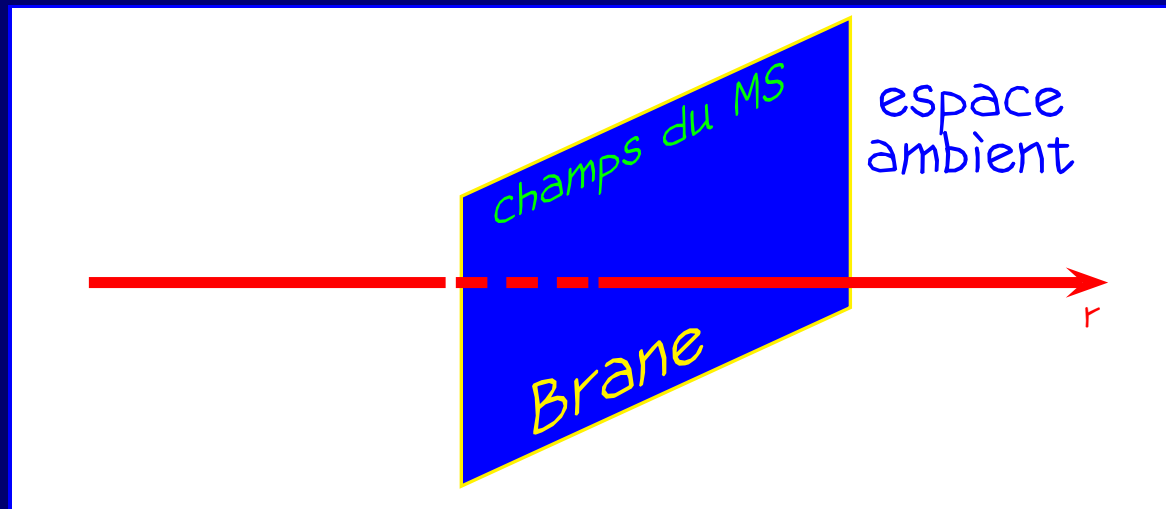
# Modèles branaires

- Idée:

Notre univers est une "brane": un défaut topologique dans un espace-temps de dimension  $d > 4$ :

Rubakov and Shaposhnikov, 1983

Akama, 1983



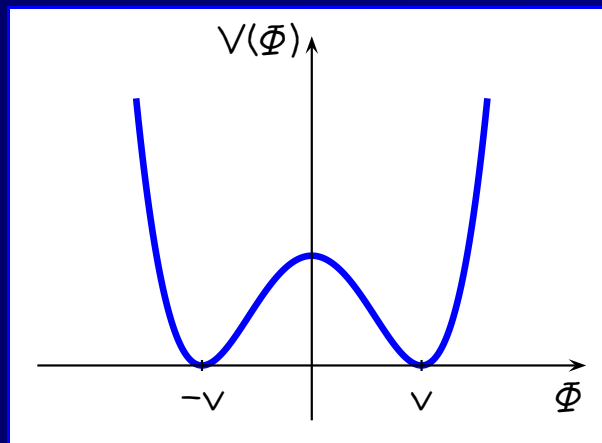
Matière (champs du MS) localisée sur la brane  
⇒ les dimensions supplémentaires visibles seulement dans les expériences à très hautes énergies

# Paroi de domaine

V. A. Rubakov and M. Shaposhnikov,  
"Do we live inside a domain wall?",  
Phys. Lett. B125 (1983) 136-138.

Action:

$$S = \int d^4x \, dt \left[ \frac{1}{2} \eta^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi - \frac{\lambda}{4} (\Phi^2 - v^2)^2 \right].$$

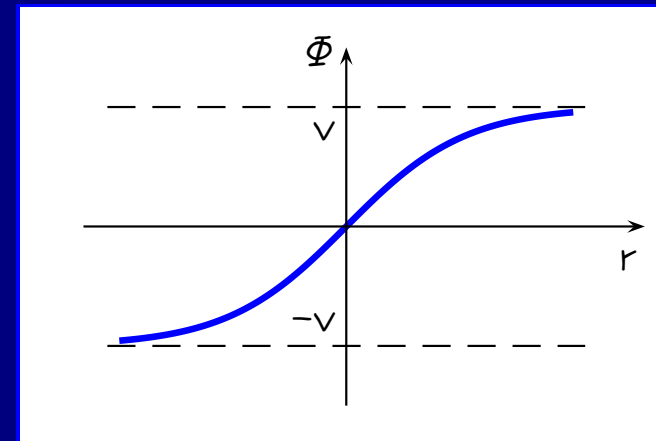
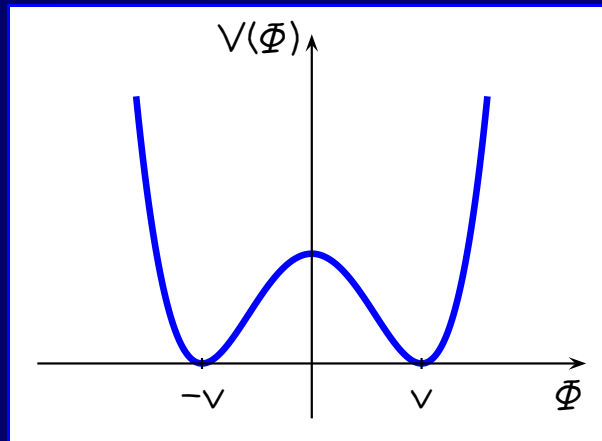


# Paroi de domaine

V. A. Rubakov and M. Shaposhnikov,  
"Do we live inside a domain wall?",  
Phys. Lett. B125 (1983) 136-138.

Action:

$$S = \int d^4x dr \left[ \frac{1}{2} \eta^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi - \frac{\lambda}{4} (\Phi^2 - v^2)^2 \right].$$



Configuration non-triviale : le "kink"

$$\Phi_c(r) = v \tanh(ar), \quad \text{où } a^2 = \lambda v^2 / 2.$$

## Paroi de domaine - Perturbations

Perturbations autour de la configuration  $\Phi_c$ :  $\varphi = \Phi - \Phi_c$   
peuvent être écrites comme

$$\varphi(x, r) = \sum_P u_P(x) \eta_P(r),$$

- $u_P(x)$  satisfont les équations Klein-Gordon (4D) habituelles

$$[\partial^\mu \partial_\mu + m^2] u_P(x) = 0, \quad \text{where } m^2 = p^\nu p_\nu \quad (\text{KG})$$

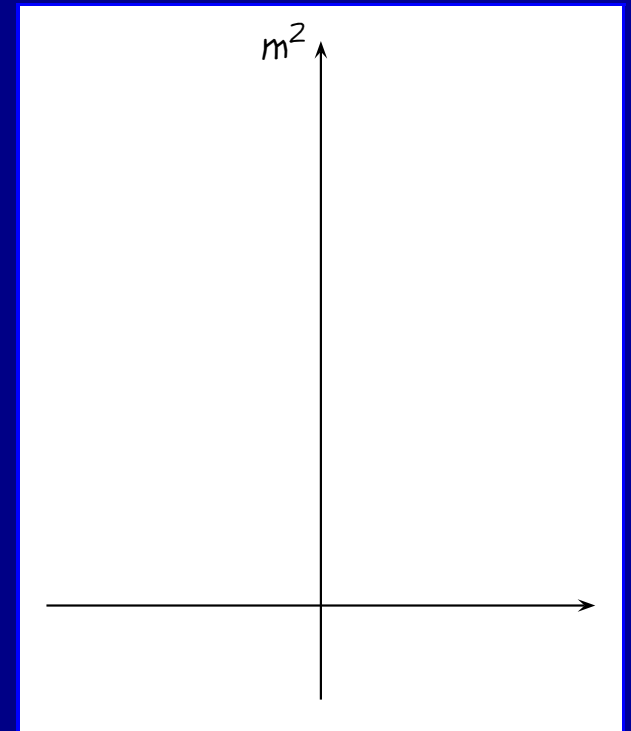
- $\eta_P(r)$  sont les modes normaux du kink

$$-\partial_r^2 \eta_P(r) + \lambda(3\Phi_c^2(r) - v^2) \eta_P(r) = m^2 \eta_P(r).$$

états liés  $\Leftrightarrow$  particules scalaires localisées  
sur la brane !

# Paroi de domaine - Spectre de perturbations

Spectre de  $\varphi$  :



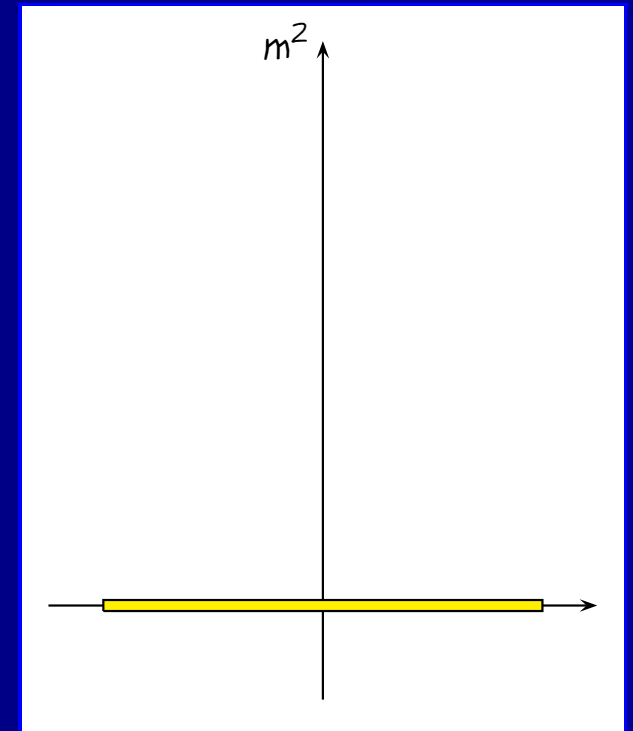
# Paroi de domaine - Spectre de perturbations

Spectre de  $\varphi$  :

- mode zéro ( $m = 0$ ):

$$\varphi_0(x, r) = \frac{\sqrt{3a}}{2} \frac{1}{\cosh^2(ar)} u_0(x)$$

localisé sur la paroi.





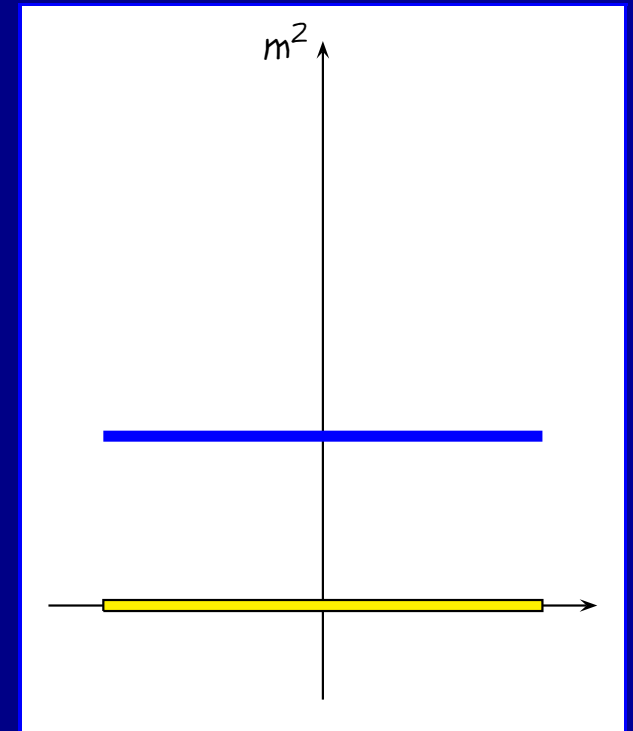
# Paroi de domaine - Spectre de perturbations

Spectre de  $\varphi$  :

- un mode lourd localisé de masse  $m^2 = 3a^2$
- mode zéro ( $m = 0$ ):

$$\varphi_0(x, r) = \frac{\sqrt{3a}}{2} \frac{1}{\cosh^2(ar)} u_0(x)$$

localisé sur la paroi.



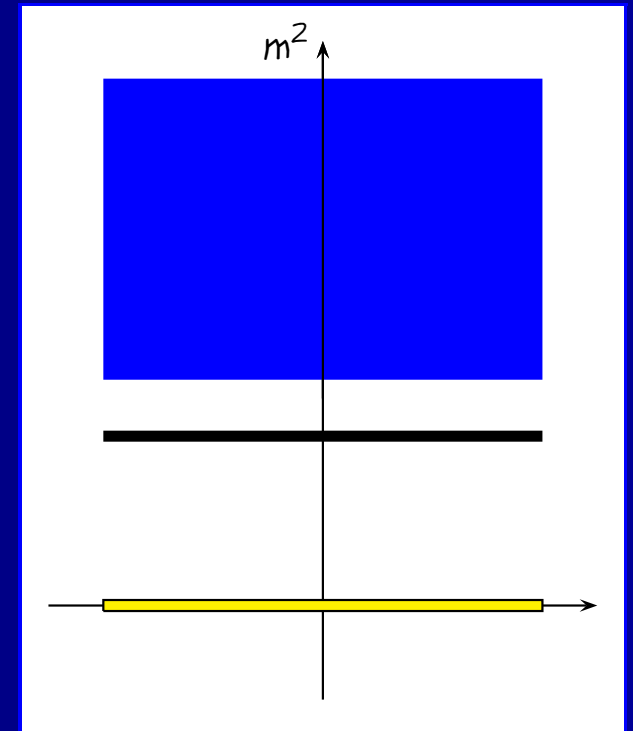
# Paroi de domaine - Spectre de perturbations

Spectre de  $\varphi$  :

- spectre continu à partir de  $m^2 = 4a^2$  (perturbations non-confinées à la brane)
- un mode lourd localisé de masse  $m^2 = 3a^2$
- mode zéro ( $m = 0$ ):

$$\varphi_0(x, r) = \frac{\sqrt{3a}}{2} \frac{1}{\cosh^2(ar)} u_0(x)$$

localisé sur la paroi.



## Accomplissements:

- Particules scalaires de masse nulle localisées sur la brane.
- Les fermions peuvent être localisés de manière naturelle – par l'intermédiaire d'une interaction de type Yukawa entre le kink et un fermion à 5D

⇒ Théorie avec des dimensions supplémentaires non-compactes dont la théorie effective à basse énergie est 4D !

## Accomplissements:

- Particules scalaires de masse nulle localisées sur la brane.
- Les fermions peuvent être localisés de manière naturelle – par l'intermédiaire d'une interaction de type Yukawa entre le kink et un fermion à 5D

⇒ Théorie avec des dimensions supplémentaires non-compactes dont la théorie effective à basse énergie est 4D !

## Défaut:

N'inclut pas de gravitation...

# Modèles branaires aujourd'hui

- Développements récents : gravitation peut être incorporée dans les modèles branaires

# Modèles branaires aujourd'hui

- Développements récents : gravitation peut être incorporée dans les modèles branaires
- Décllic : progrès récents de la théorie des cordes:  
D-branes - localisent la matière

Polchinski, 1995

# Modèles branaires aujourd'hui

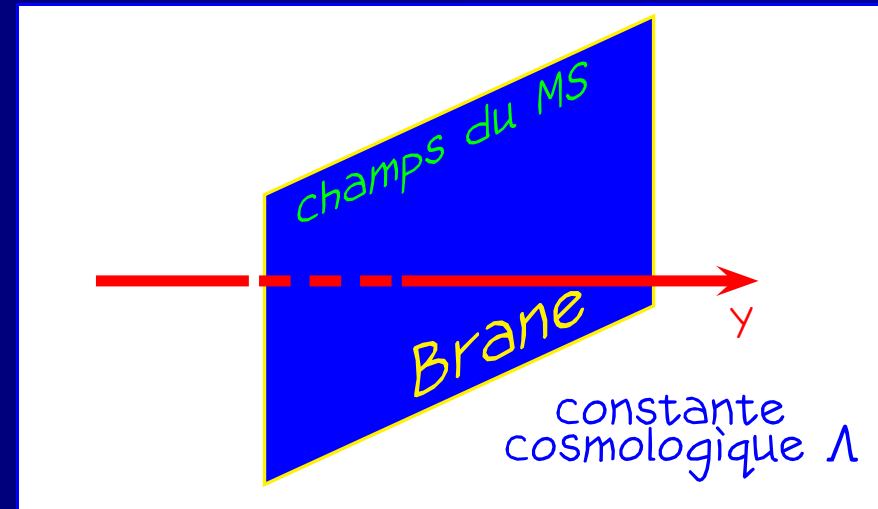
- Développements récents : gravitation peut être incorporée dans les modèles branaires
- Déclat : progrès récents de la théorie des cordes:  
D-branes - localisent la matière Polchinski, 1995
- Modèles phénoménologiques importants:
  - ADD - grandes dimensions supplémentaires plates Arkani-Hamed, Dimopoulos and Dvali, 1998
  - RS1 - dimensions repliées compactes Randall and Sundrum, 1999
  - RS2 - dimensions repliées non-compactes

# Modèle de Randall-Sundrum (RS2)

L. Randall and R. Sundrum,  
"An alternative  
to compactification",  
Phys. Rev. Lett. **83** (1999)

- **Cadre:**

brane d'épaisseur infinitésimale caractérisée par un seul paramètre: sa tension  $\sigma$ , plongée dans un espace-temps 5D du type anti-de Sitter

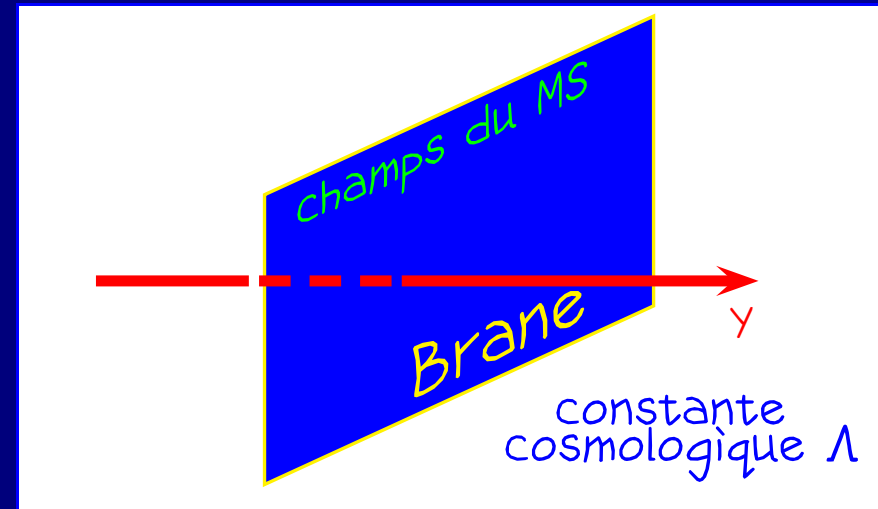




## Modèle de Randall-Sundrum (RS2)

- Cadre:

brane d'épaisseur infinitésimale caractérisée par un seul paramètre: sa tension  $\sigma$ , plongée dans un espace-temps 5D du type anti-de Sitter



- Géométrie "repliée" ("warped"):

$$ds^2 = a(y)^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2,$$

avec

- "warp factor":  $a(y) = e^{-k|y|}$ ,  $k = \sqrt{-\Lambda/6}$

- $\Lambda$  ajustée à  $\sigma$  pour obtenir l'invariance de Poincaré à 4D

# Modèle de Randall-Sundrum (RS2)

- Taille physique de la dimension supplémentaire finie

$$\Rightarrow M_{\text{Pl}}^2 = M^3 \int dy e^{-2k|y|} \quad \text{finie}$$

- Le mode zéro du graviton est localisé

# Modèle de Randall-Sundrum (RS2)

- Taille physique de la dimension supplémentaire finie

$$\Rightarrow M_{\text{Pl}}^2 = M^3 \int dy e^{-2k|y|} \quad \text{finie}$$

- Le mode zéro du graviton est localisé

⇒ Gravité Newtonienne possible, même en absence de compactification!

$$V_G(R) \approx G_N \frac{m_1 m_2}{R} \left[ 1 + \frac{2}{3k^2 R^2} \right], \quad R \gg 1/k$$

## Mot de la fin

Pour l'instant il n'y a pas de preuve que notre Univers ait plus de 4 dimensions, mais...

## Mot de la fin

Pour l'instant il n'y a pas de preuve que notre Univers ait plus de 4 dimensions, mais...

...même si cela paraît saugrenu, la théorie ultime décrivant toutes les interactions risque d'être définie dans un espace-temps avec des dimensions supplémentaires.

## Mot de la fin

Pour l'instant il n'y a pas de preuve que notre Univers ait plus de 4 dimensions, mais...

...même si cela paraît saugrenu, la théorie ultime décrivant toutes les interactions risque d'être définie dans un espace-temps avec des dimensions supplémentaires.

Peut-être bien que nous sommes dans la même situation que les habitants de Flatland...