Aspetti combinatorici dell'opera di Jakob Bernoulli

Emanuele Delucchi
SNSF / Université de Fribourg
emanuele.delucchi@unifr.ch

Centro Stefano Franscini,
Ascona, 20 Settembre 2016

ARS CONJECTANDI

(Jakob Bernoulli;1713)

Pars prima | **Pars secunda** | Pars tertia | Pars quarta

continens:

Doctrina de permutationibus & combinationibus

"… merito suo utilissima censenda est ars, **Combinatoria** dicta, …

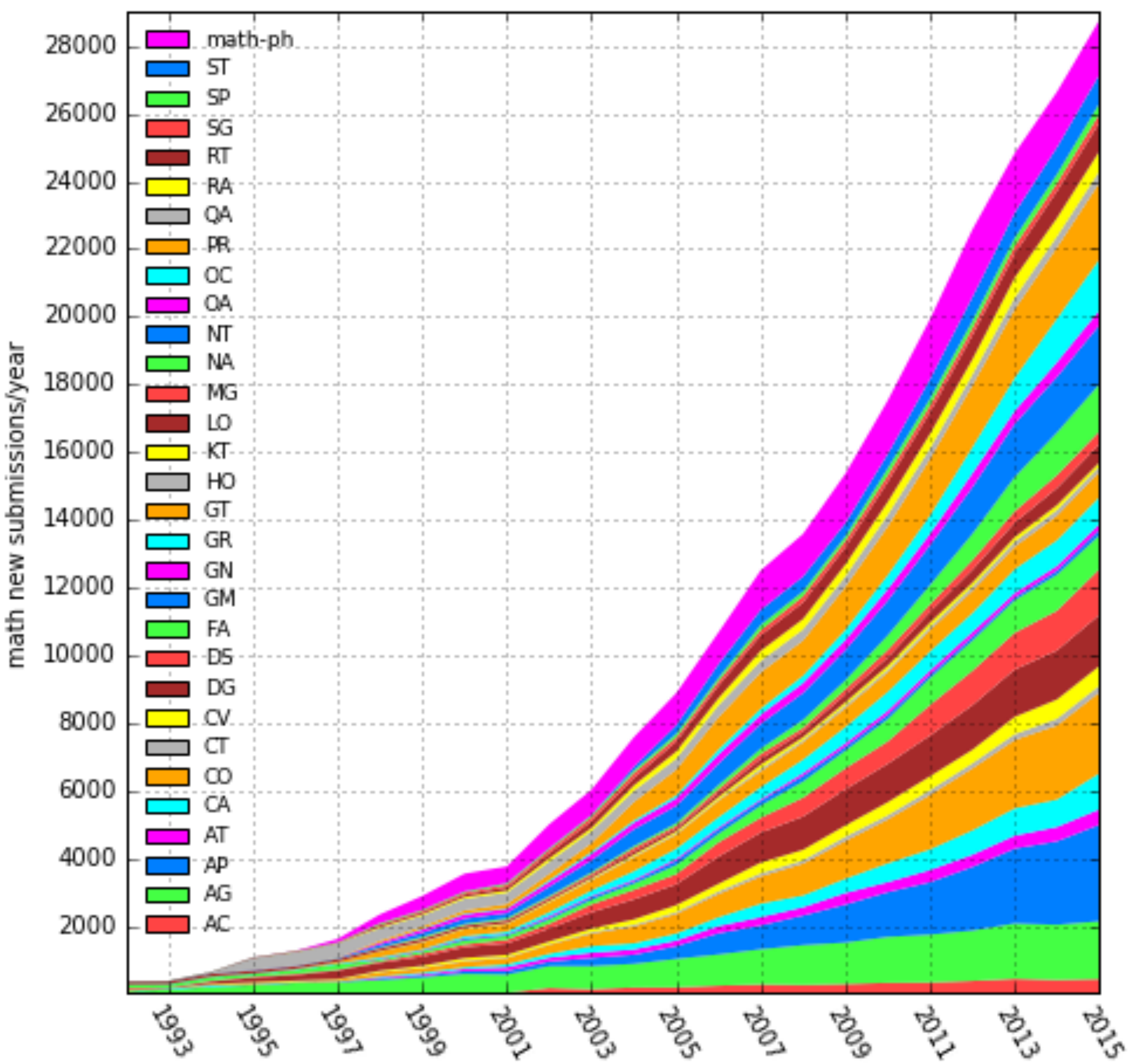
Cum itaque nondum plenum Artis systema habeamus,…

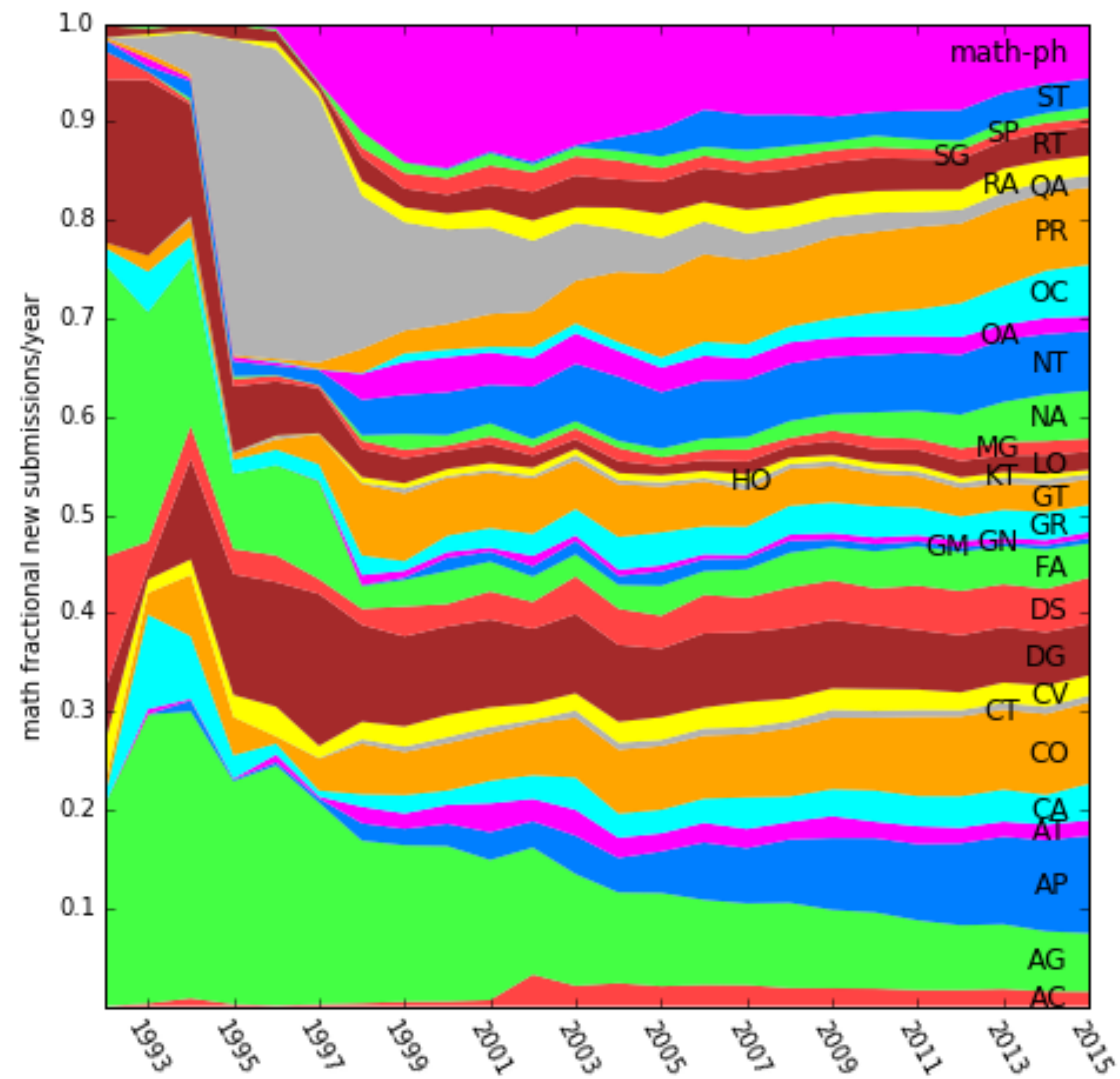
…visum est totam Doctrinam ab ovo ordiri ac […] **ex primis fundamentis** eruere;"

INTRODUZIONE

COMBINATORIA

(ArXiv.org, 31.12.2015)





INTRODUZIONE

“Every lecture should state one main point and repeat it over and over, like a theme with variations.” (G.-C. Rota)

Gli **aspetti strutturali** e le crescenti **ramificazioni** della combinatoria offrono interessanti spunti (anche) per il lavoro in classe.

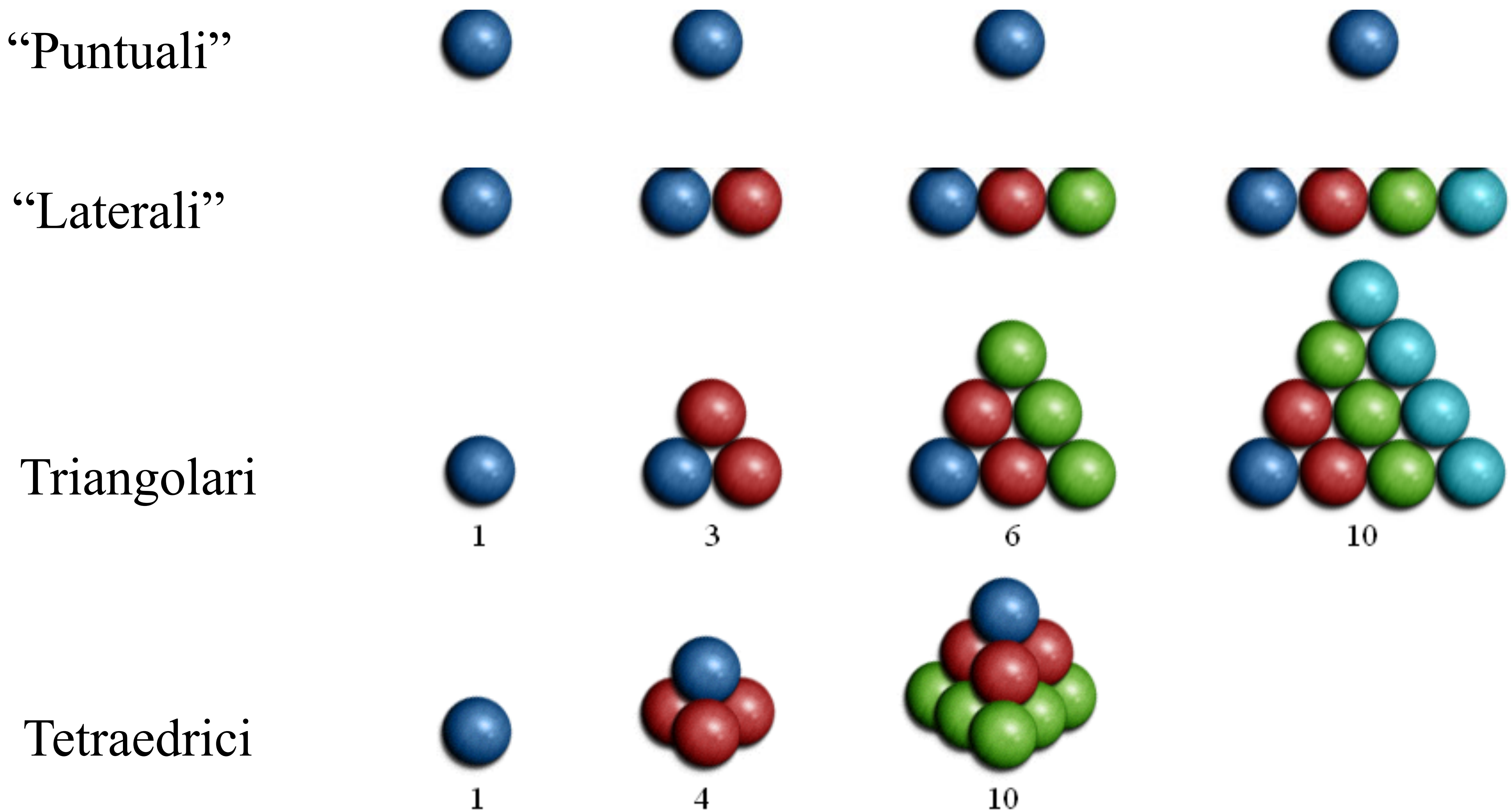
SOMMARIO

1. Fondamenti
   - classici (Jakob Bernoulli)
   - moderni* (Gian-Carlo Rota)

2. Ramificazioni (numeri di Bernoulli)
   - classiche
   - moderne* (V.I. Arnol'd)

* = XX. secolo

NUMERI FIGURATI



Regola generatrice delle righe: *sommare i precedenti nella riga superiore*.

COMBINATIONES

"Lista di tutti i sottoinsiemi (non vuoti) di {a,b,c,d}":

a

b . ab .

c . ac . bc . abc

d . ad . bd . cd . abd . acd . bcd . abcd

$$\stackrel{\text{not.}}{=} \binom{\{a,b,c\}}{2} = \binom{3}{2}$$

Numero di gruppi con lo stesso *esponente* in ogni riga:

1

1 . 1 .

1 . 2 . 1

1 . 3 . 3 . 1

1 . 4 . 6 . 4 . 1

Puntuali

Laterali

Triangolari

Fondamenti - Bernoulli

Tabula
Combinationum, seu Numerorum Figuratorum.

Numeri Rerum Combinandarum.	*Exponentes Combinationum.*											
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5.	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
6.	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
7.	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0
8.	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
9.	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
10.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
11.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
12.	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Proprietà 1. La colonna *k*-esima comincia con *k* zeri.

Proprietà 4. Ogni termine è la somma dei termini più alti della colonna precedente.

Tabula
Combinationum, seu Numerorum Figuratorum.

k Exponentes Combinationum.

Numeri Rerum Combinandarum. (*n*)

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
1.	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3.	1	2	1	0	0	0	0	0	0
4.	1	3	3	1	0	0	0	0	0
5.	1	4	6	4	1	0	0	0	0
6.	1	5	10	10	5	1	0	0	0
7.	1	6	15	20	15	6	1	0	0
8.	1	7	21	35	35	21	7	1	0
9.	1	8	28	56	70	56	28	8	1
10.	1	9	36	84	126	126	84	36	9
11.	1	10	45	120	210	252	210	120	45
12.	1	11	55	165	330	462	462	330	165

k=3

0
0
1
3
6
10

$$\frac{20}{6\times 10 = 60} \qquad \frac{1}{3}$$

Proprietà 12.

$$\frac{\sum \boxed{}}{n\, \boxed{}} = \frac{1}{k}$$

Osservazione (Johann B.).

Basta mostrare che:

se tale rapporto è *1/r* per una colonna,

allora è *1/(r+1)* per la prossima.

Lemma. In due colonne successive

se $$\frac{a + \dots + f}{nf} = \frac{1}{r}$$

allora $$\frac{q + \dots + g}{(n+1)g} = \frac{1}{r+1}$$

$$n\left\{\begin{array}{ccc} a & -- & 0 \\ b & -- & g \\ c & -- & h \\ d & -- & i \\ e & -- & l \\ f & -- & p \\ & & q \end{array}\right\}n+1$$

Dimostrazione.

$$q + p + \ldots + g \overset{\boxed{\text{Proprietà 4 + ipotesi}}}{=} \frac{nf}{r} + \frac{(n-1)e}{r} + \ldots \frac{(n-5)a}{r} \overset{\boxed{\text{Proprietà 4}}}{=} \frac{nq - p - \ldots - g}{r}$$

$$(r+1)(q + p + \ldots + g) = nq - p - \ldots - g + (q + p + \ldots + g) = (n+1)q$$

Tabula
Combinationum, seu Numerorum Figuratorum.

k *Exponentes Combinationum.*

Numeri Rerum Combinandarum.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5.	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
6. n	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
7.	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0
8.	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
9.	1	8	28									
10.	1	9	36									
11.	1	10	45									
12.	1	11	55									

$$\frac{\boxed{}}{n\,\boxed{}} = \frac{1}{k}$$

$$\boxed{} = \frac{n}{k}\,\boxed{} = \frac{n}{k}\,\boxed{} = \frac{n}{k}\,\frac{n-1}{k-1}\,\boxed{}$$

Corollario.

1. La somma dei primi n termini della colonna k vale $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$

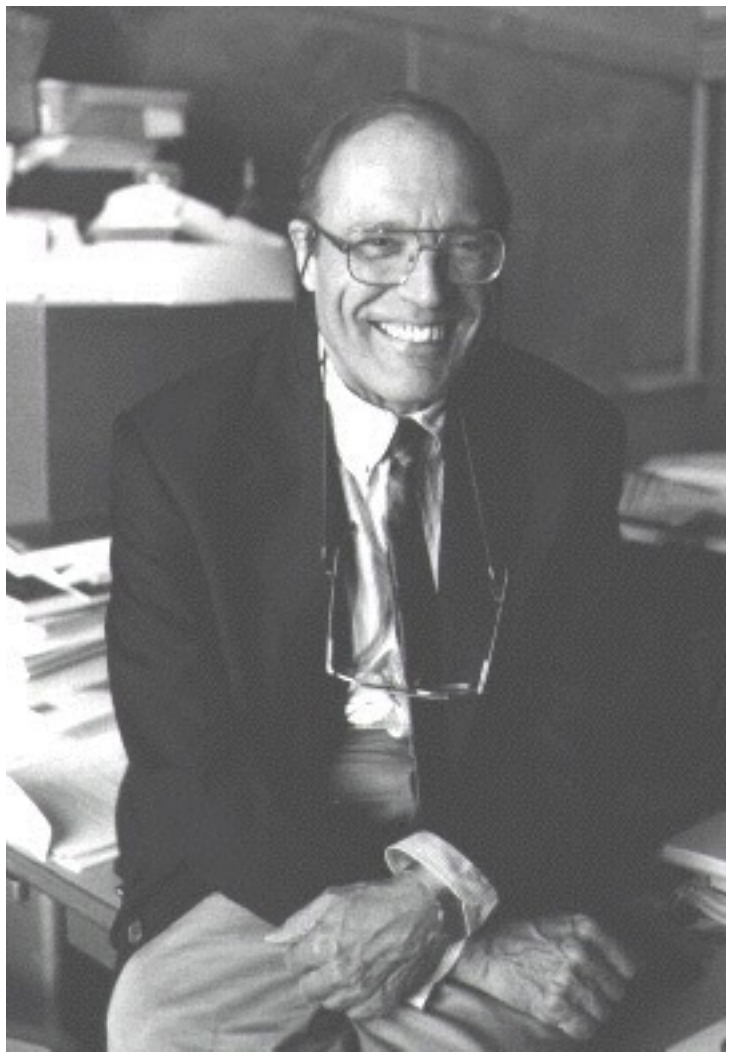
2. Dal termine (n+1) della colonna (k+1) otteniamo $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

SOMMARIO

1. Fondamenti
    - classici (Jakob Bernoulli)
    - moderni* (Gian-Carlo Rota)

2. Ramificazioni (numeri di Bernoulli)
    - classiche
    - moderne* (V.I. Arnol'd)

GIAN-CARLO ROTA



Vigevano, 1932 - Cambridge, MA, 1999

Prof. di **matematica applicata e filosofia**, MIT

Temi di ricerca:

analisi funzionale, combinatoria / fenomenologia.

Raccolta di scritti “interdisciplinari”:

*Indiscrete Thoughts (*Birkhäuser)

GIAN-CARLO ROTA

On the foundations of combinatorial theory:

I. The theory of Möbius functions (*Z. Wahrscheinlichkeitstheorie,* 1964)

II. Combinatorial geometries

III. Theory of binomial enumeration

IV. Finite vector spaces and Eulerian generating functions

V. Eulerian differential operators

VI. The idea of generating function

VII. Symmetric functions through the theory of distribution and occupancy

VIII. Finite operator calculus

IX. Combinatorial methods in invariant theory

X. A categorical setting for symmetric functions

"THE TWELVEFOLD WAY"

Siano A, B insiemi (finiti) di cardinalità $|A| = k$, $|B| = n$.

Idea: $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ = numero di k-sottoinsiemi di B

= numero di *funzioni iniettive* $A \longrightarrow B$

a meno di una permutazione di A.

= card $\{ f \circ S_n \mid f : A \longrightarrow B \quad \text{iniettiva}\}$

(Cf. ``*Formulaires et tables*" !)

"THE TWELVEFOLD WAY"

Siano A, B insiemi (finiti) di cardinalità $|A|=k$, $|B|=n$,

	Qualsiasi	*Iniettiva*	*Suriettiva*
f			
$f \circ S_n$		$\frac{n!}{k!(n-k)!}$	
$S_n \circ f$			
$S_n \circ f \circ S_n$			

"THE TWELVEFOLD WAY"

Siano A, B insiemi (finiti) di cardinalità $|A|=k$, $|B|=n$,

	Qualsiasi	*Iniettiva*	*Suriettiva*
f	n^k	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$	$n!\ S(k,n)$
$f \circ S_n$	$\dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	$\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$\dfrac{(k-1)!}{(k-n)!(n-1)!}$
$S_n \circ f$	$S(k,1) + \ldots + S(k,n)$	1 se $k \leq n$ 0 se $k > n$	$S(k,n)$
$S_n \circ f \circ S_n$	$p_1(k) + \ldots + p_n(k)$	1 se $k \leq n$ 0 se $k > n$	$p_n(k)$

S(k,n): ``numeri di Stirling'' (… principio di inclusione-esclusione, etc.)

$p_n(k)$: numero di partizioni $n = m_1 + \ldots + m_k$, $m_i \neq 0$ (num. pentagonali, etc.)

SOMMARIO

1. Fondamenti
   - classici (Jakob Bernoulli)
   - moderni* (Gian-Carlo Rota)

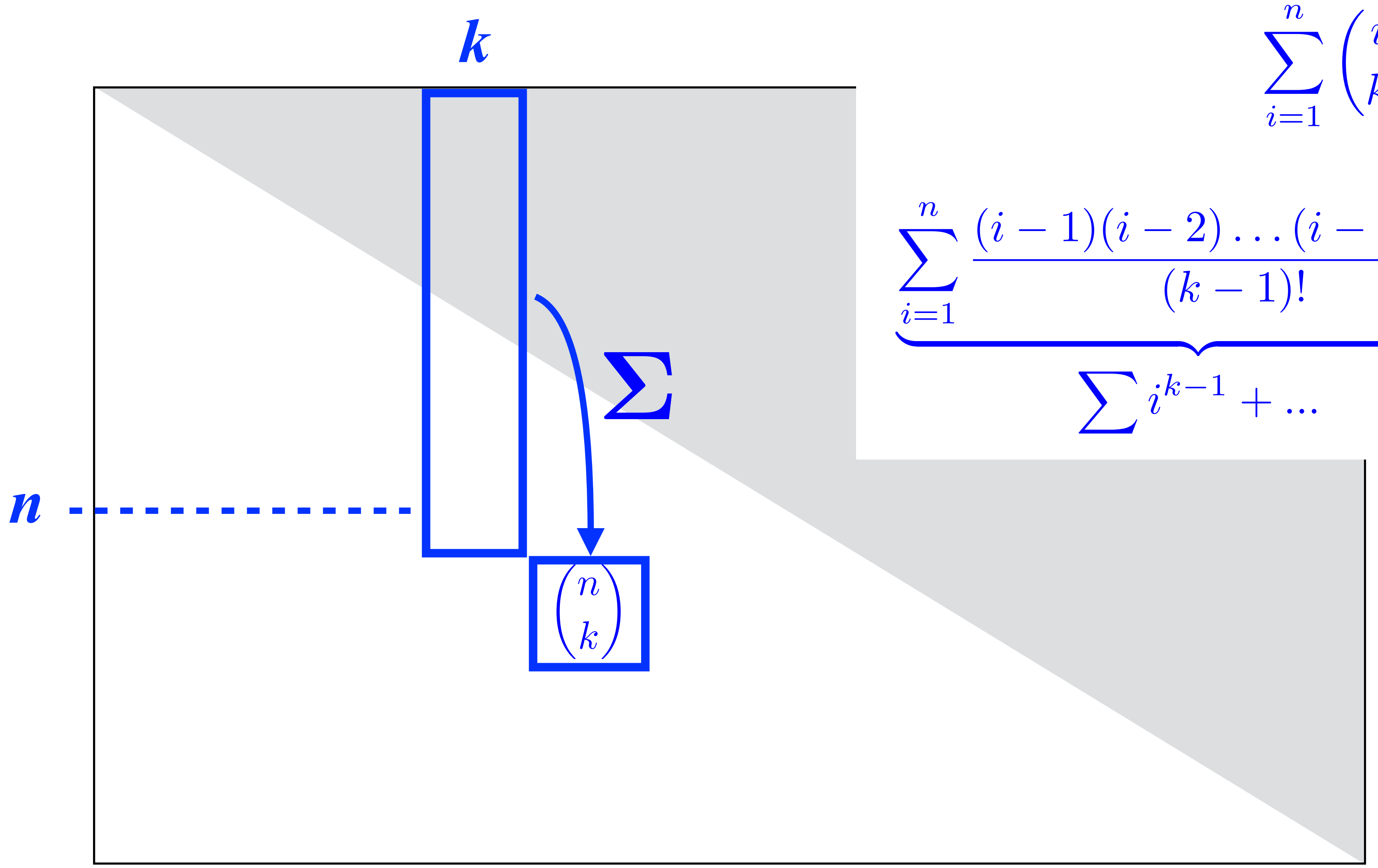
2. Ramificazioni (numeri di Bernoulli)
   - classiche
   - moderne* (V.I. Arnol'd)

SOMME DI POTENZE

Problema: Calcolare

$$S_p(n) := 1^p + 2^p + \ldots + n^p$$

Jacob torna ai suoi numeri figurati:



$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} = \binom{n}{k}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i-2)\ldots(i-k+1)}{(k-1)!}}_{\sum i^{k-1} + \ldots} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

SOMME DI POTENZE

"*... qui legem progressionis inibi attentuis inspexerit, eundem etiam continuare poterit*":

$$S_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k} B_k \, n^{p+1-k}$$

dove i numeri B_1, B_2, etc, si calcolano ricorsivamente:

$B_1 = 1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = - 1/30$, $B_5 = 0$, ….

Nota: **Johann Faulhaber** (1580-1635) aveva espresso, per $p \leq 17$,

$S_p(n)$ come polinomio in n, senza però notare l'**uniformità** dei coefficienti

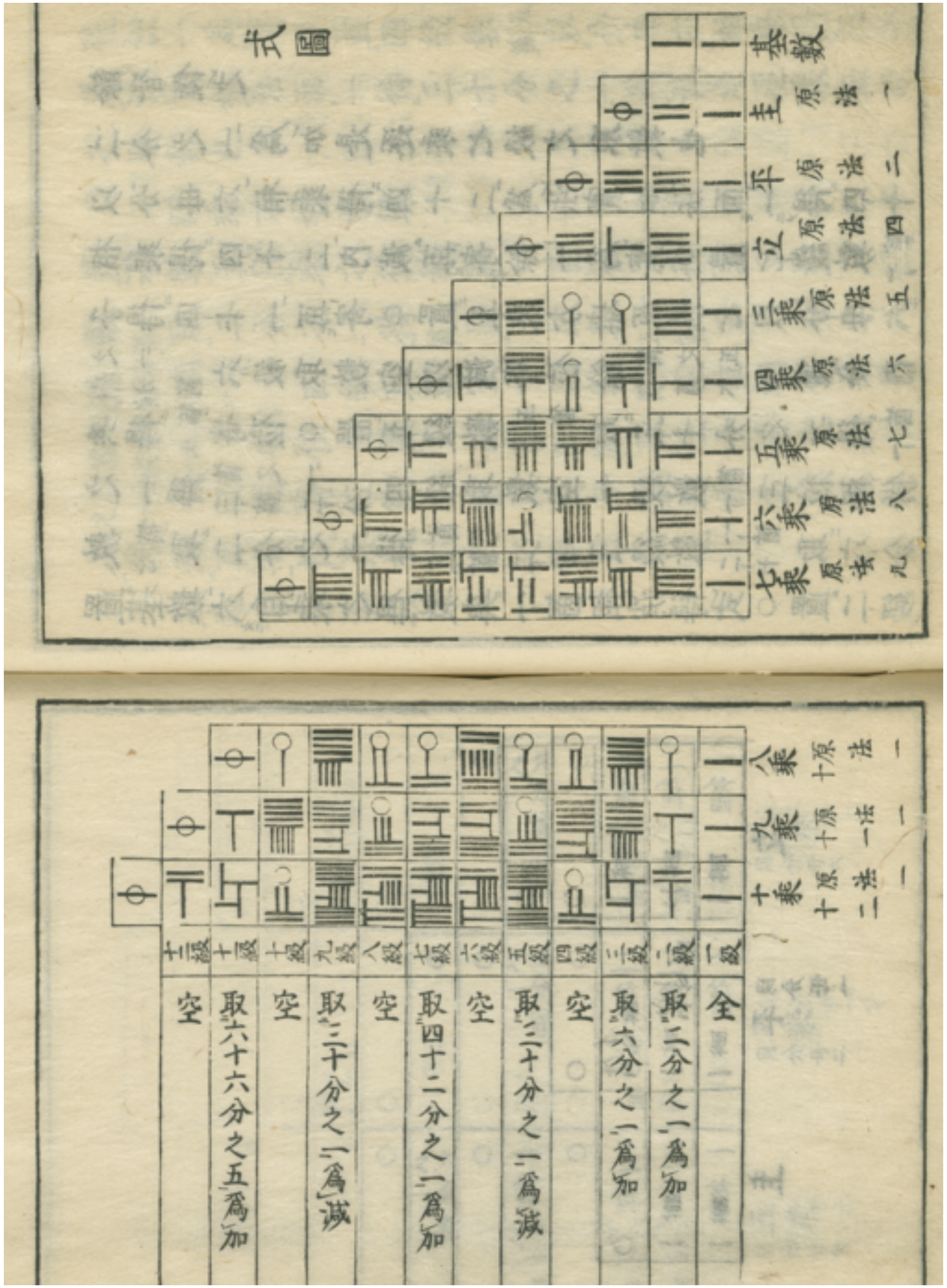
WASAN

Kowa Seki (1642? - 1708)

riporta nel suo trattato

Katsuyo Sampō (**1712**)

- il triangolo delle combinazioni (notazione a bastoncini)
- I numeri di Bernoulli (notazione cinese)



SOMME DI POTENZE

"... *qui legem progressionis inibi attentuis inspexerit, eundem etiam continuare poterit*":

$$S_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k} B_k \, n^{p+1-k}$$

dove i numeri B_1, B_2, etc, si calcolano ricorsivamente:

infatti, confrontando i coefficienti in $S_p(n) = S_p(n - 1) + n^p$
e ponendo $B_0 = 1$, abbiamo per ogni $p > 0$

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p+1}{k} B_k = 0$$

FUNZIONI GENERATRICI

Un metodo per investigare sequenze numeriche come B_n consiste nello studiare la *serie formale* associata, che nel nostro caso soddisfa

$$\sum_{i\geq 0} B_i \frac{t^i}{i!} = \frac{t}{1-e^{-t}}$$

Dimostrazione:

$$(1-e^{-t})\sum_{i\geq 0} B_i \frac{t^i}{i!} = -\left(\sum_{j\geq 1} \frac{(-t)^j}{j!}\right)\left(\sum_{i\geq 0} B_i \frac{t^i}{i!}\right)$$

$$= \sum_{m\geq 1} \underbrace{\left(\sum_{k\geq 0}^{m-1} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} B_k\right)}_{=0 \text{ per } m>1} \frac{t^m}{m!} = t$$

FUNZIONI GENERATRICI

"Premio" per la fatica fatta: **$B_{2k+1} = 0$ per $k > 0$**

Dimostrazione: ricordiamo dapprima che $B_1=1/2$, quindi

$$\frac{t}{1-e^{-t}} = 1 + \frac{t}{2} + \sum_{i \geq 2} B_i \frac{t^i}{i!}$$

Concludiamo notando che

$$1 + \sum_{i \geq 2} B_i \frac{t^i}{i!} = \frac{t}{1-e^{-t}} - \frac{t}{2} = \frac{t}{2} \frac{(1+e^{-t})}{(1-e^{-t})}$$

è una funzione *pari!*

dispari *dispari*

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Dalla funzione generatrice agli sviluppi di funzioni trigonometriche:

$$\boxed{\cot(t)} = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \frac{2i}{e^{it} - e^{-it}} = i \frac{e^{i2t} + 1}{e^{i2t} - 1} = i(1 + \underline{\frac{2}{e^{i2t} - 1}})$$

$$t \cot(t) = it - \underline{\frac{2it}{1 - e^{-i2t}}} = it - \sum_{j \geq 0} B_j \frac{(2it)^j}{j!}$$

$$\cot(t) = -\frac{1}{t} + \sum_{n \geq 1} \boxed{B_{2k} \frac{2^{2k-1}(-1)^k}{k}} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

INTERPRETAZIONI COMBINATORIE

Un'*interpretazione combinatoria* di una sequenza numerica $x_1, x_2, \ldots$

è una famiglia di insiemi $X_1, X_2, \ldots$ tale che

$$x_i = |\, X_i \,| \text{ per tutti gli } i.$$

I nostri numeri di Bernoulli sono, oltre che razionali, anche a volte negativi: bisogna prenderla un po' alla larga…

INTERPRETAZIONI COMBINATORIE

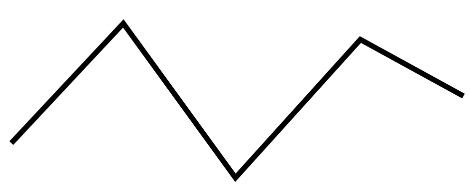
Sia n un numero naturale. Una *permutazione alternante* di n è un ordinamento totale

$$a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n$$

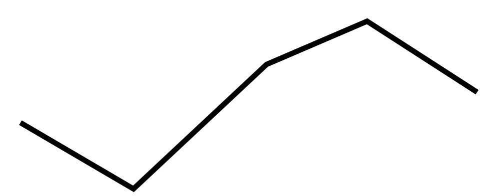
dei numeri 1, 2, …, n, tale che le differenze $a_{i+1} - a_i$ alternano in segno.

Esempio (n = 5):

2 5 1 4 3 alternante,



2 1 4 5 3 non alternante.

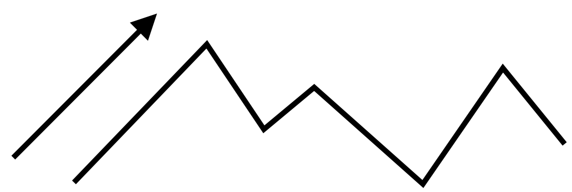


Chiamiamo:

$P_a(n)$ l'insieme delle permutazioni alternanti di n,

INTERPRETAZIONI COMBINATORIE

$$\mathbf{P}_a(\boldsymbol{n}) \quad = \quad \mathbf{P}_a(\boldsymbol{n})^+ \quad \cup \quad \mathbf{P}_a(\boldsymbol{n})^-$$



Esercizio: Trovare una bigezione $P_a(n)^+ \longrightarrow P_a(n)^-$

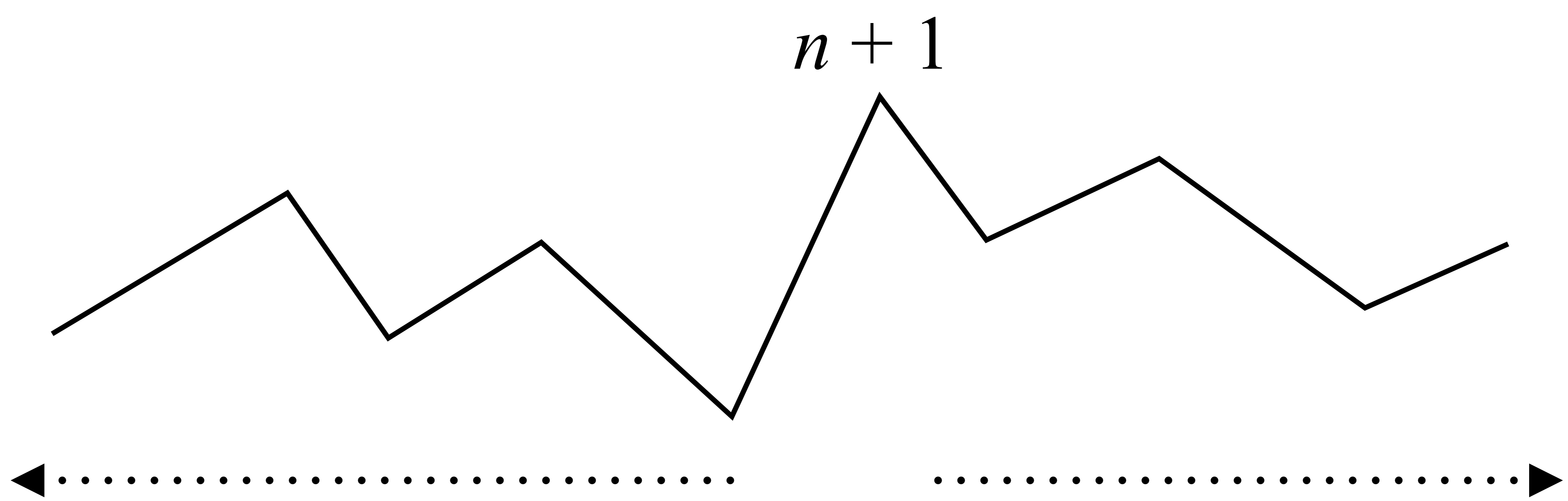
$$\mathbf{A_n} := \ | \, P_a(n)^+ \, | = | \, P_a(n)^- \, |$$

$$(= | \, P_a(n)^+ \, |/2 \text{ se } n > 1)$$

Attenzione! $\quad \mathbf{A_0} = \ | \, P_a(0)^+ \, | = | \, P_a(0)^- \, | = | \, P_a(0) \, | \mathbf{= 1}$

INTERPRETAZIONI COMBINATORIE

Consideriamo una permutazione alternata di n+1 elementi



permutazione in $P_a(k)^+$ "applicata" a k elementi scelti in $\{1,\ldots, n\}$

permutazione in $P_a(n\text{-}k)^+$ "applicata" agli altri n-k elementi

Otteniamo una bigezione

$$P_a(n+1) \longleftrightarrow \biguplus_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} X \subseteq [n] \\ |X| = k \end{array} \right\} \times P_a(k)^+ \times P_a(n-k)^+$$

Interpretazioni combinatorie

$$|P_a(n+1)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |P_a(k)^+||P_a(n-k)^+|$$

$$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_n A_{n-k}$$

$$\sum_{n\geq 1} 2A_{n+1} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_n A_{n-k} \frac{t^n}{n!}$$

$$2\frac{d}{dt}\left(\sum_{n\geq 0} A_n \frac{t^n}{n!}\right) = \left(\sum_{n\geq 0} A_n \frac{t^n}{n!}\right)^2 - 1$$

INTERPRETAZIONI COMBINATORIE

Per la funzione

$$y(t) := \sum_{n \geq 0} A_n \frac{t^n}{n!}$$

Otteniamo il problema ai valori iniziali

$$2y' = y^2 - 1, \qquad y(0) = A_0 = 1$$

Si verifica che una soluzione è

$$y(t) = \tan(t) + \sec(t)$$

E in questo caso anche l'unicità si può verificare "a mano" (!).

INTERPRETAZIONI COMBINATORIE

Per l'unicità della soluzione di

$$2y' = y^2 - 1, \qquad y(0) = A_0 = 1$$

Stimiamo la differenza tra due soluzioni y_1, y_2 nell'intervallo $[0, \varepsilon]$, $0<\varepsilon<\pi/2$

$$y_1(t) - y_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^t y_1(u)^2 - y_2(u)^2 du = \frac{1}{2}\int_0^t (y_1(u) + y_2(u))(y_1(u) - y_2(u))du$$

$$\underbrace{||y_1 - y_2||_\infty}_{\max_{t\in[0,\epsilon]} ||y_1(t)-y_2(t)||} \leq \frac{\epsilon}{2}||y_1 + y_2||_\infty ||y_1 - y_2||_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}M||y_1 - y_2||_\infty$$

$$M = \overbrace{||y_1||_\infty + ||y_2||_\infty}$$

se $\varepsilon M/2 < 1$ (oppure se $M = 0$), abbiamo finito.

Altrimenti si scelga $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon M/2 < 1$ e si ripeta l'argomento.

INTERPRETAZIONI COMBINATORIE

Da $y(t) = \tan(t) + \sec(t)$, per ragioni di parità,

$$\sum_{k\geq 0} A_{2k+1} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \tan(t)$$

Ricordiamo: i B_k appaiono nello sviluppo della cotangente.
Con l'identità trigonometrica

$$\cot(t) - 2\cot(2t) = \tan(t)$$

otteniamo l'interpretazione combinatoria:

$$\boxed{B_{2k} = \frac{k(-1)^k}{2^{2k-1}(2^{2k}-1)} A_{2k-1}}$$

numero di
permutazioni alternanti
di $2k$ - 1 elementi
con "salita" iniziale

SOMMARIO

1. Fondamenti
   - classici (Jakob Bernoulli)
   - moderni* (Gian-Carlo Rota)

2. Ramificazioni (numeri di Bernoulli)
   - classiche
   - moderne* (V.I. Arnol’d)

TRIANGOLO DI SEIDEL - ARNOL'D

$$A_0$$

$$1$$

$$0 \rightarrow 1 \quad A_1$$

$$A_2 \quad 1 \leftarrow 1 \leftarrow 0$$

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \quad A_3$$

$$A_4 \quad 5 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 2 \leftarrow 0$$

$$0 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 16 \rightarrow 16 \quad A_5$$

$$A_6 \quad 61 \leftarrow 61 \leftarrow 56 \leftarrow 46 \leftarrow 32 \leftarrow 16 \leftarrow 0$$

$$0 \rightarrow 61 \rightarrow 122 \rightarrow 178 \rightarrow 224 \rightarrow 256 \rightarrow 272 \rightarrow 272$$

Regola: "ad ogni passo aggiungere il numero successivo della riga sopra".

TRIANGOLO DI SEIDEL - ARNOL'D

"Eulero" "Bernoulli"

$\sec(x)$ $\tan(x)$

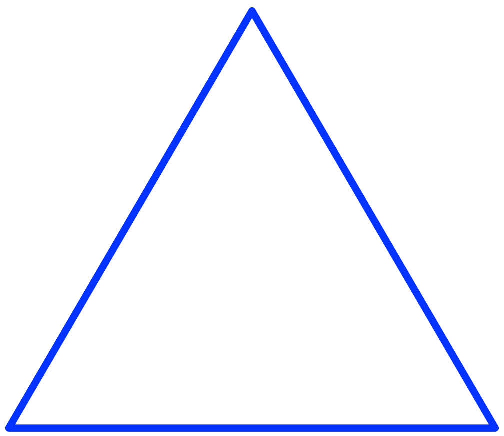
$$
\begin{array}{c}
1 \\
0 \rightarrow 1 \\
1 \leftarrow 1 \leftarrow 0 \\
0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \\
5 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 2 \leftarrow 0 \\
0 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 16 \rightarrow 16 \\
61 \leftarrow 61 \leftarrow 56 \leftarrow 46 \leftarrow 32 \leftarrow 16 \leftarrow 0 \\
0 \rightarrow 61 \rightarrow 122 \rightarrow 178 \rightarrow 224 \rightarrow 256 \rightarrow 272 \rightarrow 272
\end{array}
$$

Regola: "ad ogni passo aggiungere il numero successivo della riga sopra".

APPLICAZIONE (V.I. ARNOL'D, 1964)

Sia Δ^n il simplesso standard di dimensione n.

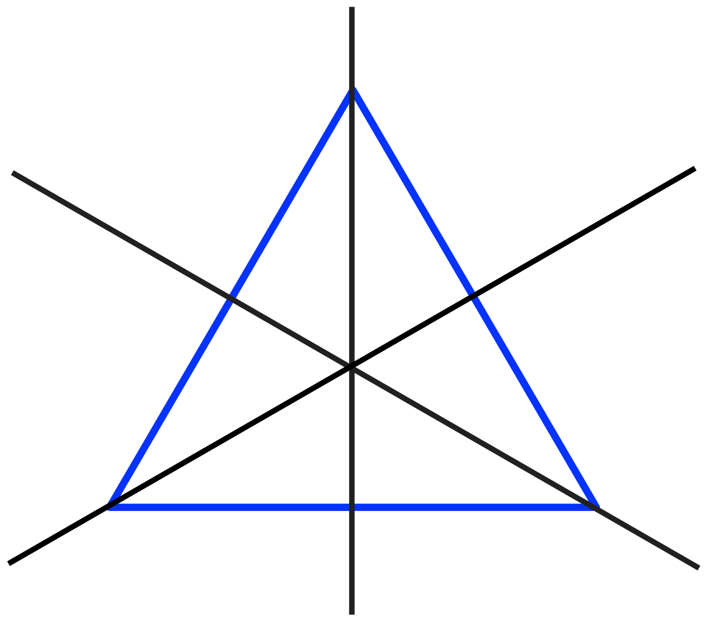
Δ^1 = segmento; Δ^2 = triangolo; Δ^3 = tetraedro; etc.



APPLICAZIONE (V.I. ARNOL'D, 1964)

Sia Δ^n il simplesso standard di dimensione n.

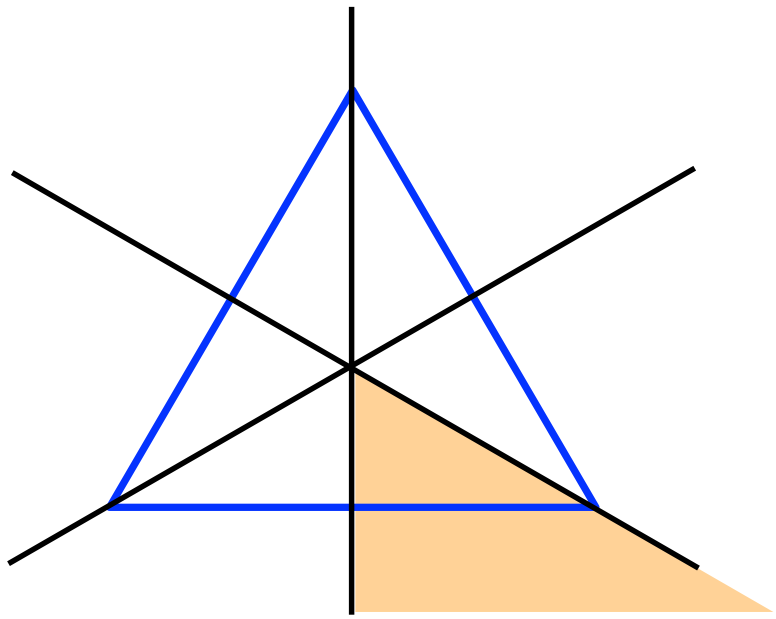
Δ^1 = segmento; Δ^2 = triangolo; Δ^3 = tetraedro; etc.



Consideriamo i piani di simmetria di Δ^n

("specchi" del sistema di Coxeter di tipo $A_{(n+1)}$).

APPLICAZIONE (V.I. ARNOL'D, 1964)



Sia Δ^n il simplesso standard di dimensione n.

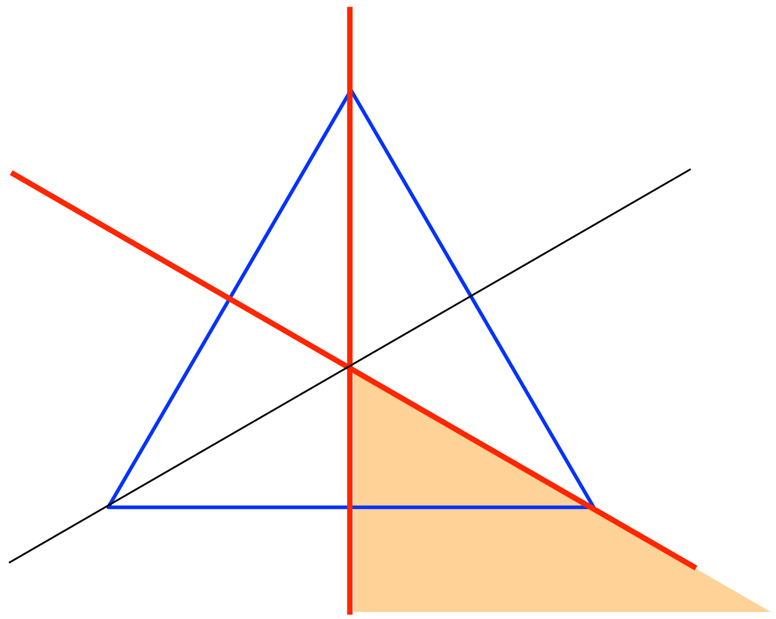
Δ^1 = segmento; Δ^2 = triangolo; Δ^3 = tetraedro; etc.

Consideriamo i piani di simmetria di Δ^n

("specchi" del sistema di Coxeter di tipo $A_{(n+1)}$).

Questi piani suddividono lo spazio in "camere".

APPLICAZIONE (V.I. ARNOL'D, 1964)



Sia Δ^n il simplesso standard di dimensione n.

Δ^1 = segmento; Δ^2 = triangolo; Δ^3 = tetraedro; etc.

Consideriamo i piani di simmetria di Δ^n

("specchi" del sistema di Coxeter di tipo $A_{(n+1)}$).

Questi piani suddividono lo spazio in "camere".

I "muri" di una camera raggruppano le altre camere in "grappoli";

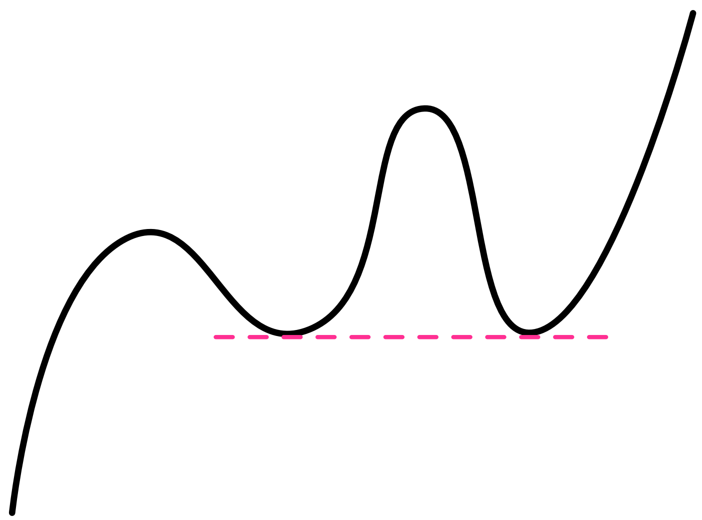
il numero massimo di camere in un grappolo è… $A_{(n+1)}$!

La stessa costruzione per altre famiglie di gruppi di Coxeter da' adito a

successioni numeriche descritte da altri "triangoli di Seidel-Arnol'd".

APPLICAZIONE (V.I. ARNOL'D, 1964)

Una funzione differenziabile
di una variabile reale è detta *degenere*
se ha un punto critico degenere
o due valori critici uguali.



L'insieme delle funzioni degeneri forma una ipersuperficie **H** dentro lo spazio delle funzioni differenziabili reali ad una variabile.

Ogni punto f di **H** possiede un intorno che è tagliato da **H** in un certo numero $K(f)$ di componenti connesse.

Per $f(x) = x^n$, questo numero è $\mathrm{K}(x^n) = \mathrm{A}_n$.

Per altri polinomi otteniamo sequenze generate da altri triangoli simili.

EPILOGO

Trattare la combinatoria con un approccio strutturale

- esibisce in modo naturale il “processo matematico”
- fornisce una palestra ideale (e ricca di esercizi/esempi) per concetti “fondamentali” e,

seguendo alcune delle sue molte ramificazioni,

- offre vie di accesso originali e fresche anche a temi “canonici”,
- porta velocemente a questioni aperte (e avanzate).