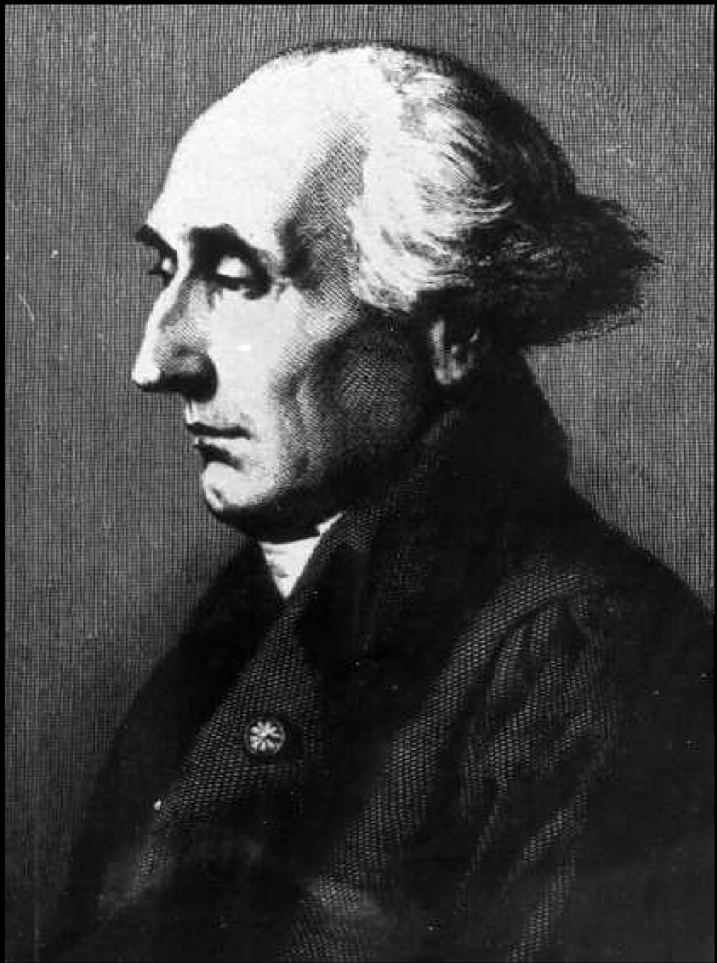
Lagrange Mechanics and Optimization

Lagrange Mechanics and Optimization



(1736 – 1813)

Am Kupfergraben 7, 10117 Berlin
(Photo: Iris Grötschel)

G. Wanner, Monte Verità, Sept. 20, 2016

(part I of trilogy on Constrained Optimization with M. Gander and F. Kwok)

Euler ⇔ **Lagrange** :

† 1783 St. Petersburg

1766

1741

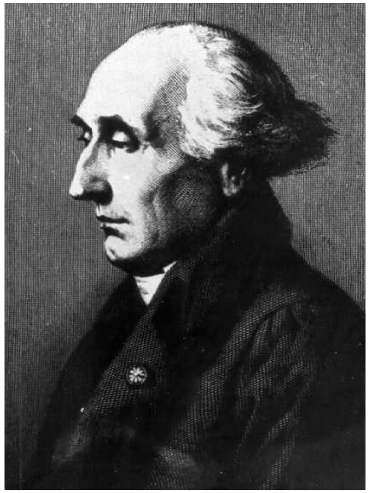
1727

Paris

† 1813

1787

Berlin



1766

Basel

✳ 1707

Torino

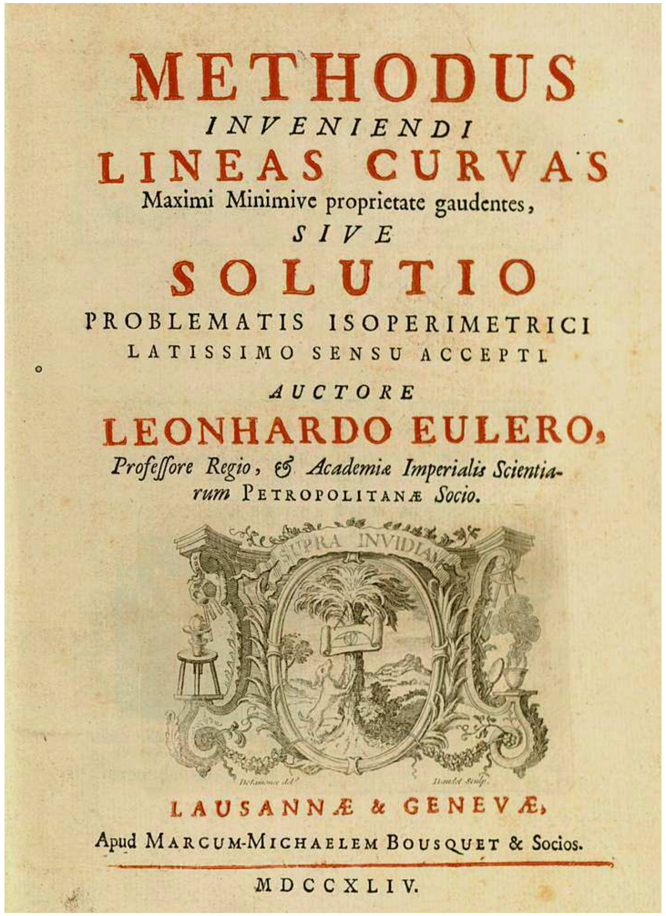
✳ 1736

In Berlin wrote

- Euler his *Methodus* (1744),
- Euler his *Inst. Calculi Integralis* (1768),
- Lagrange his *Méchanique* (1788) ...

... for **all three** stood the Bernoullis at the cradle

***Methodus* E65**

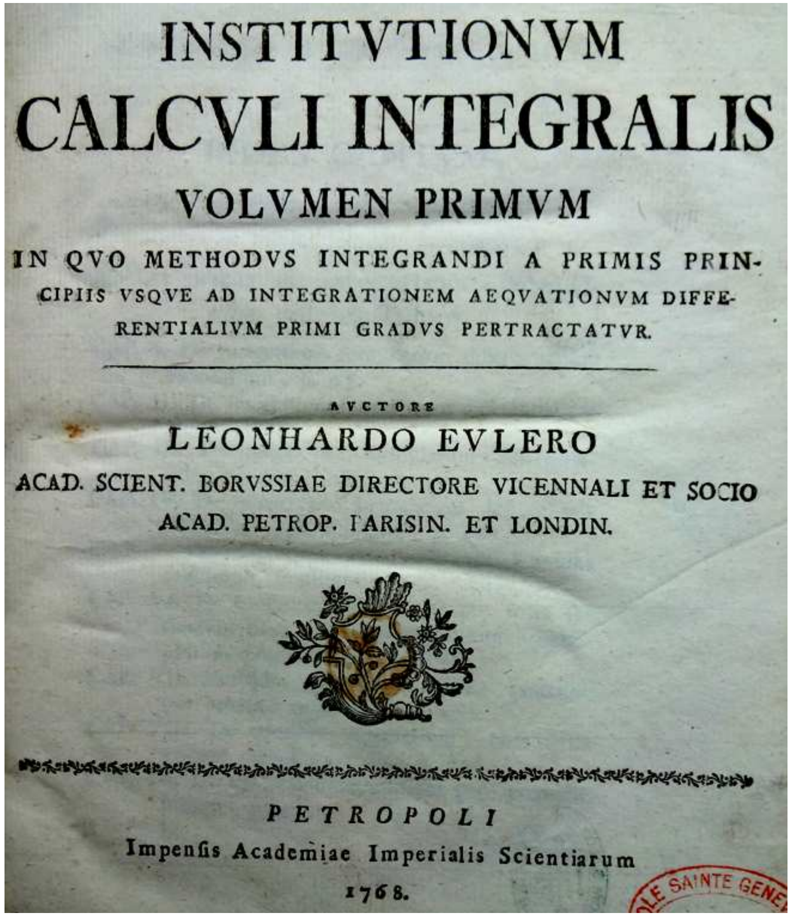


METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ *Socio.*

SUPRA INVIDIAM

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLIV.

***Calc.Integralis* E342**

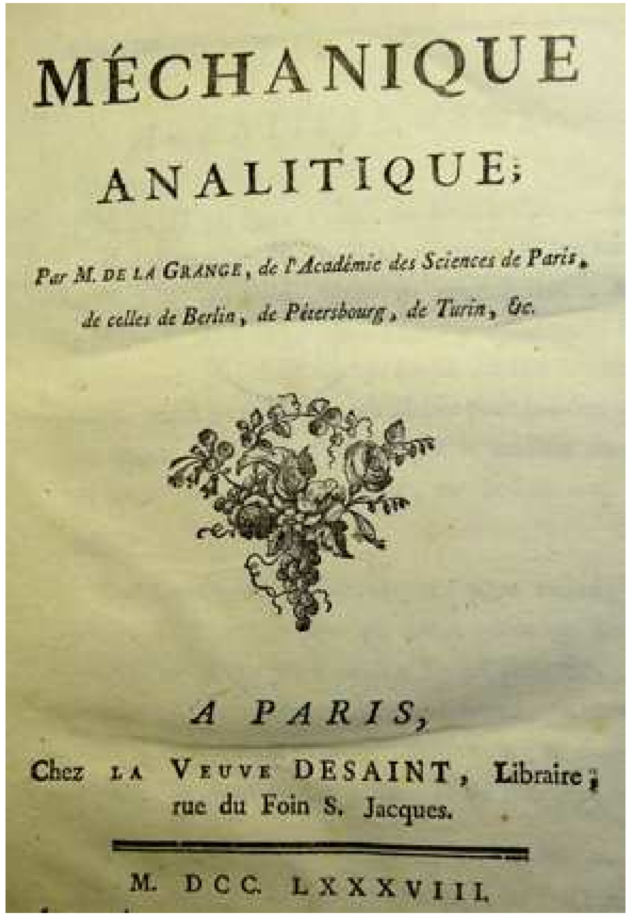


INSTITVTIONVM
CALCVLI INTEGRALIS
VOLVMEN PRIMVM
IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRINCIPIIS VSQVE AD INTEGRATIONEM AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS PERTRACTATVR.

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO
ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.

PETROPOLI
Impensis Academiae Imperialis Scientiarum
1768.

Lagr.*Méchanique*



MÉCHANIQUE
ANALITIQUE;
Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie des Sciences de Paris, de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.

A PARIS,
Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire; rue du Foin S. Jacques.
M. DCC. LXXXVIII.

1. Statics

4. Dynamics

3. Optimization

2. Diff.Equations

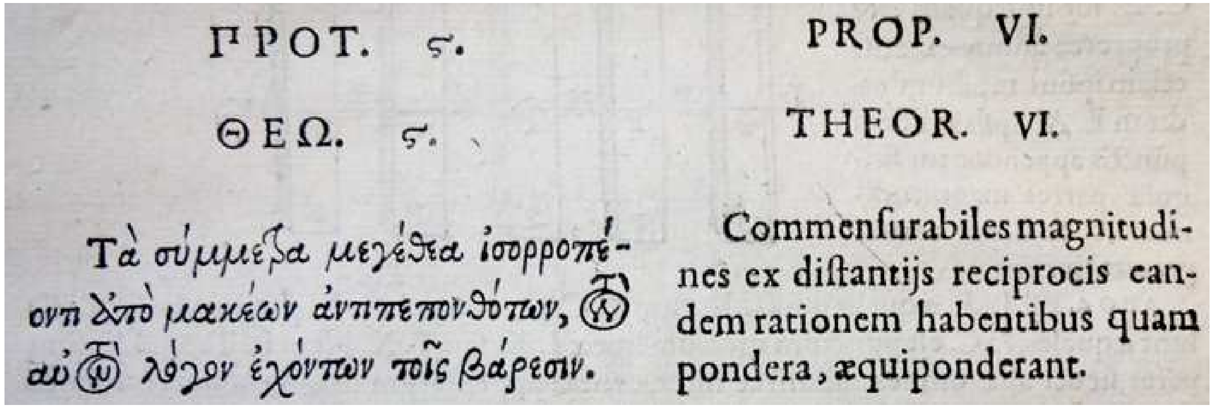
"Parmi tant de chefs-d'œuvre que l'on doit à son génie, sa *Mécanique* est sans contredit le plus grand, le plus remarquable et le plus important" (Delambre 1813).

1. Statics.


ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ, Η ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ,

(Opera omnia, printed 1615 (Paris, ed. David Rivault, BGE Ka459)


ΠΡΟΤ. ς.

ΘΕΩ. ς.

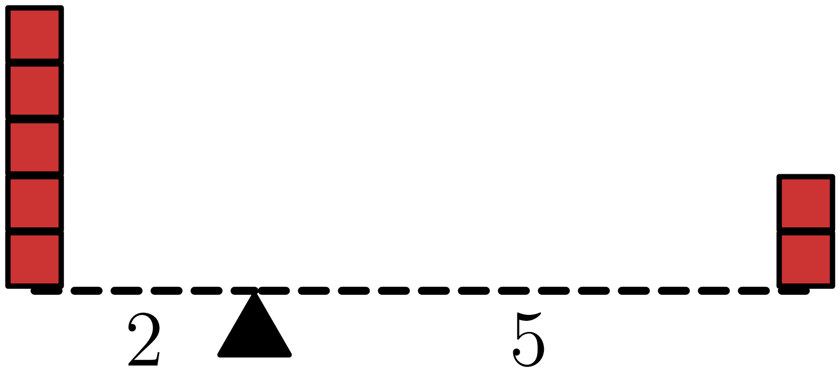
Τὰ σύμμετρα μεγέθεα ἰσορροπέοντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότων, ὧν αὐτῶν λόγον ἐχόντων τοῖς βάρεσιν.

PROP. VI.

THEOR. VI.

Commenſurabiles magnitudines ex diſtantijs reciprocis eandem rationem habentibus quam pondera, æquiponderant.

(Opera omnia, printed 1615 (Paris, ed. David Rivault, BGE Ka459)



Archimedes' original proof:

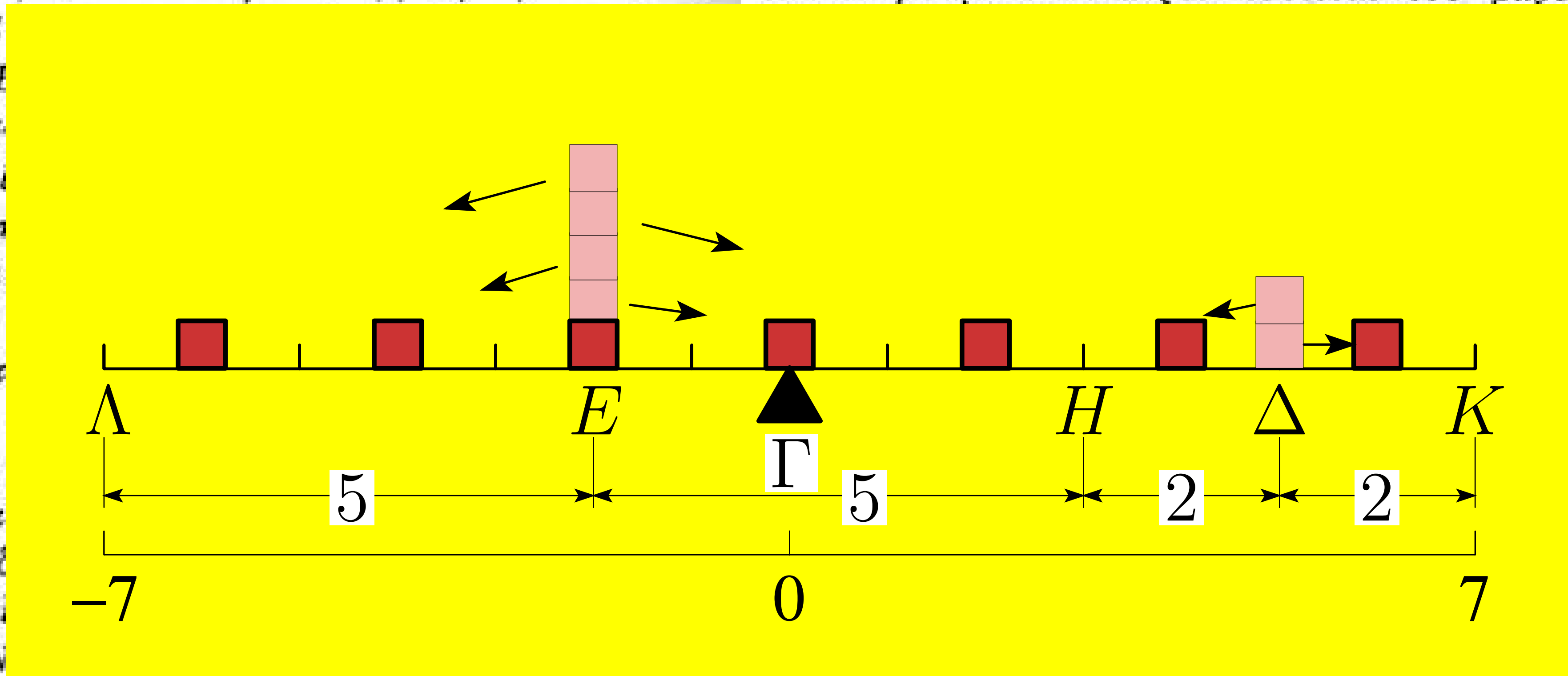
ἔστω σύμμετρα μεγέθεα τὰ Α, Β, ὧν κέντρα τὰ Α, Β, καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ ΕΔ, καὶ ἔστω, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ μᾶκος ποτὶ τὸ ΓΕ μᾶκος· δεικτέον, ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν Α, Β συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Γ.

ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ ποτὶ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ Α τῷ Β σύμμετρον, καὶ τὸ ΓΔ ἄρα τῷ ΓΕ σύμμετρον, τουτέστιν εὐθεῖα τᾷ εὐθείᾳ· ὥστε τῶν ΕΓ, ΓΔ ἐστι κοινὸν μέτρον. ἔστω δὴ τὸ Ν, καὶ κείσθω τᾷ μὲν ΕΓ ἴσα ἑκατέρα τᾶν ΔΗ, ΔΚ, τᾷ δὲ ΔΓ ἴσα ἁ ΕΛ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἁ ΔΗ τᾷ ΓΕ, ἴσα καὶ ἁ ΔΓ τᾷ ΕΗ· ὥστε καὶ ἁ ΛΕ ἴσα τᾷ ΕΗ. διπλασία ἄρα ἁ μὲν ΛΗ τᾶς ΔΓ, ἁ δὲ ΗΚ τᾶς ΓΕ· ὥστε τὸ Ν καὶ ἑκατέραν τᾶν ΛΗ, ΗΚ μετρεῖ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ ἡμίσεα αὐτᾶν. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως ἁ ΔΓ ποτὶ ΓΕ, ὡς δὲ ἁ ΔΓ ποτὶ ΓΕ, οὕτως ἁ ΛΗ ποτὶ ΗΚ· διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως ἁ ΛΗ ποτὶ ΗΚ. ὁσαπλασίων δέ ἐστιν ἁ ΛΗ τᾶς Ν, τοσαυταπλασίων ἔστω καὶ τὸ Α τοῦ Ζ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ ΛΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ Α ποτὶ Ζ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἁ ΚΗ ποτὶ ΛΗ, οὕτως τὸ Β ποτὶ Α· δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἁ ΚΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ Β ποτὶ Ζ· ἰσάκις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶν ἁ ΚΗ τᾶς Ν καὶ τὸ Β τοῦ Ζ. ἐδείχθη δὲ τοῦ Ζ καὶ τὸ Α πολλαπλάσιον ἐόν· ὥστε τὸ Ζ τῶν Α, Β κοινόν ἐστι μέτρον. διαιρεθείσας οὖν τᾶς μὲν ΛΗ εἰς τὰς τᾷ Ν ἴσας, τοῦ δὲ Α εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ἐν τᾷ ΛΗ τμάματα ἰσομεγέθεα τᾷ Ν ἴσα ἐσσεῖται τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ Α τμαμάτεσσιν ἴσοις ἐοῦσιν τῷ Ζ. ὥστε, ἂν ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τᾷ ΛΗ ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ Ζ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐντὶ τῷ Α, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ Ε· ἄρτιά τε γάρ ἐστι τὰ πάντα τῷ πλήθει, καὶ τὰ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Ε ἴσα τῷ πλήθει διὰ τὸ ἴσαν εἶμεν τὰν ΛΕ τᾷ ΗΕ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι κἄν, εἴ κα ἐφ' ἕκαστον τῶν ἐν τᾷ ΚΗ τμαμάτων ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ Ζ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ τοῦ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐσσεῖται τῷ Β, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται τὸ Δ· ἐσσεῖται οὖν τὸ μὲν Α ἐπικείμενον κατὰ τὸ Ε, τὸ δὲ Β κατὰ τὸ Δ. ἐσσεῖται δὴ μεγέθεα ἴσα ἀλλάλοις ἐπ' εὐθείας κείμενα, ὧν τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἴσα ἀπ' ἀλλάλων διέστακεν, [συγκείμενα] ἄρτια τῷ πλήθει· δῆλον οὖν, ὅτι τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἁ διχοτομία τᾶς εὐθείας τᾶς ἐχούσας τὰ κέντρα τῶν μέσων μεγεθέων. ἐπεὶ δ' ἴσαι ἐντὶ ἁ μὲν ΛΕ τᾷ ΓΔ, ἁ δὲ ΕΓ τᾷ ΔΚ, καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΛΓ ἴσα τᾷ ΓΚ· ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ σαμεῖον. τοῦ μὲν ἄρα Α κειμένου κατὰ τὸ Ε, τοῦ δὲ Β κατὰ τὸ Δ, ἰσορροπησοῦντι κατὰ τὸ Γ.

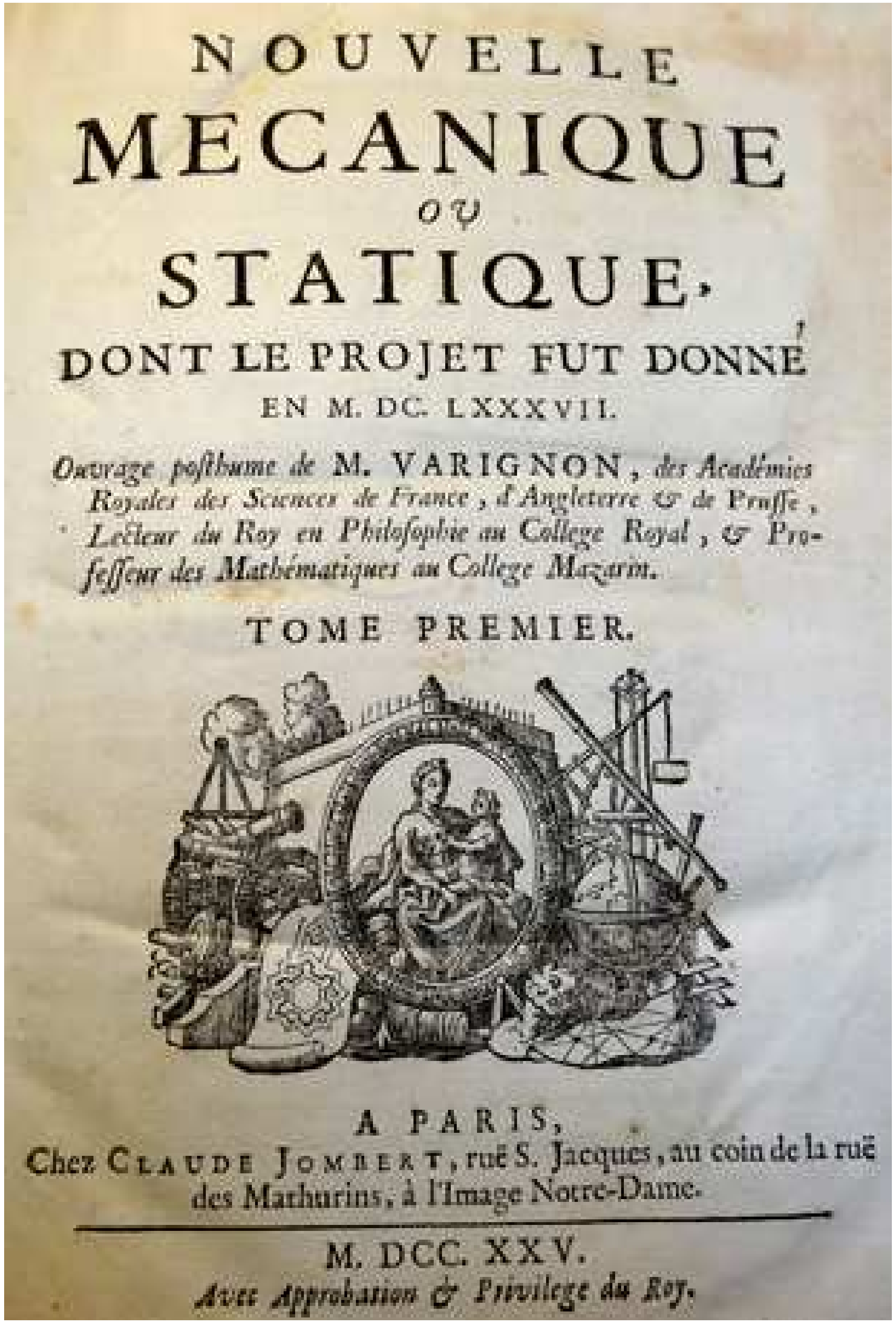
Archimedes' original proof:

ἔστω σύμμετρα μεγέθεα τὰ Α, Β, ὧν κέντρα τὰ Α, Β, καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ ΕΔ, καὶ ἔστω, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ μᾶκος ποτὶ τὸ ΓΕ μᾶκος· δεικτέον, ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν Α, Β συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Γ.

ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ ποτὶ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ Α τῷ Β σύμμετρον, καὶ τὸ ΓΔ
ἄρα τῷ ΓΕ
ὥστε τῶν Ε
Ν, καὶ κείσ
τᾷ δὲ ΔΓ ἰ
καὶ ἁ ΔΓ τ
πλασία ἄρα
ὥστε τὸ Ν
δήπερ καὶ τ
ποτὶ τὸ Β,
ΓΕ, οὕτως
ἑκατέρας· κ
ποτὶ ΗΚ. ἐ
ταπλασίων
ΔΗ ποτὶ Ν
ΚΗ ποτὶ ΔΗ, οὕτως τὸ Β ποτὶ Α· δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἁ ΚΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ Β ποτὶ Ζ· ἰσάκις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶν ἁ ΚΗ τᾶς Ν καὶ τὸ Β τοῦ Ζ. ἐδείχθη δὲ τοῦ Ζ καὶ τὸ Α πολλαπλάσιον ἐόν· ὥστε τὸ Ζ τῶν Α, Β κοινόν ἐστι μέτρον. διαιρεθείσας οὖν τᾶς μὲν ΔΗ εἰς τὰς τᾷ Ν ἴσας, τοῦ δὲ Α εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ἐν τᾷ ΔΗ τμάματα ἰσομεγέθεα τᾷ Ν ἴσα ἐσσεῖται τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ Α τμαμάτεσσιν ἴσοις ἐοῦσιν τῷ Ζ. ὥστε, ἂν ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τᾷ ΔΗ ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ Ζ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐντὶ τῷ Α, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ Ε·
ὶ τὰ ἐφ'
ῖμεν τὰν
ν, εἴ κα
θῇ μέγε-
ὶ τοῦ μέ-
ἐσσεῖται
τρον τοῦ
ν Α ἐπι-
ἐσσεῖται
κ, ὧν τὰ
ν, [συγ-
ι τοῦ ἐκ
τοῦ βά-
ρεος ἁ διχοτομία τᾶς εὐθείας τᾶς ἐχούσας τὰ κέντρα τῶν μέσων μεγεθέων. ἐπεὶ δ' ἴσαι ἐντὶ ἁ μὲν ΔΕ τᾷ ΓΔ, ἁ δὲ ΕΓ τᾷ ΔΚ, καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΔΓ ἴσα τᾷ ΓΚ· ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ σαμεῖον. τοῦ μὲν ἄρα Α κειμένου κατὰ τὸ Ε, τοῦ δὲ Β κατὰ τὸ Δ, ἰσορροπησοῦντι κατὰ τὸ Γ.



P. Varignon (work started 1687, publ. posthum. 1725):

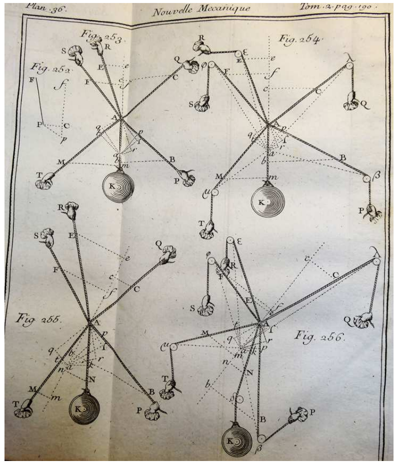
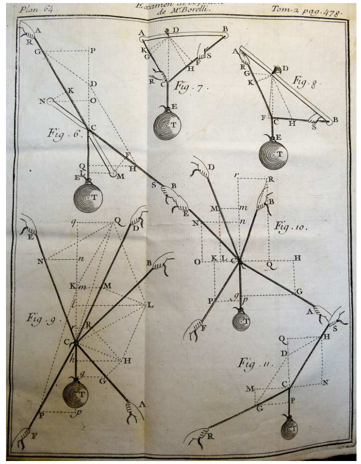
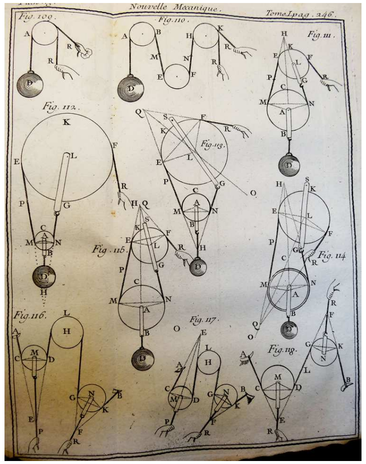
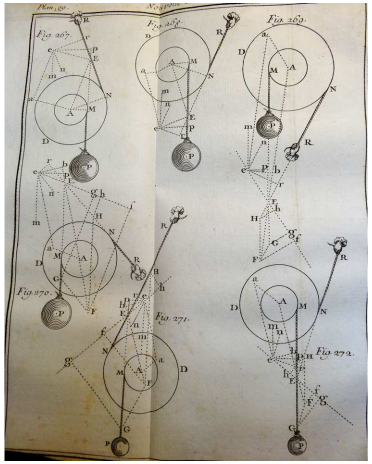
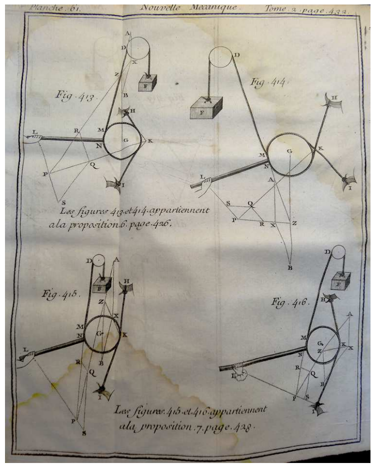
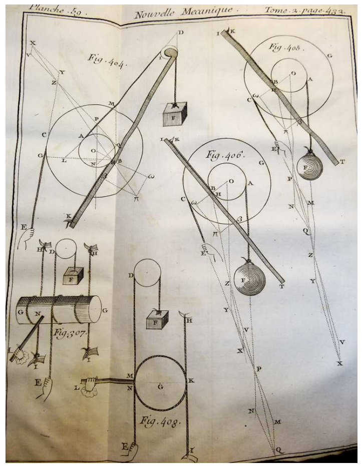

NOUVELLE
MECANIQUE
OU
STATIQUE,
DONT LE PROJET FUT DONNÉ
EN M. DC. LXXXVII.

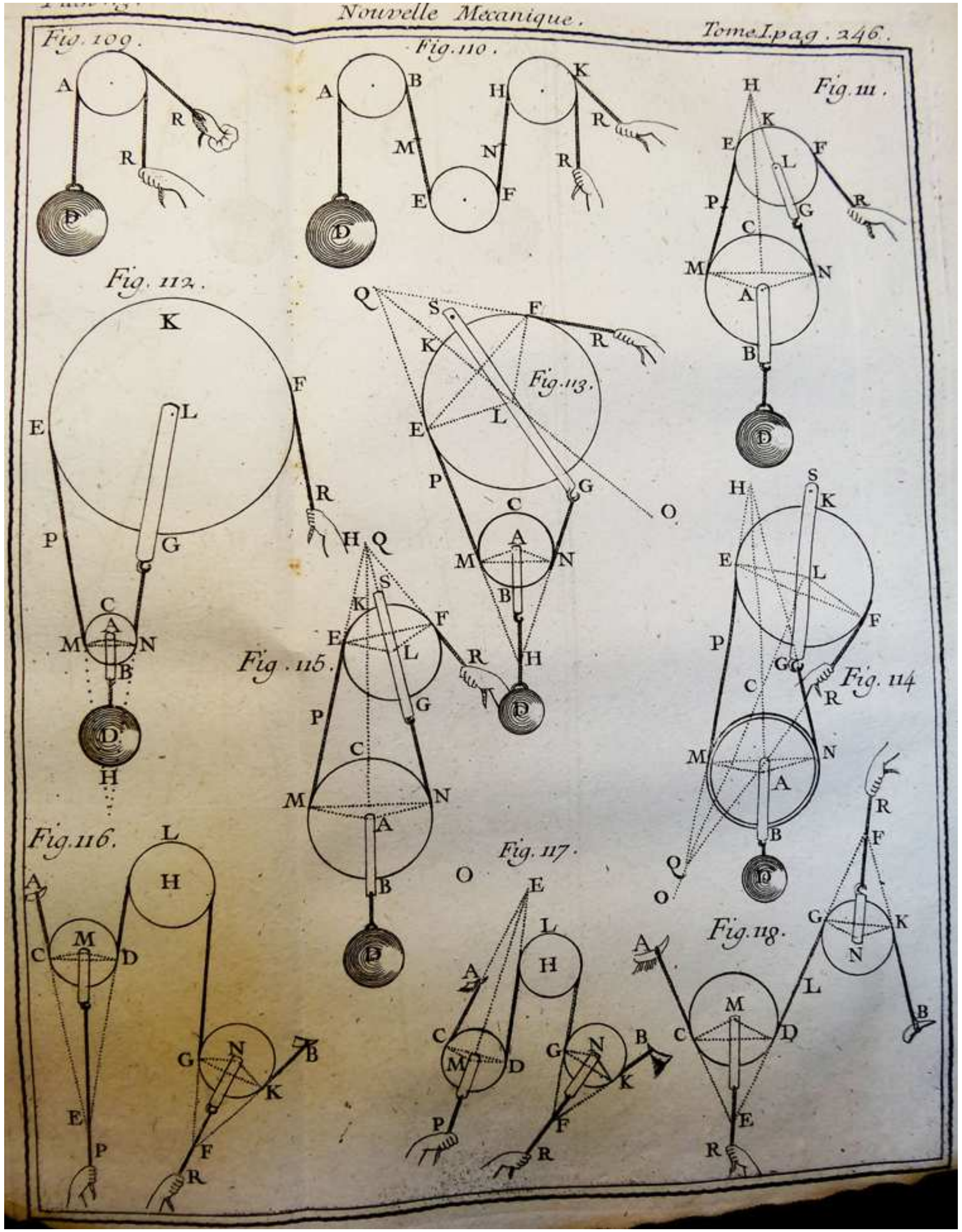
Ouvrage posthume de M. VARIGNON, des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse, Lecteur du Roy en Philosophie au College Royal, & Professeur des Mathématiques au College Mazarin.

TOME PREMIER.

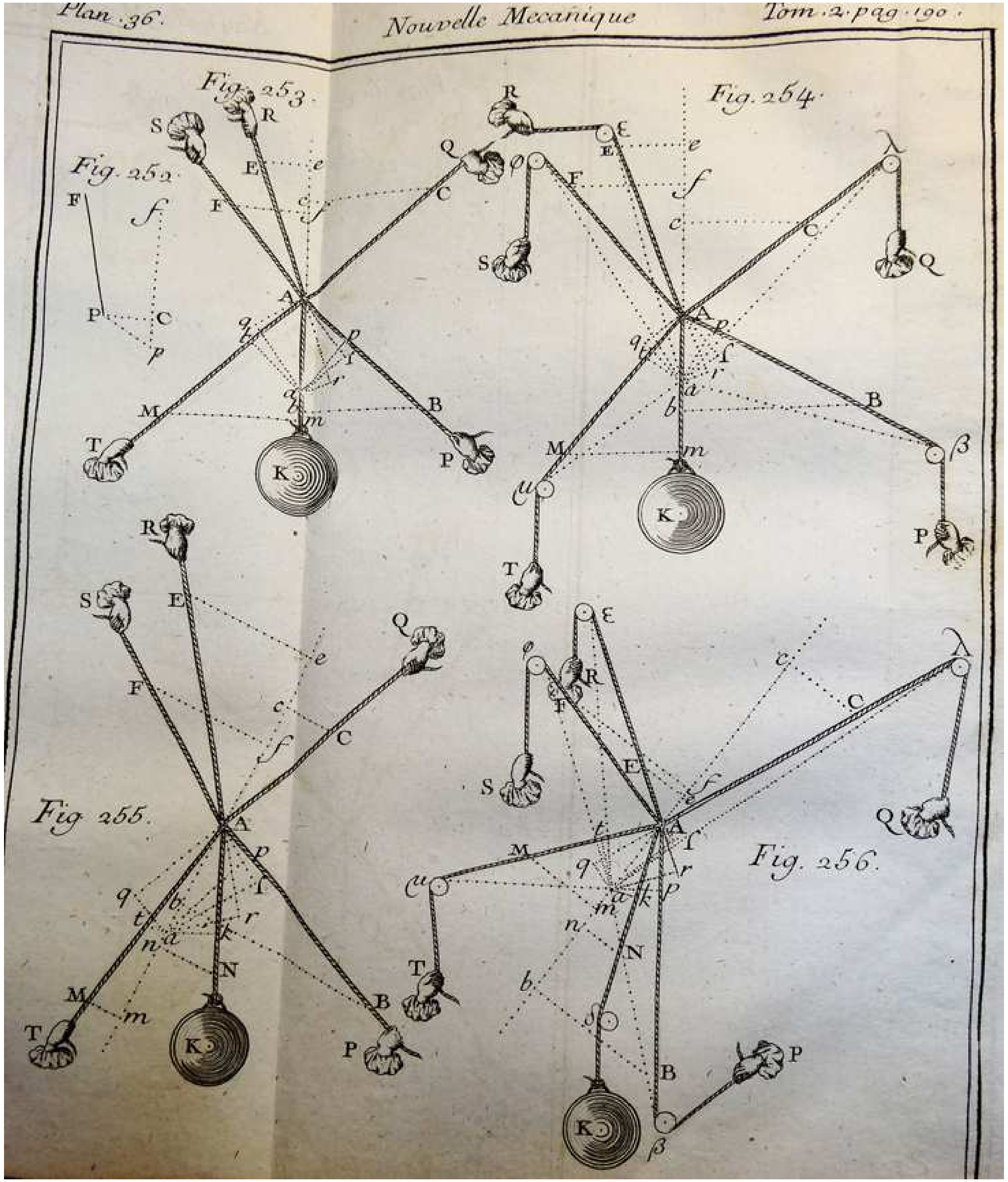
A PARIS,
Chez CLAUDE JOMBERT, ruë S. Jacques, au coin de la ruë des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XXV.
Avec Approbation & Privilege du Roy.

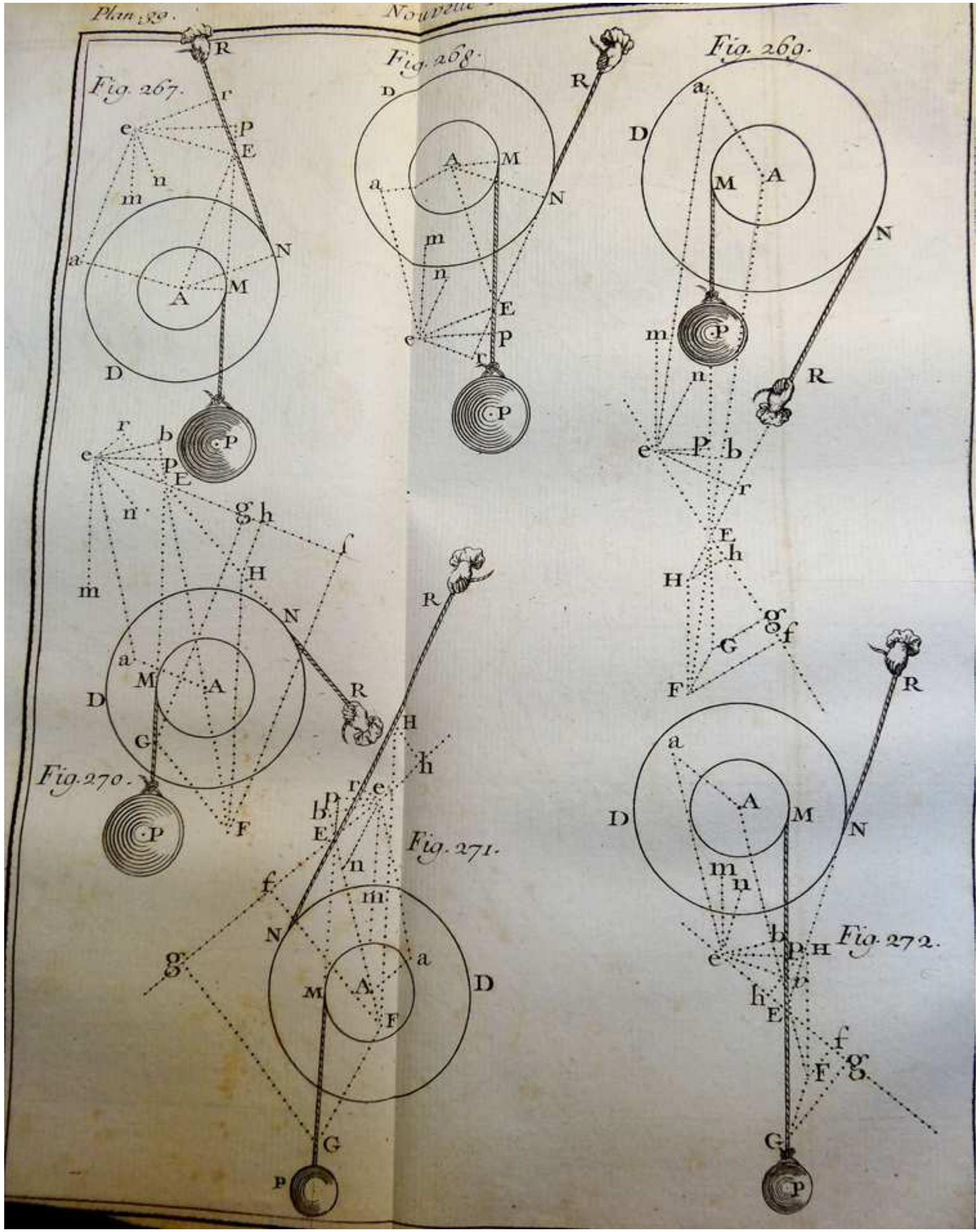









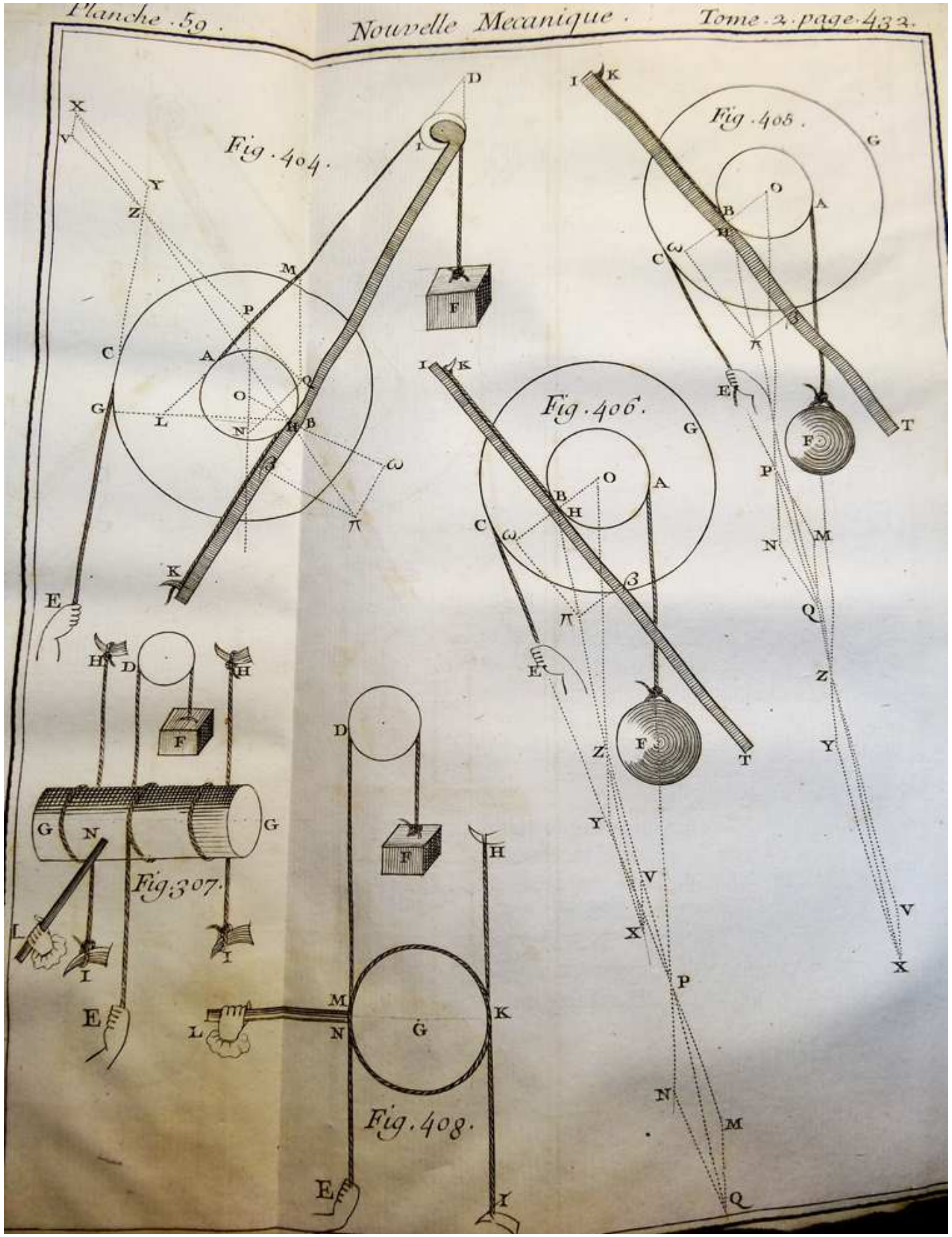
Varignon 1725, plate 13



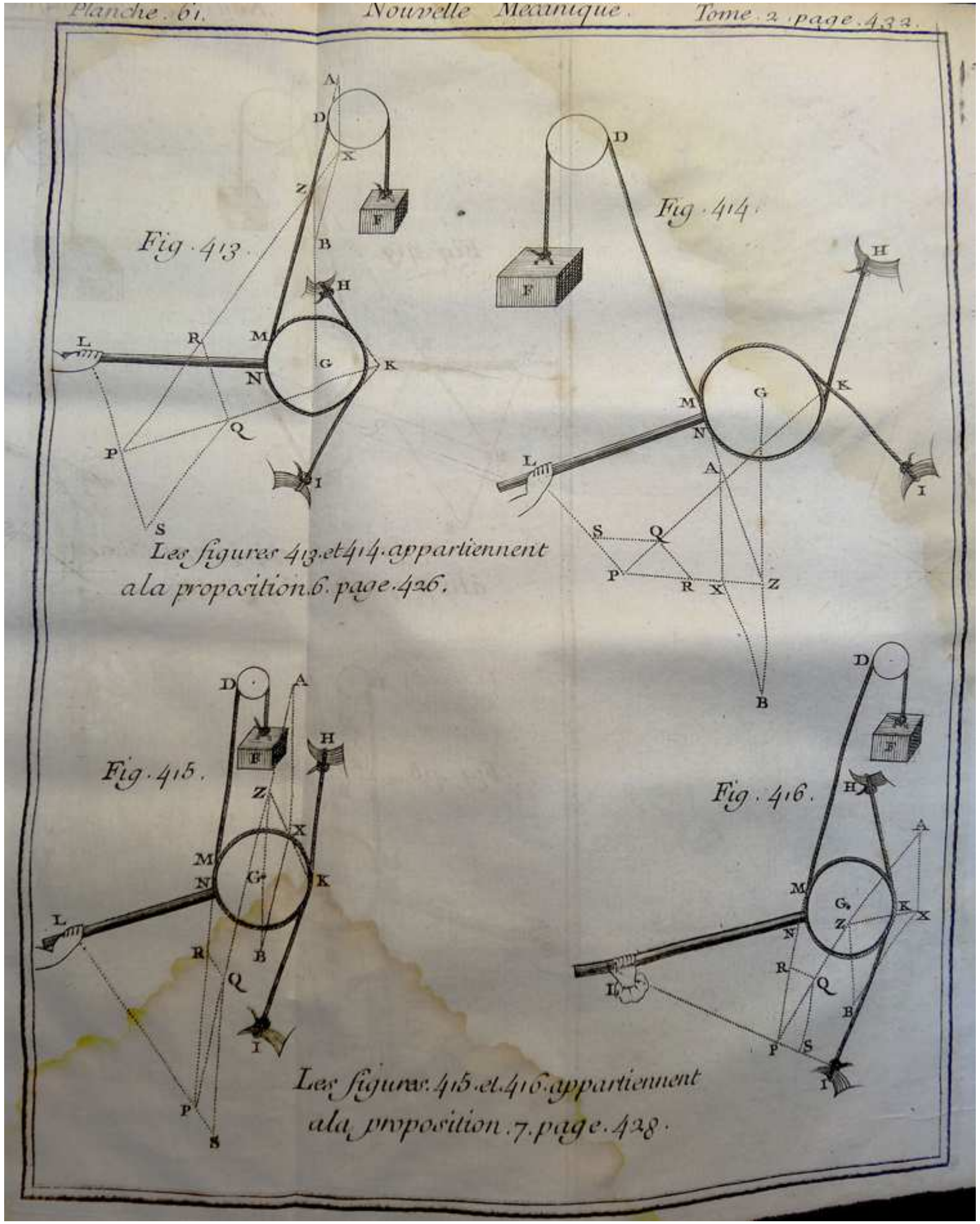
Varignon 1725, plate 36



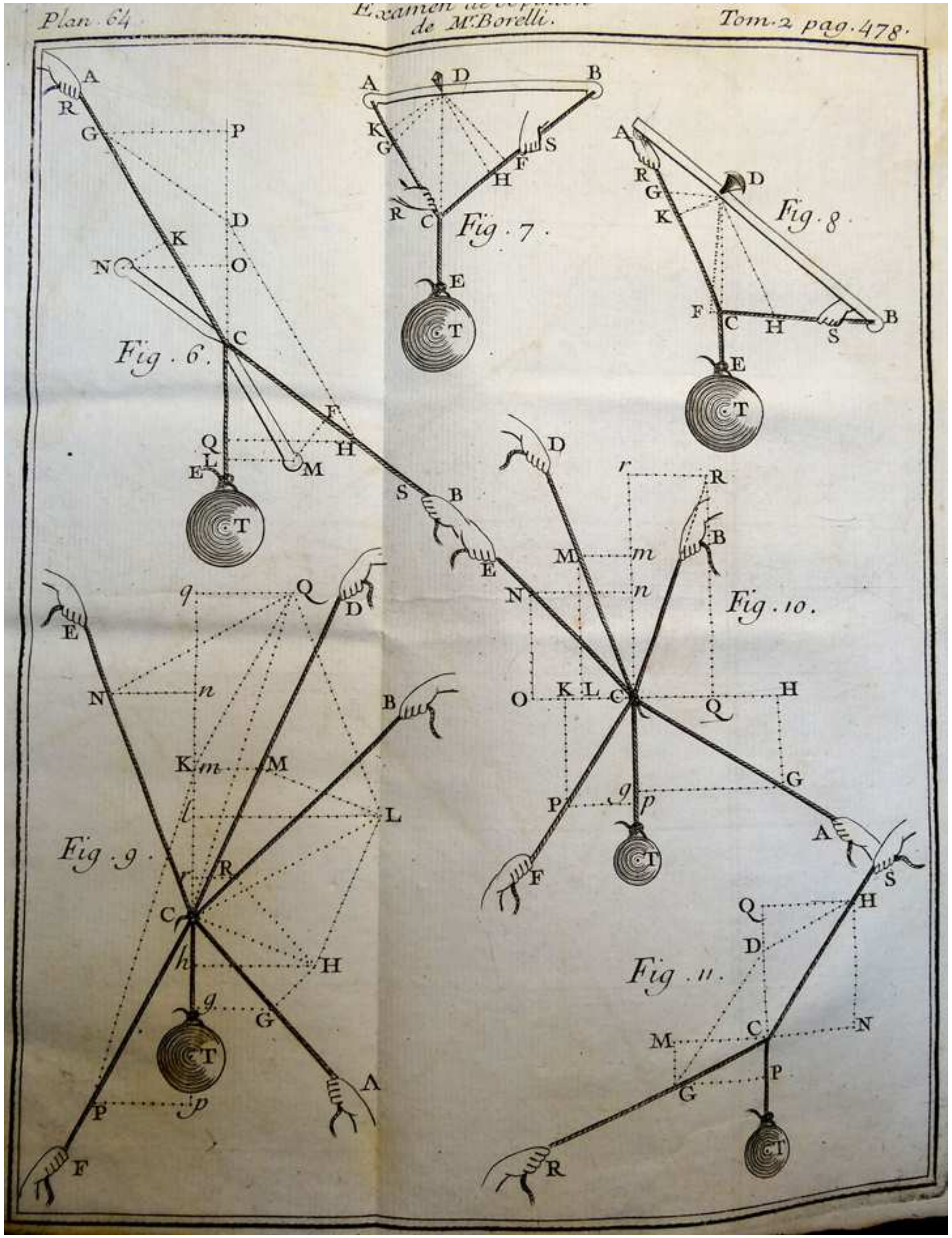
Varignon 1725, plate 39



Varignon 1725, plate 59



Varignon 1725, plate 61



Varignon 1725, plate 64

Joh. Bernoulli's letter (Febr. 26, 1715) (301 years!)

[No.173. J.Bernoulli an P.Varignon; Basel, 26.Februar 1715.]
[Kopie Stockholm]

Bâle ce 26 fevr.1715

Monsieur,

Outre la lettre que M.Christ me remit de votre part avec la connoissance des tems de 1715, dont vous l'aviez chargé pour

(Joh. Bernuolli's letter, page 1; courtesy M. Mattmueller, Basel)

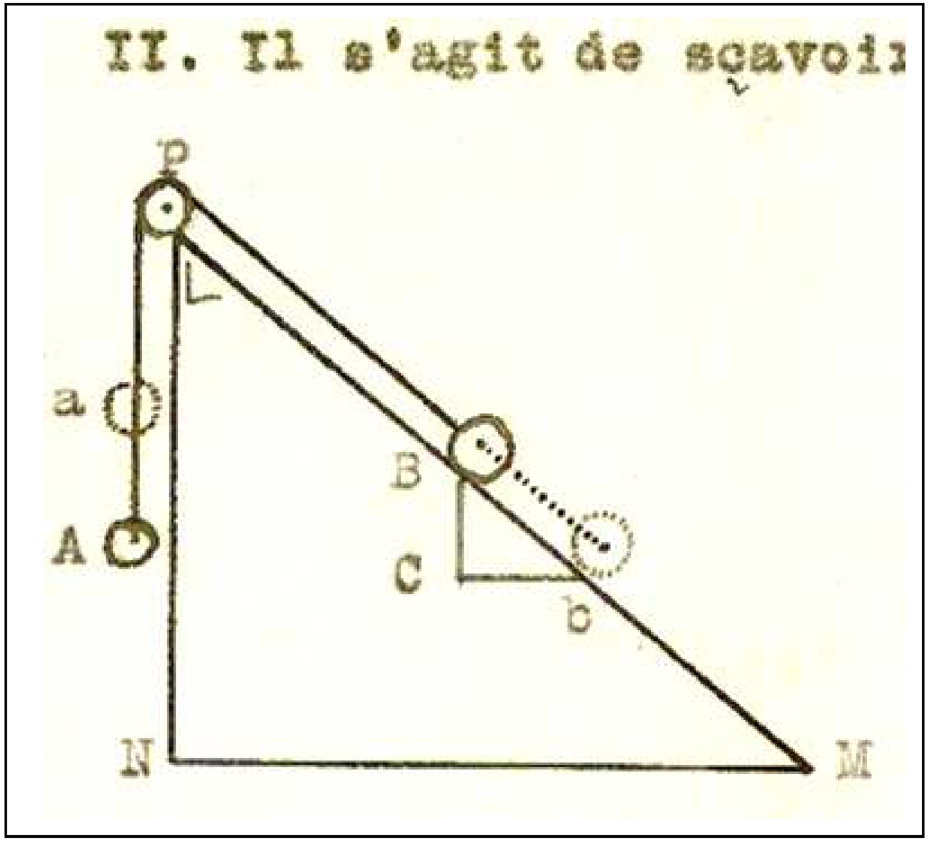
cepen-dant permettez moy que je vous reproche ici une nonchalance qui vous est arrivée assez souvent en ce que vous portez quelques fois votre jugement un peu trop à la legere, sans examiner, si ce que vous croyez etre une objection en est veritablement une;

Joh. Bernoulli’s letter, page 3:

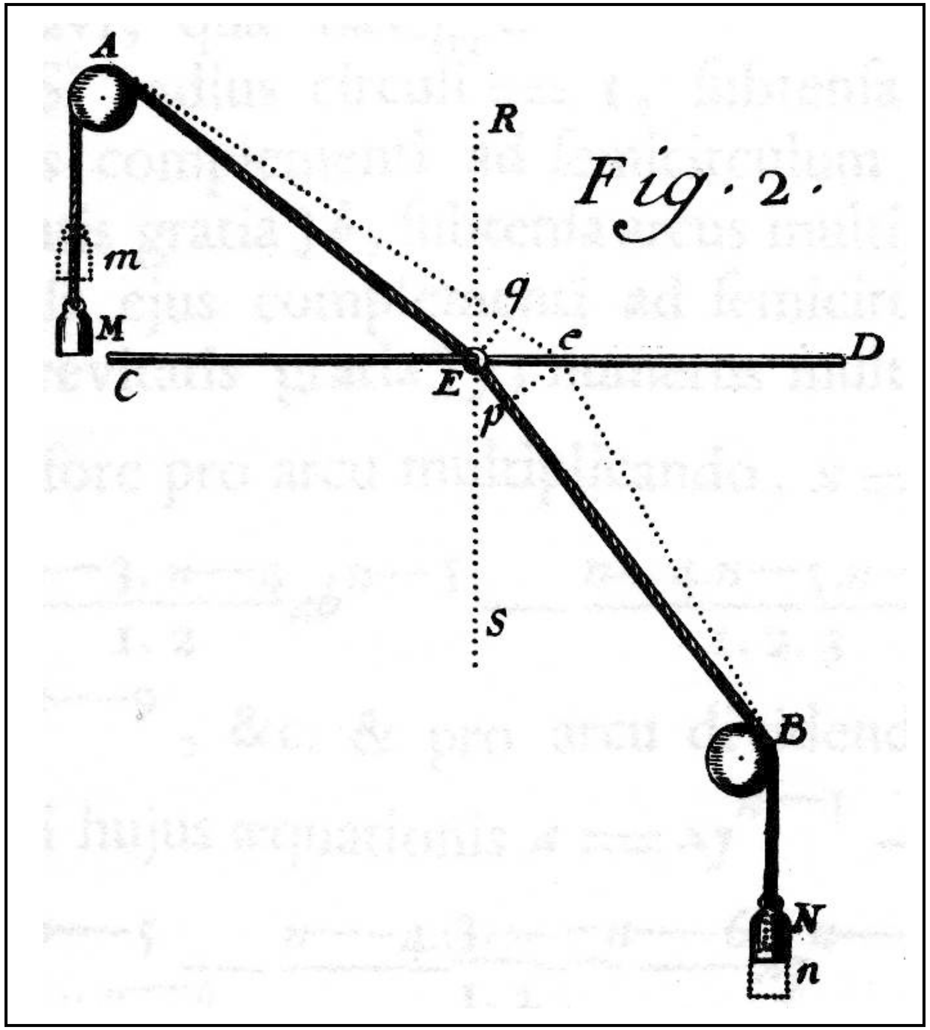
Votre projet d'une nouvelle mechanique fourmille d'un grand
nombre d'exemples, dont quelques uns à en juger par les figures
paroissent assez compliqués; mais je vous deffie de m'en propose
un à votre choix, que je ne resolve sur le champ et comme en jou-
ant par ma dite regle. J'ose meme avancer que tous ces exemples

“Your project ... is crowded with
examples, some of which
appear quite complicated;
but I challenge you to select any of
your choice, and I’ll solve it immediately
and like playing with my rule.”
I even dare to say, that all your examples ...

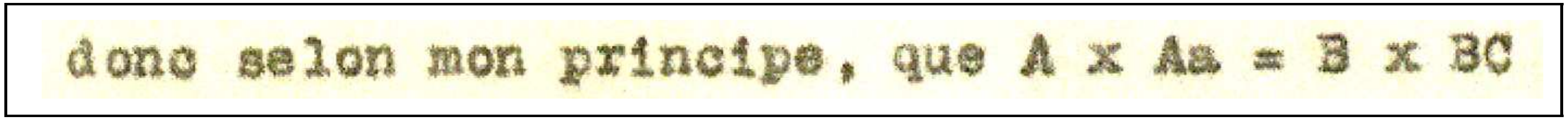
Idea: perform small displacement by “vitesse virtuelle” ($\times dt$):



(Joh. Bernuolli’s letter, page 8)



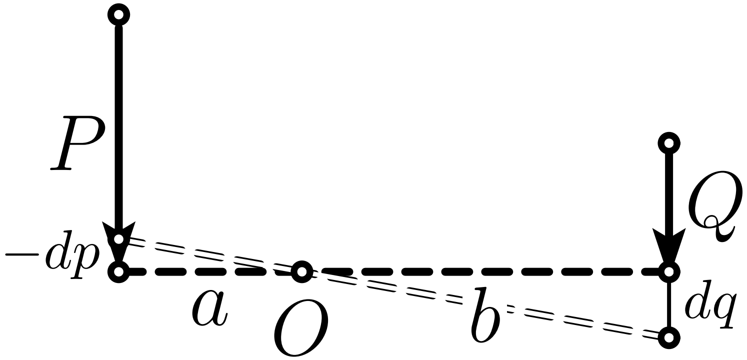
(Joh. Bernuolli’s “Disquisitio Catoptrico-Dioptrica”)
(Acta 1701, p. 19; Opera I, p. 369, 386)
“ex communis centri gravitatis maximo descendo”

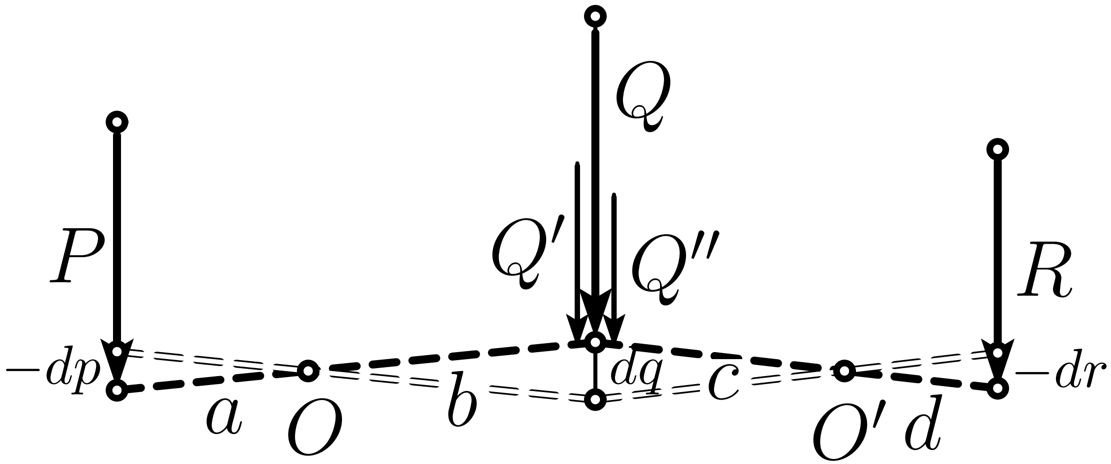

donc selon mon principe, que A x Aa = B x BC

(Joh. Bernuolli’s letter, page 6; courtesy M. Mattmueller, Basel)

Bernoulli's "regle" in Lagrange 1788: (except the pictures!!)

Archimedes: $P \cdot a = Q \cdot b$ $\longrightarrow$





Bernoulli: $-P \cdot dp = Q \cdot dq$

$$Pdp + Q'dq = 0$$

and $Q''dq + Rdr = 0$;

$\Rightarrow \ Pdp + Qdq = 0.$ $\nearrow$ $\Rightarrow \ Pdp + Qdq + Rdr = 0$

etc. $\Rightarrow$ **any** machine: **"general formula for equilibruim":**

$$\boxed{Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = 0}$$

General theorem of equilibria:

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c = 0.$$

formule générale de l'équilibre d'un

Bernoulli's rule as published by Lagrange 1788

PROPOSITION GENERALE.

THEOREME XL.

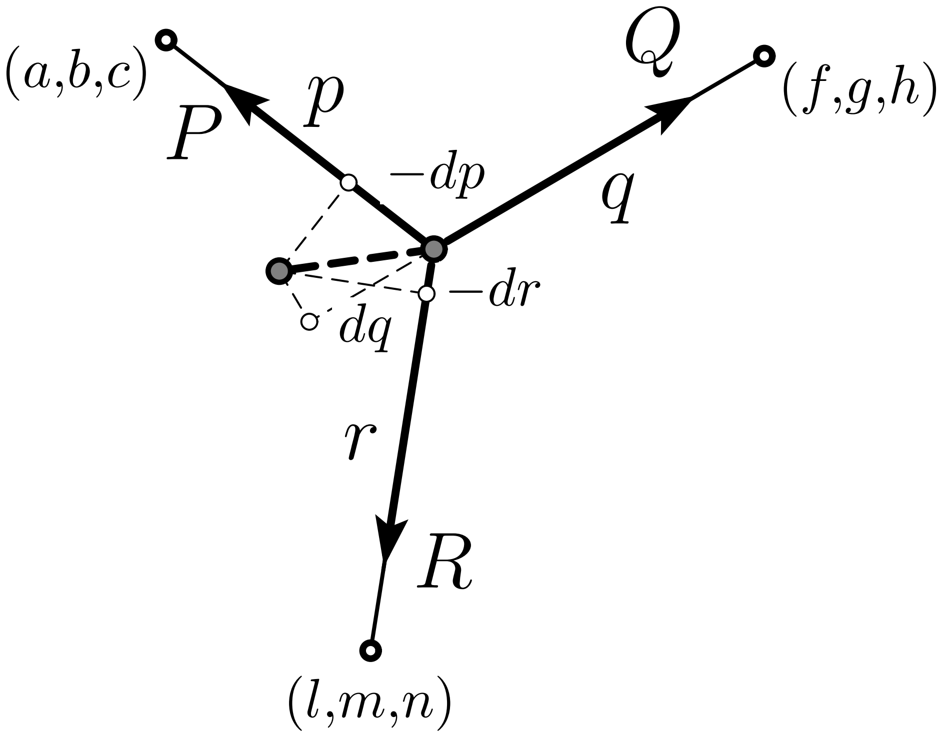
« En tout équilibre de forces quelconques, en quelque maniere
» qu'elles ſoient appliquées, & ſuivant quelques directions
» qu'elles agiſſent les unes ſur les autres, ou médiatement, ou
» immédiatement, la ſomme des Energies affirmatives ſera
» égale à la ſomme des Energies négatives priſes affirmative-
» ment.

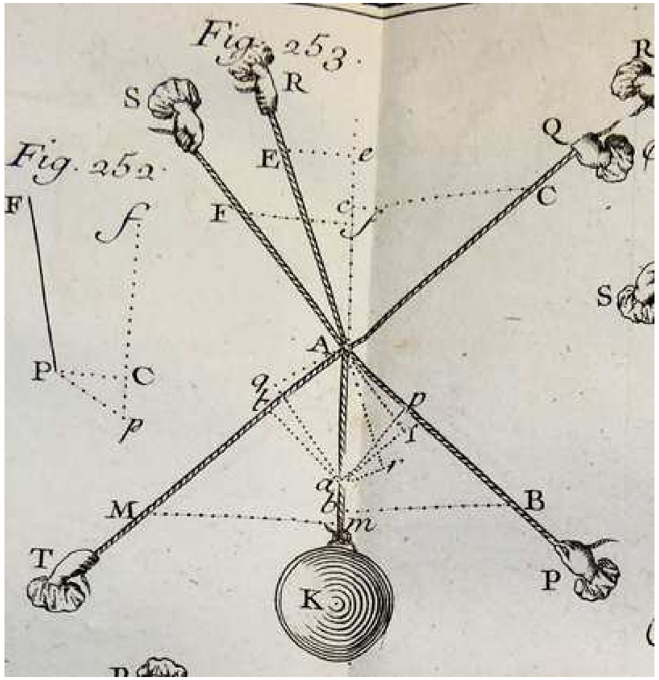
Bernoulli's regle as published by Varignon 1725

bien entendu je forme cette proposition generale en disant qu'en
tout equilibre des forces quelconques en quelque maniere,qu'elle
soyent appliquées et suivant quelques directions, qu'elles
agissent les unes sur les autres ou mediatement ou immediatement
la somme des energies affirmatives sera egale à la somme des
energies negatives prises affirmativement;Cette proposition fou

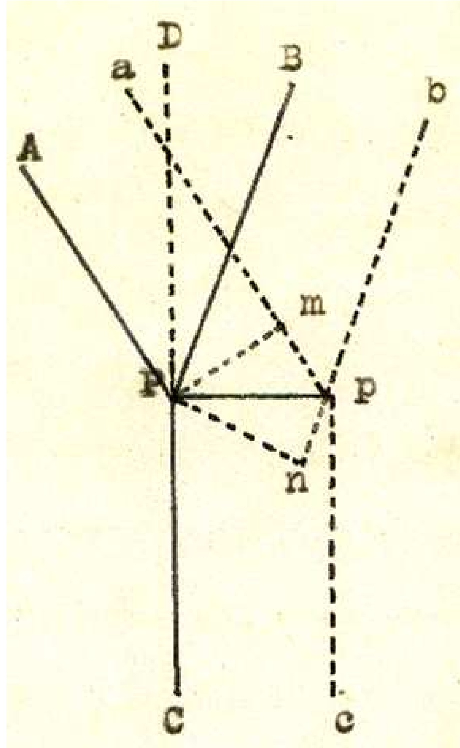
Joh. Bernoulli's original text

First example treated by Lagrange (in sect. V):





same problem in Varignon (Plate 36)



... in Bernoulli (p. 8)

Compute $Pdp + Qdq + Rdr$:

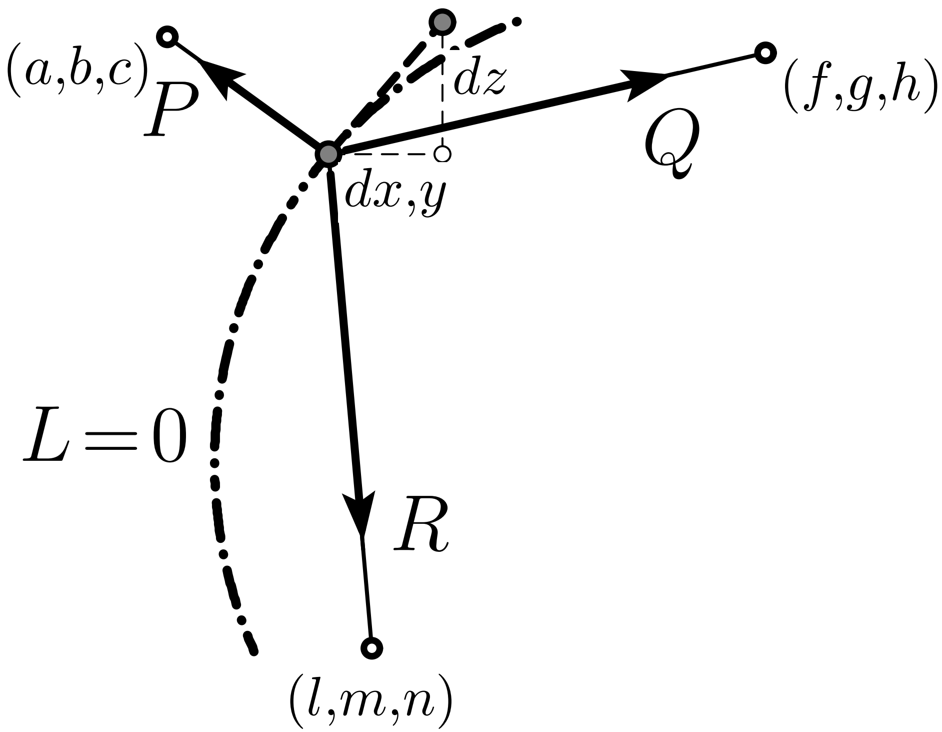
$$p = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\,, \Rightarrow dp = \frac{1}{p}\cdot((x-a)dx+(y-b)dy+(z-c)dz)\,,$$

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \qquad X = P\,\frac{x-a}{p} + Q\,\frac{x-f}{q} + R\,\frac{x-l}{r}$$

$$dx,\ dy,\ dz \text{ indep.} \quad \Downarrow \qquad Y = P\,\frac{y-b}{p} + Q\,\frac{y-g}{q} + R\,\frac{y-m}{r}$$

$$X = 0\,,\quad Y = 0\,,\quad Z = 0\,. \qquad Z = P\,\frac{z-c}{p} + Q\,\frac{z-h}{q} + R\,\frac{z-n}{r}$$

Constrained position : (to surface $L = 0$) $\Rightarrow$



$$X dx + Y dy + Z dz = 0 \qquad \text{(a)}$$

dx, dy, dz not indep. because

$$\frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial y} dy + \frac{\partial L}{\partial z} dz = 0\,. \qquad \text{(b)}$$

(a)+(b) is linear system,

$\Rightarrow$ Intermezzo……

Intermezzo: Misc. Taurinensia, vol. I, (1759):

Lagrange's opus 1:

MISCELLANEA
PHILOSOPHICO -- MATHEMATICA
SOCIETATIS PRIVATAE
TAURINENSIS
TOMUS PRIMUS.

AUGUSTÆ TAURINORUM,
EX TYPOGRAPHIA REGIA.
MDCCLIX.

18

RECHERCHES
SUR LA METHODE
DE MAXIMIS, ET MINIMIS
PAR M. LOUIS DE LA GRANGE.

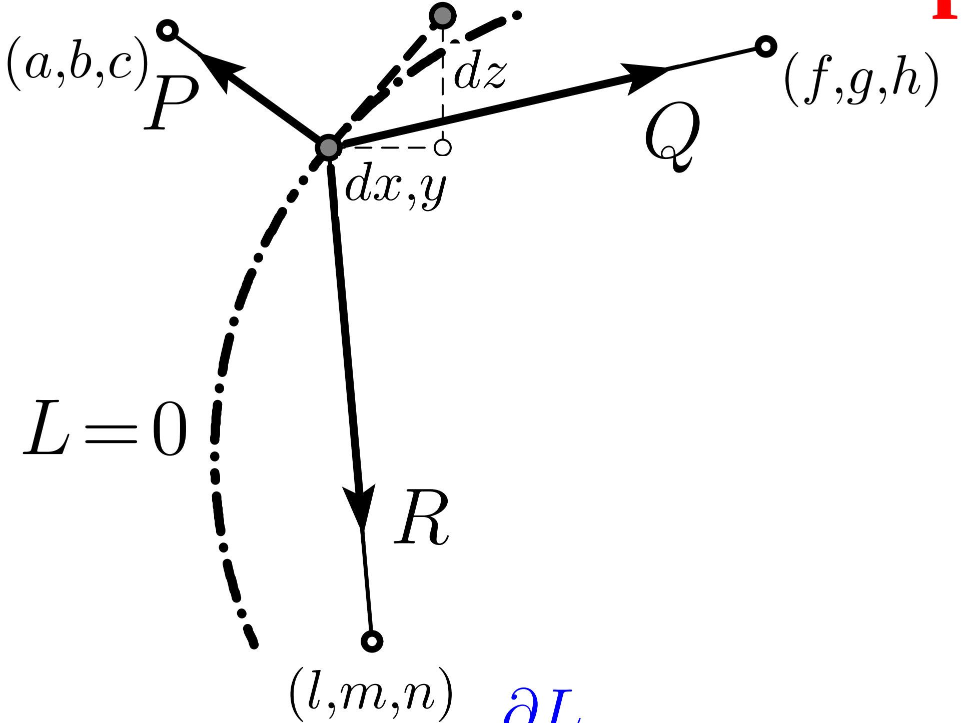
I. LES Géométres ſavent depuis long-tems, que lorſque la premiére différentielle d'une variable quelconque diſparoit ſans que la ſeconde diſparoiſſe en même tems, elle devient toujours un *maximum*, ou un *minimum*; & en particulier elle eſt un *maximum*, ſi ſa différentielle ſeconde eſt négative, & un *minimum*, ſi cette différentielle eſt poſitive. Si la différentielle ſecon-

... plusieures variables ...

Soit poſé $C - \frac{B^2}{A} = a$, $E - \frac{BD}{A} = b$, $F - \frac{D^2}{A} = c$,

("Gaussian" elimination at matrix $\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$)

Retour: Constrained position : (to surface $L=0$) $\Rightarrow$



$$X dx + Y dy + Z dz = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial y} dy + \frac{\partial L}{\partial z} dz = 0\,. \qquad \text{(b)}$$

Je multiplie d'abord

ajoute toutes enſemble

$$\underbrace{(X + \lambda \frac{\partial L}{\partial x}) dx + (Y + \lambda \frac{\partial L}{\partial y}) dy}_{=\,0 \text{ for all } dx \text{ and } dy \text{ (indep.)}} + \underbrace{(Z + \lambda \frac{\partial L}{\partial z})}_{=\,0 \text{ (determ. } \lambda)} dz = 0$$

$$\boxed{X + \lambda \frac{\partial L}{\partial x} = 0\,, \qquad Y + \lambda \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \text{and} \quad Z + \lambda \frac{\partial L}{\partial z} = 0\,.}$$

Is the same as applying virtual vel. argument without const. to

$$\boxed{X dx + Y dy + Z dz + \lambda dL = 0\,.}$$

Additional constraints $M = 0$, $N = 0$ etc.... :

add additional terms $\mu\, dM$, $\nu\, dN$ etc... (same linear algebra)

(“Il n’est pas difficile de prouver par la théorie
de **l’élimination des équations linéaires** ...”)
(Lagrange 1788)

$\Rightarrow$ **“équation générale” for ALL problems of equilibria:**

$$\boxed{Pdp + Qdq + Rdr + \ldots + \lambda dL + \mu dM + \nu dN + \ldots = 0}$$

$$Pdp + Qdq + Rdr + \&c + \lambda dL + \mu dM + \nu dN + \&c = 0,$$

Lagrange 1788 (Section IV): “Méthode très-simple”

Lagrange 1811 (Section IV): “Méthode des Multiplicateurs”:

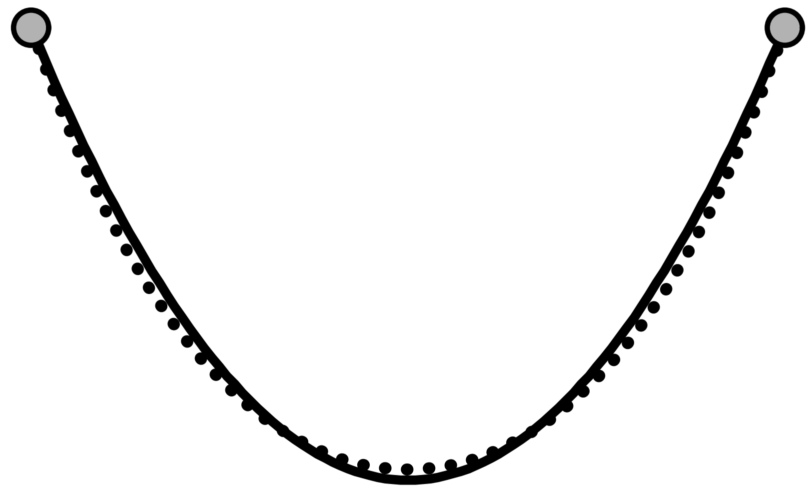
§ I.

Méthode des Multiplicateurs.

Lagrange 1811, Heading of §1, sect. IV.

Example: The Catenary.

"une chaînette suspendue par
deux clous contre un mur se place
presque *ad unguem*
au-dessus d'une parabole"
(G. Galilei, *Discorsi*
1638, deuxième journée, p.186)



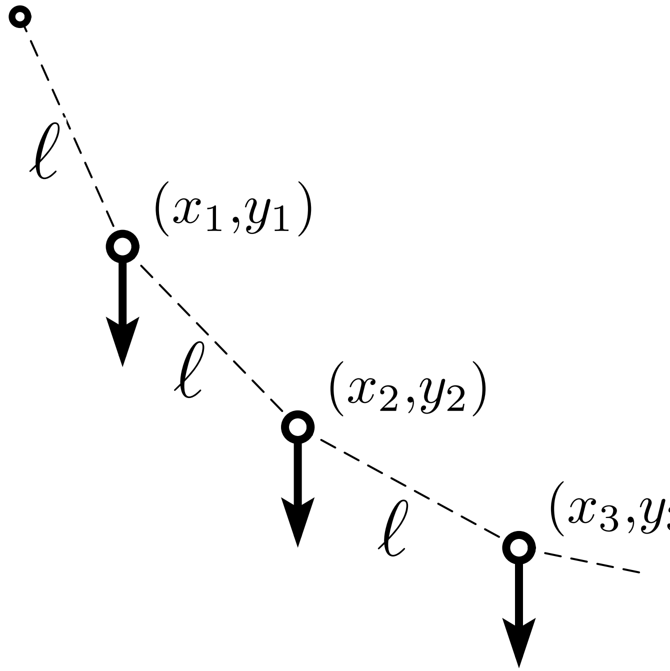
... la ligne de la corde ou chaine pendante, ... (qui) renferme des proprietez singulieres et remarquables. Je l'avois considerée autre fois dans ma jeunesse, n'ayant que 15 ans, et j'avois demontré au P. Mersenne, que ce n'estoit pas une Parabole . . .

(Lettre de Huygens à Leibniz, le 9 oct. 1690)

"Les efforts de mon frere furent sans succès, pour moi, je fus plus heureux, car je trouvai l'adresse (...). Il est vrai que cela me couta des meditations qui me deroberent le repos d'une nuit entiere (...)."

(Joh. Bernoulli, voir *Briefwechsel*, vol. 1, p. 98)

Solution by Lagrange:



$$(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2-\ell^2=0$$
$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-\ell^2=0$$
$$(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2-\ell^2=0$$
$$\ldots$$

$$P\,dp+Q\,dq+R\,dr+\&c+\lambda\,dL+\mu\,dM+\nu\,dN+\&c=0,$$

$$dy_1+dy_2+\ldots+\lambda_0\cdot d((x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2-\ell^2)+\lambda_1\cdot d(\ldots)+\ldots=0$$

diff. and collect coefficients of dx_2, dy_2, ...

$$\lambda_2(x_3-x_2)=\lambda_1(x_2-x_1)$$
$$\lambda_2(y_3-y_2)=\lambda_1(y_2-y_1)+\tfrac{1}{2}$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\text{const.}$$
$$a\cdot p=s$$
$$\boxed{a\cdot dp=\sqrt{1+p^2}\,dx \quad (*)}$$

$$\boxed{a \cdot dp = \sqrt{1+p^2}\, dx \quad (*)}$$

Questo è un'equazione differenziale ...

facciamo un piccolo **intermezzo...**

vediamo il primo lavoro della collaborazione dei fratelli

Giacomo e Giovanni ...

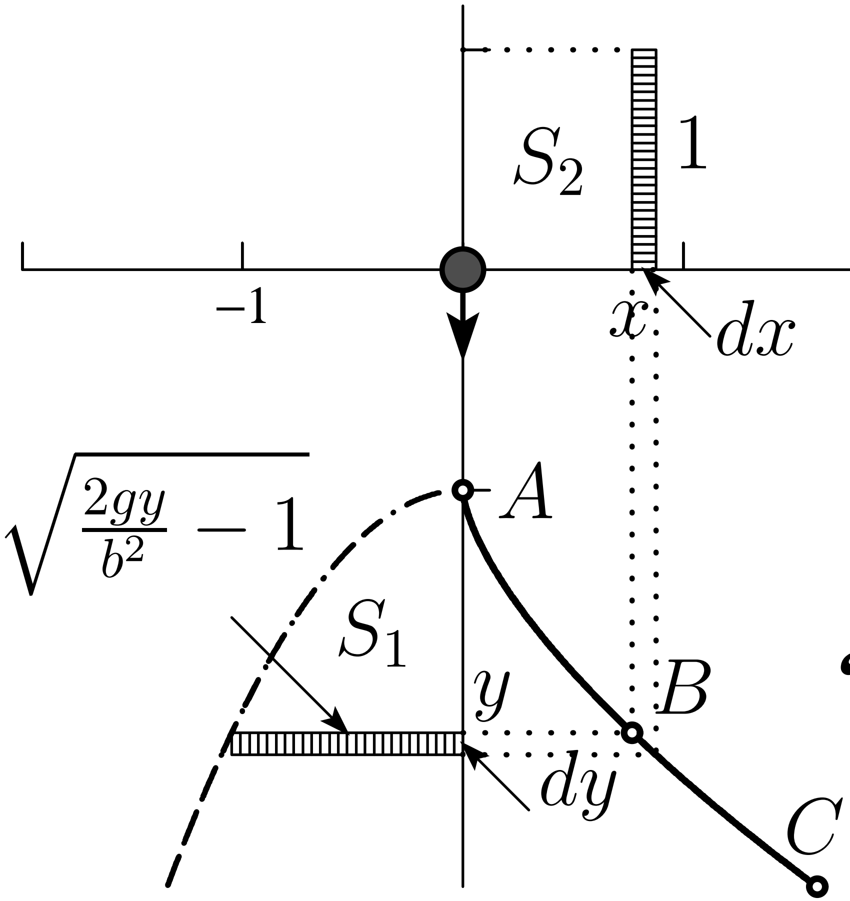
2. Differential Equations.

Problem of the Isochrone. ($\iota\sigma o\varsigma$ =equal, $\chi\rho o\nu o\varsigma$ =time)

Leibniz 1687, sol. Huygens 1687, Leibniz 1689: “Demonstratio Synthetica”!!

Search curve ABC: falling body: equal time diff. <=> equal altitude diff.!!

Sol: Jakob, Acta 1690:



Galilei: $$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = 2gy$$

desire: $$\frac{dy^2}{dt^2} = b^2$$

divide: $$dx = \sqrt{\frac{2gy}{b^2} - 1}\, dy.$$

“ergo & horum integralia æquantur"

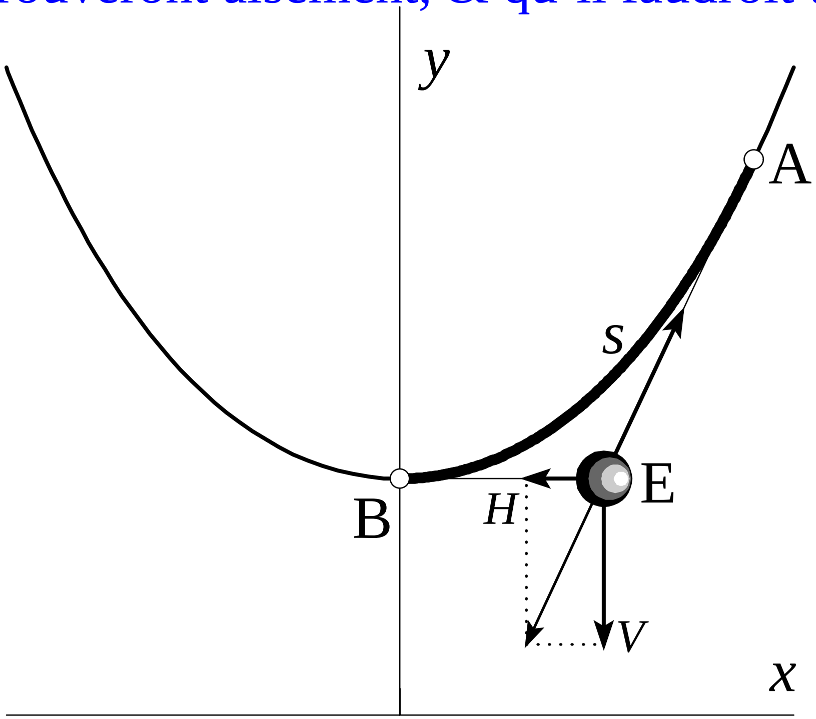
$$x = \frac{b^2}{3g}\Big(\frac{2gy}{b^2} - 1\Big)^{3/2}.$$

first use of term “integral”, first practical differential equation solved, “by separation of variables”.

Solution of the Catenary.

Acta 1691, p. 274, *Opera* I, p. 48 (“demonstrationem lubens omitto”)

“Je ne mets point ici la démonstration, parce que ceux qui entendent ces matiéres, la trouveront aisément, & qu’il faudroit trop de discours pour la faire comprendre aux autres.”



$$a\,p = s \quad \text{with} \quad p = \frac{dy}{dx}$$

$$a\,dp = ds = \sqrt{1+p^2}\,dx. \qquad (*)$$

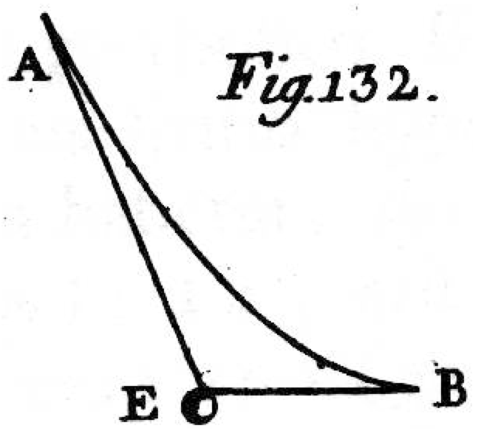
“ergo & horum integralia æquantur..”

$$a\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int dx$$

Today: $\quad \operatorname{arsinh}(p) = \dfrac{x-x_0}{a}$

$$p = \sinh\left(\frac{x-x_0}{a}\right)$$

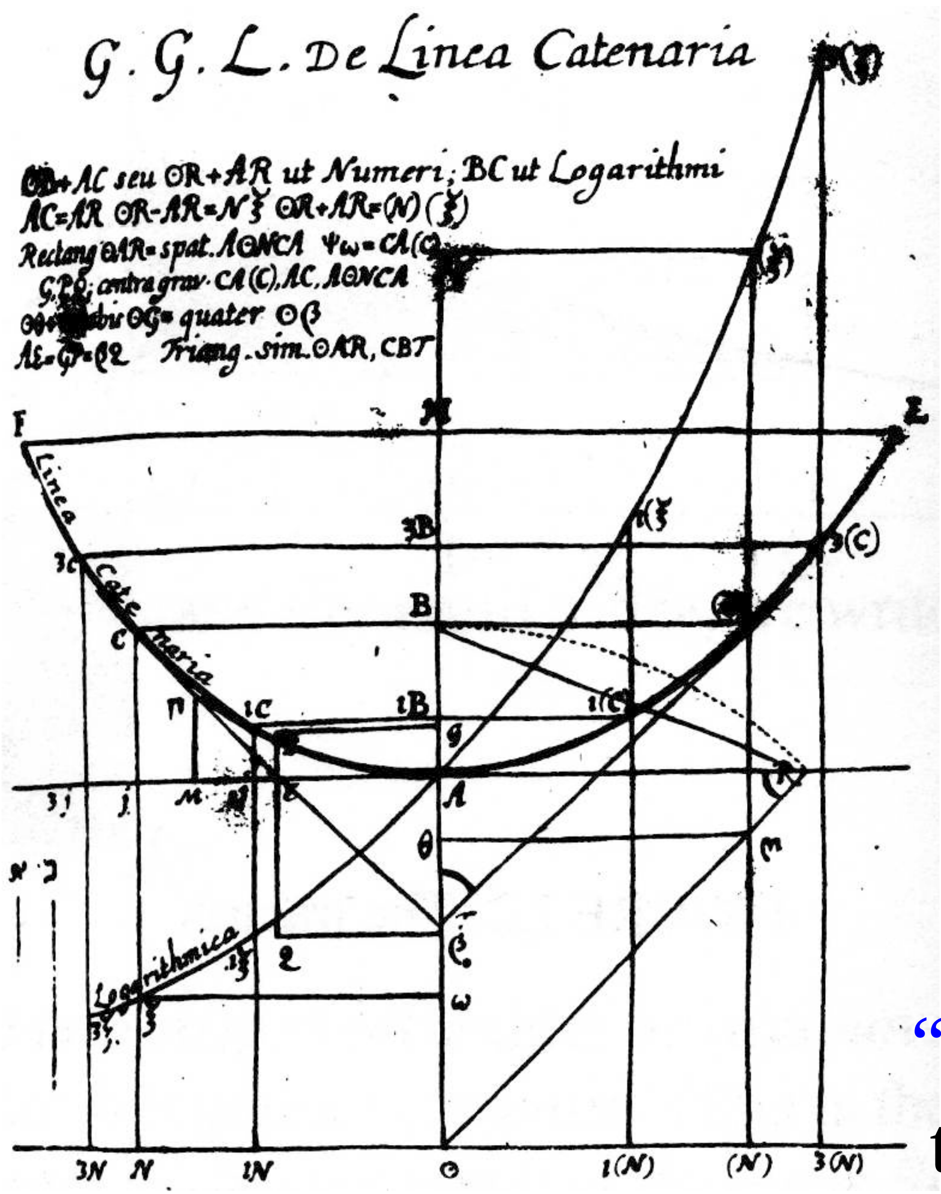
$$y = K + a\cosh\left(\frac{x-x_0}{a}\right).$$



(Lectio XXXVIII, *Opera* III, p.498)

... but sinh, cosh, arsinh, arcosh were not yet known.

Johann's demonstratio: (Lect. XII, XXXVIII, *Opera* III, p. 428, 494)



(Leibniz, Acta 1691)

Idea: multiply (*) with p:

$$ap\,dp = \sqrt{1+p^2}\,p\,dx = \sqrt{1+p^2}\,dy$$

can integrate:

$$a\int \frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int dy \Rightarrow a\sqrt{1+p^2} = y$$

solve for p: $\quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a}$

separatione: $\quad \int \frac{dx}{a} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}}$

"erit, per naturam Logarithmicæ"

$$\frac{x}{a} = \log\Big(\frac{y}{a} + \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}\,\Big)$$

"cum solutione Dni. Leibnitii conveniat".

take expo (did not yet exist...) and solve

$$\Rightarrow y = a\Big(\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\Big).$$

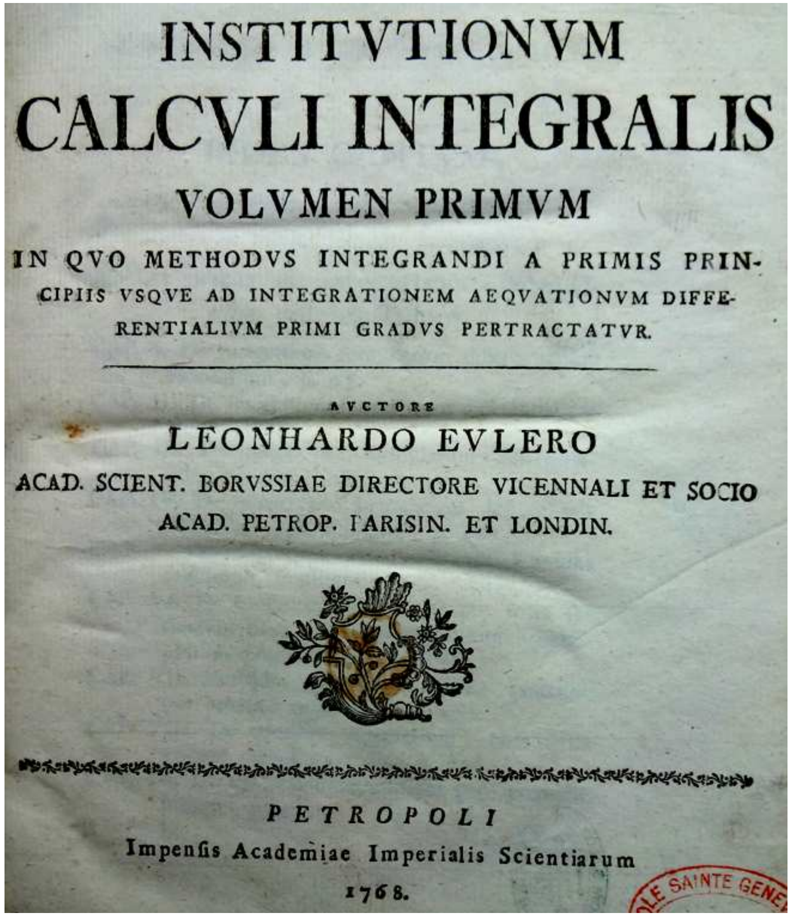
Exponential function.

Johann Bernoulli, *Principia Calculi Exponentialium, seu Percurrentium*, Acta 1697 (Mart), p. 125, *Opera* I, p. 179–187. Proud of being, together with Leibniz, the solver of the *Catenary* problem, and mixed with harsh attacks against Bernard Nieuwentijt (the paper quotes “Hugenius” 5 times, “Leibnitius” 10 times, and “Nieuwentiitius” 12 times!) he explains the use of the *exponentialium* $x^v = y$ and their rules. (The use of the base $e = 2.71828...$ is due to Euler’s *Mechanica* E15 & E16, 1736)

“Le Calcul exponentiel donné par moi, qui est-ce qui en avoit écrit quelque chose ? En trouvoit-on quelque chose chez Fermat, qu’on appelle ici *premier calculateur des infiniments petits.*” (Joh. Bernoulli, *Remarques sur le livre intitulé “Analyse des infinimens petits...” par Mr. Stone, de la Societé Royale de Londres, 1735*, *Opera* IV, p. 169)

... 75 years later: Leonhard Euler (1707–1783):

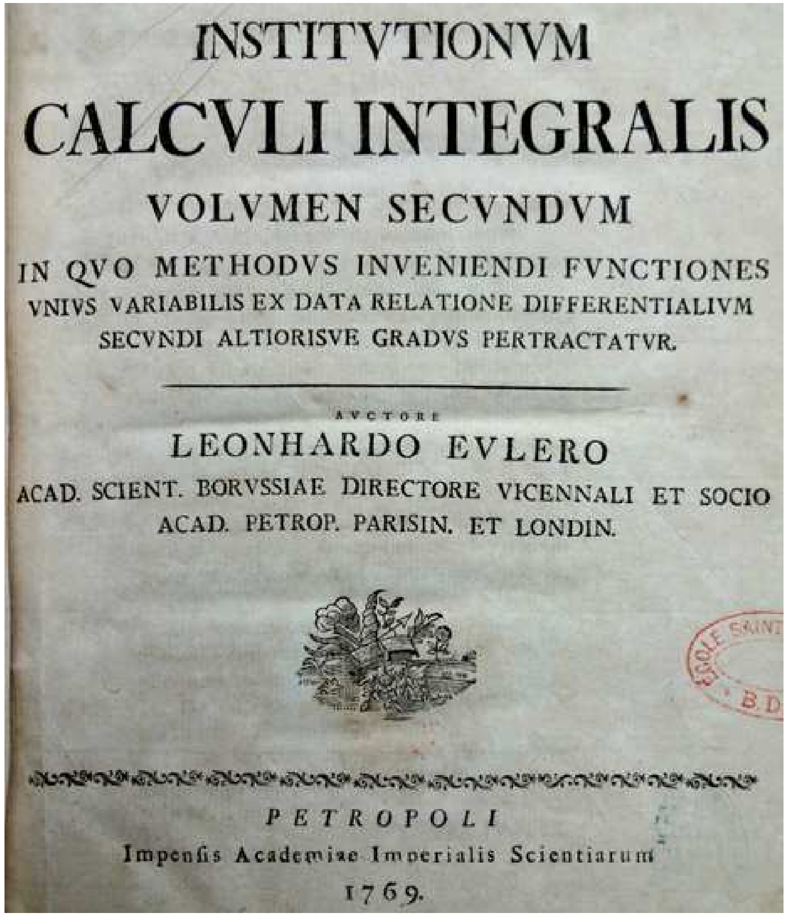
Dès mon arrivée ici, l'Académie Impériale a bien voulu se charger de l'impression de mon ouvrage sur le Calcul intégral... (Euler's letter to Lagrange, Jan. 9, 1767)



INSTITVTIONVM
CALCVLI INTEGRALIS
VOLVMEN PRIMVM
IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRINCIPIIS VSQVE AD INTEGRATIONEM AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS PERTRACTATVR.

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.

PETROPOLI
Impenſis Academiae Imperialis Scientiarum
1768.



INSTITVTIONVM
CALCVLI INTEGRALIS
VOLVMEN SECVNDVM
IN QVO METHODVS INVENIENDI FVNCTIONES VNIVS VARIABILIS EX DATA RELATIONE DIFFERENTIALIVM SECVNDI ALTIORISVE GRADVS PERTRACTATVR.

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.

PETROPOLI
Impenſis Academiae Imperialis Scientiarum
1769.

E342,E366,E385: Institutiones Calculi Integralis 1768/69/70

250 anni fa !!!

E342

PARS PRIMA
SEV
METHODVS INVESTIGANDI FVNCTIONES VNIVS VARIABILIS EX DATA RELATIONE QVACVNQVE DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS.

SECTIO PRIMA
DE
INTEGRATIONE FORMVLARVM DIFFERENTIALIVM.

§40–§396: Integr. of Functions

PARS PRIMA
SEV
METHODVS INVESTIGANDI FVNCTIONES VNIVS VARIABILIS EX DATA RELATIONE QVACVNQVE DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS.

SECTIO SECVNDA
DE
INTEGRATIONE AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM.

§397–§667: First Order Diff.eqns.

E366

PARS SECVNDA
SEV
METHODVS INVENIENDI FVNCTIONES VNIVS VARIABILIS EX DATA RELATIONE DIFFERENTIALIVM SECVNDI ALTIORISVE GRADVS.

SECTIO PRIOR
DE
RESOLVTIONE AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM SECVNDI GRADVS DVAS TANTVM VARIABILES INVOLVENTIVM.

§706–§1099: Second Order DEs

PARS SECVNDA
SEV
METHODVS INVENIENDI FVNCTIONES VNIVS VARIABILIS EX DATA RELATIONE DIFFERENTIALIVM SECVNDI ALTIORISVE GRADVS.

SECTIO POSTERIOR
DE
RESOLVTIONE AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM TERTII ALTIORVMQVE GRADVVM QVAE DVAS TANTVM VARIABILES INVOLVVNT.

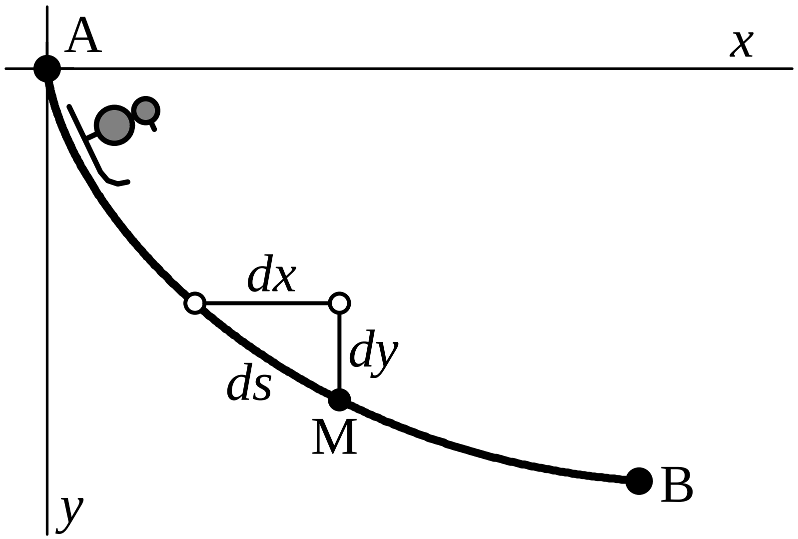
§1100–§1275: 3rd & Higher O.

In all “Sectio”: first analytic, then numeric (per approximationem).

3. Optimization

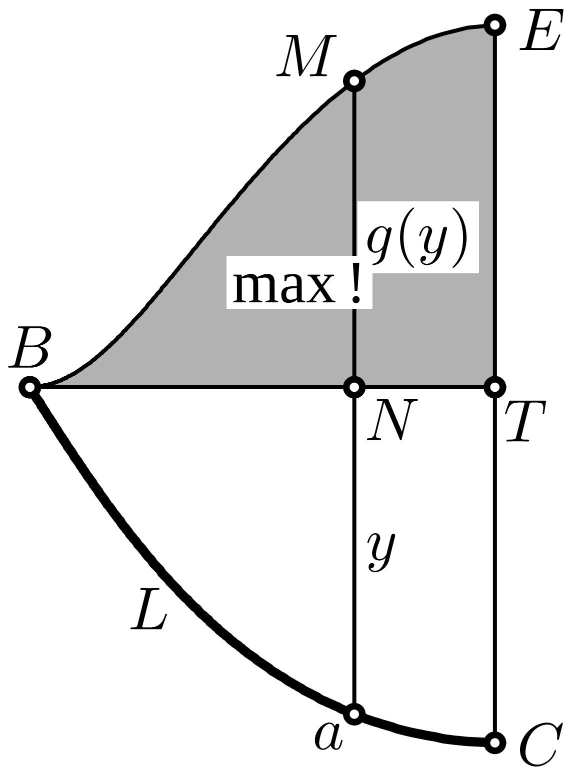
Variational Problems:

Joh. Bernoulli 1696:
"Problema novum":
(Brachystochrone)



Given points A, B
find curve AMB
such that M gliding
"quam gravitate", arrives in
"brevissimo tempore" at B.

Jak. Bernoulli 1697:
"Propositione reciproca":
(isoperimetric problem)



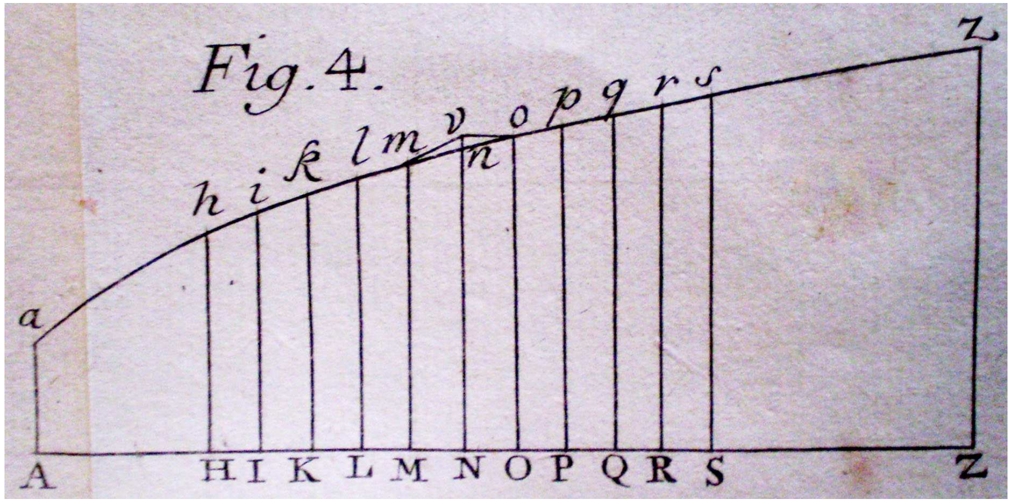
Given points B and C
given function $g(y) : aN \mapsto MN$
find curve BaC of **given** length L,
with area $BMETNB$ maximal.

Euler's *Methodus inveniendi lineas curvas* (1744):

$$J = \int_a^b Z(x,y,p)\,dx = \text{min! vel max!} \quad \text{where } p = \frac{dy}{dx}$$

Euler's Solution.

1. Approximate curve by polygon



2. Approx. Integral by -sum ("Riemann")

$$Z\,dx + Z'\,dx + Z''\,dx + Z'''\,dx + \&c.$$

and diff. w.r. to ν;

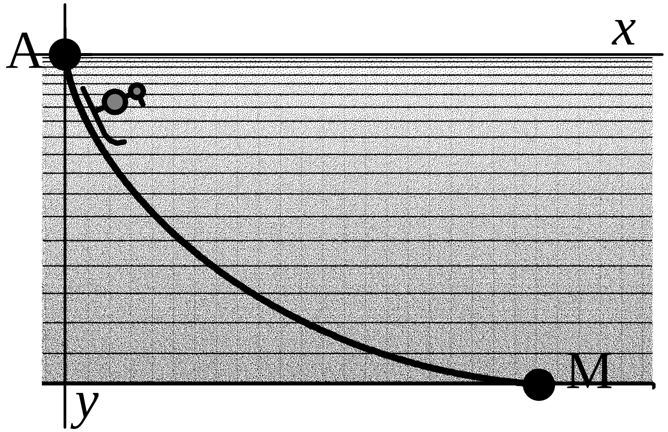
3. Set derivative $(P + N'dx - P')$ to zero;

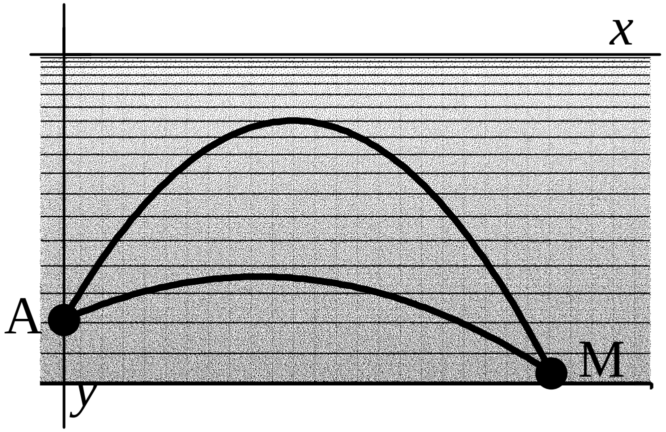
4. inverse Euler method $\Rightarrow$ $N - \dfrac{dP}{dx} = 0$ $\left(N = \dfrac{\partial Z}{\partial y},\ P = \dfrac{\partial Z}{\partial p}\right)$.

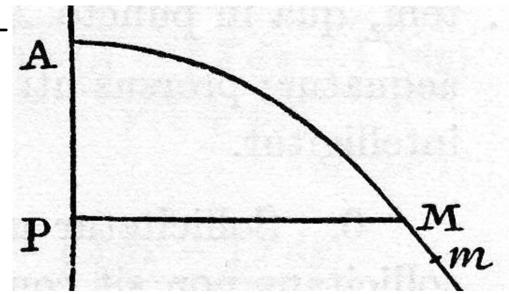
A first integration: (*Methodus*, E65, Cap. II, Art. 30, Schol. I):

"in functione Z omnino non insit x.." $\Rightarrow$ $\boxed{Z - p \cdot P = \text{Const.}}$

Exemplum: "Mobile per quam gravitate" from A to M ($u = \sqrt{y}$):







Drawing by Euler

Least **time:** (Cap. II, Art. 35)

$$\int \frac{ds}{u} = \int \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{y}}\, dx = \text{min!}$$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = c\,\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = c \sin\alpha$$

"curva satisfaciens Cyclois"

Least **action:** (Additamentum II)

$$\int u\, ds = \int \sqrt{y}\sqrt{1+p^2}\, dx = \text{min!}$$

$$\Rightarrow y = c\,(1+p^2)$$

"Manifestum ... aequationem esse pro Parabola."

quin, ope principiorum sanioris Metaphysicæ, ad majorem evidentiam evehi queat; quod negotium aliis, qui Metaphysicam profitentur, relinquo.

(The very end of E65)

Isoperimetric Problems: (with “proprietate prædititas”)

$$J = \int_a^b Z(x,y,p)\,dx = \text{minmax!} \quad \text{with} \quad \int_a^b L(x,y,p)\,dx = 0.$$

Euler’s *Methodus*, Chap. V: entirely new theory (16 pages), changing values of y two-by-two to respect the constaint:

DE METHODO MAX. ET MIN. RELATIVA. 171

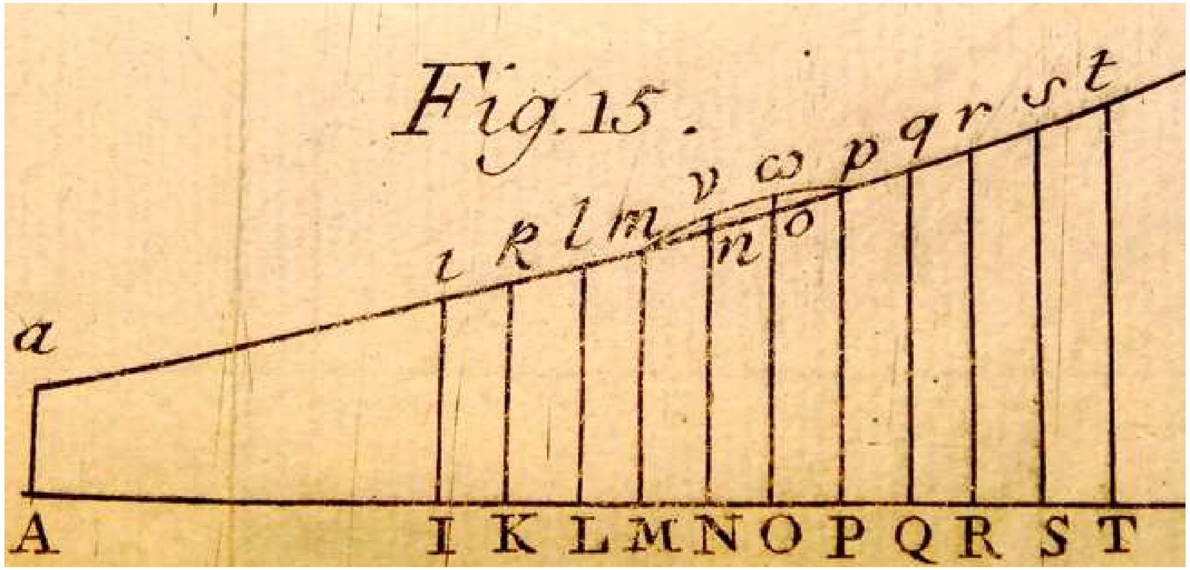
CAPUT V.

Methodus, inter omnes curvas eadem proprietate præditas, inveniendi eam, quæ maximi minimive proprietate gaudeat.

DEFINITIO.

1. Proprietas communis est Formula integralis, seu expressio indefinita, quæ in omnes curvas ex quibus quæsita determinari oportet, æqualiter competit.

Begin of Euler’s “Caput V”



Drawing in Euler’s Caput V

Isoperimetric Problems: (with “proprietate prædita”)

$$J = \int_a^b Z(x,y,p)\,dx = \text{minmax!} \quad \text{with} \quad \int_a^b L(x,y,p)\,dx = 0.$$

Lagrange 1811:

§ III.

Analogie des problèmes de ce genre avec ceux de maximis et minimis.

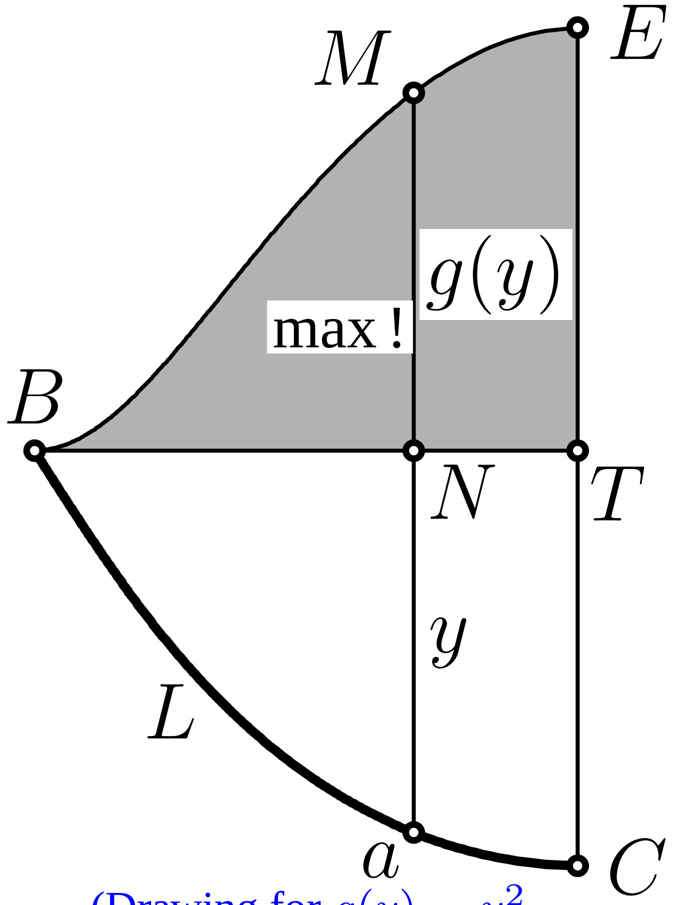
Heading of §3 in Section IV of Lagrange (1811)

Lagrange 1788 (Sect. V): Solve without constraints

$$J = \int_a^b [Z(x,y,p) + \lambda L(x,y,p)]\,dx = \text{minmax.}$$

Many examples. Here (Euler, §41 of E65, Caput V):

Solution of Jakob's Challenge by Lagrange multipliers:



(Drawing for $g(y) = y^2$
Integral calculated numerically)

$$\int_0^1 \left(g(y) + \lambda\left(\sqrt{1+p^2} - L\right)\right) dx = \max!$$

Euler's diff. equation $\boxed{Z - p \cdot \frac{\partial Z}{\partial p} = \text{Const}}$ becomes:

$$g(y) + \frac{\lambda}{\sqrt{1+p^2}} = C + \lambda L\,.$$

separation of variables:

$$\int \frac{g(y)+K}{\sqrt{\lambda^2 - (g(y)+K)^2}}\, dy = x + c\,.$$

Bernoulli 1718: $y = \int \frac{(X \pm c)\,dx}{\sqrt{(aa - (X \pm c)^2)}}$

Questo problema:

- Fratelli Bernoulli — 20 anni
- Euler 1744 — 20 pagine
- Lagrange 1788 — In tribus lineis!!

Remark. This problem gave rise for the first explicit ...

DEFINITION.

On appelle ici *Fonction* d'une grandeur variable, une quantité compoſée de quelque maniére que ce ſoit de cette grandeur variable & de conſtantes.

(Bernoulli 1718)

4. Dynamics

Lagrange 1760, opus 7: (Misc. Taurinensia, vol. II.)

Application de la Méthode précédente à la solution de différens Problémes de Dynamique.

PAR M. DE LA GRANGE.

M. Euler dans une Addition à son excellent Ouvrage qui a pour titre *Methodus maximorum &c.* a démontré ce Principe que, dans les trajectoires que des corps décrivent par des forces centrales, l'intégrale de la vitesse multipliée par l'élément de la courbe fait toujours un *maximum*, ou un *minimum*.

Je me propose ici de généraliser ce même Principe, & d'en faire voir l'usage pour résoudre avec facilité toutes les questions de Dynamiques.

PRINCIPE GÉNÉRAL.

Soient tant de corps qu'on voudra M, M', M'' &c. qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, & qui soient, de plus, si l'on veut, animés par des forces centrales proportionelles à des fonctions quelconques des distances; que s, s', s'' &c. dénotent les espaces parcourus par ces corps dans le tems t, & que u, u', u'' &c. soient leurs vitesses à la fin de ce tems; la formule $M\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + M''\int u''\,ds''$ + &c. sera toujours un *maximum*, ou un *minimum*.

I.

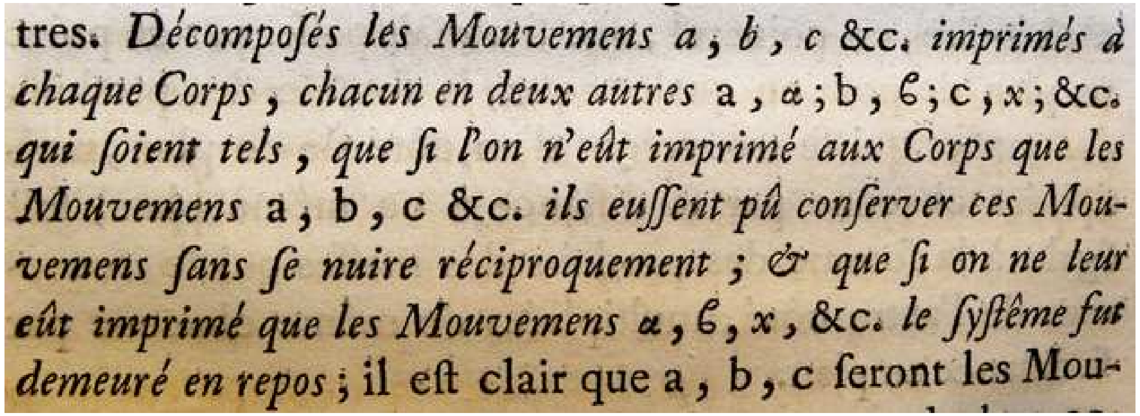
PROBLEME 1. Trouver le mouvement d'un corps M attiré vers tant de centres fixes qu'on voudra par des forces P, Q, R &c. exprimées par des fonctions quelconques des distances.

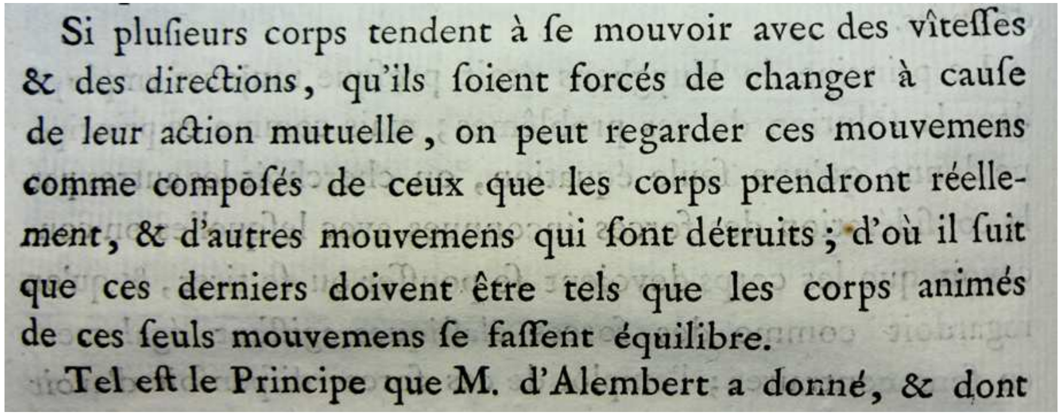
Starts right away with “Principe Général” for **several** bodies

$$M\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + M''\int u''\,ds'' + \ldots = \text{maxmin!}$$

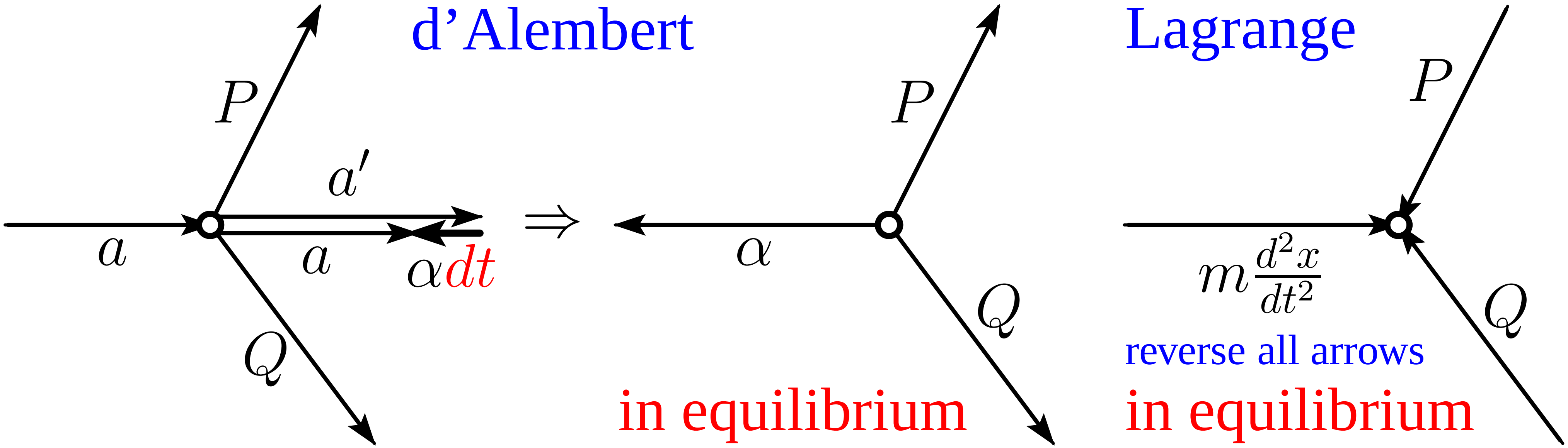
“and to use it for solving easily all questions of dynamics.”

Lagrange 1788: Use d'Alembert's Principle (Paris 1743):


tres. *Décompoſés les Mouvemens a, b, c &c. imprimés à chaque Corps, chacun en deux autres* a, α; b, ϐ; c, x; &c. *qui ſoient tels, que ſi l'on n'eût imprimé aux Corps que les Mouvemens* a, b, c &c. *ils euſſent pû conſerver ces Mouvemens ſans ſe nuire réciproquement; & que ſi on ne leur eût imprimé que les Mouvemens α, ϐ, x, &c. le ſyſtême fût demeuré en repos;* il eſt clair que a, b, c ſeront les Mou-


Si pluſieurs corps tendent à ſe mouvoir avec des vîteſſes & des directions, qu'ils ſoient forcés de changer à cauſe de leur action mutuelle, on peut regarder ces mouvemens comme compoſés de ceux que les corps prendront réellement, & d'autres mouvemens qui ſont détruits; d'où il ſuit que ces derniers doivent être tels que les corps animés de ces ſeuls mouvemens ſe faſſent équilibre.

Tel eſt le Principe que M. d'Alembert a donné, & dont



"Le *Traité de Dynamique* de M. d'Alembert, ... parut en 1743, ... Cette méthode réduit toutes les loix du mouvement des corps à celles de leur équilibre, & ramene ainsi la Dynamique à la Statique" (Lagrange 1788, Seconde Partie, p. 179)

Way to general formula for all problems of dynamics:

"Dans la première partie de cet Ouvrage,
nous avons réduit toute la Statique à une seule formule générale..."

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c = 0.$$

formule générale de l'équilibre d'un

Bernoulli's regle as written by Lagrange 1788, part I

$$\Downarrow$$

"On pourra donc aussi réduire à une formule générale toute la Dynamique; ..."

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z + P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \&c.\right) m = 0,$$

General equation for dynamics, Lagrange 1788, Part II

"... mais cette méthode ... a l'avantage d'ètre tirée des premiers principes de la Mécanique [... but this method has the advantage of having been obtained from the first principles of mechanics]" (end of Part II, Sec. I).

So-called "Newton's Equations" (Lagrange 1788, Section III):

Suppose that, as above,

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

ect. citée), cette formule devient

$$S\left(\frac{d^2 x}{dt^2} + X\right) m\,\delta x + S\left(\frac{d^2 y}{dt^2} + Y\right) m\,\delta y$$

$$+ S\left(\frac{d^2 z}{dt^2} + Z\right) m\,\delta z = 0\,;$$

Et de-là on tire ſur le champ ces trois équations générales,

$$S\left(\frac{d^2 x}{dt^2} + X\right) m = 0,$$

$$S\left(\frac{d^2 y}{dt^2} + Y\right) m = 0,$$

$$S\left(\frac{d^2 z}{dt^2} + Z\right) m = 0,$$

Retain original coordinates : Example: Elastic pendulum.

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

d'A-B: $\ddot{x}\,\delta x + \ddot{y}\,\delta y + R\,\delta r + \Phi\,\delta\varphi = 0$

Potential: $U = \lambda\frac{(1-r)^2}{2} + r\cos\varphi;$

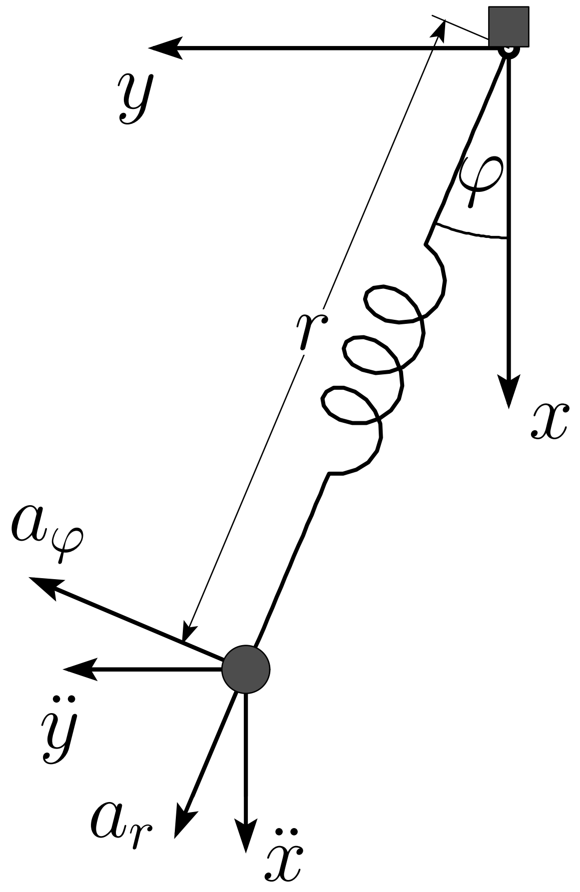
$$R = \lambda(1-r) + \cos\varphi, \qquad \Phi = r\sin\varphi$$

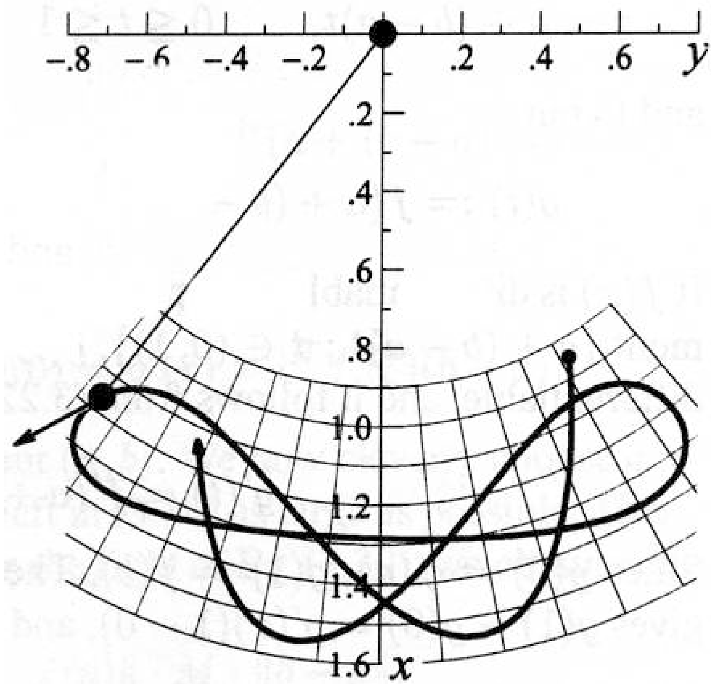
comp.: $a_r = \cos\varphi\,\ddot{x} + \sin\varphi\,\ddot{y} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$

$$a_\varphi = r\cos\varphi\,\ddot{y} - r\sin\varphi\,\ddot{x} = 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}$$

$$(\dots)\delta r = 0 \Rightarrow \ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 + \lambda(1-r) + \cos\varphi$$

$$(\dots)\delta\varphi = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} - \frac{\sin\varphi}{r}$$





... e adesso facciamo qualque esercizi ...