La naissance difficile de la stochastique

(extrait: pour le texte de la conférence, voir

Historia Mathematica 41 (2014), p.277–290)

Martin Mattmüller, Bernoulli-Euler-Zentrum Basel

Cours de perfectionnement CRM-CMSI

"Eadem mutata resurgo - L'héritage des Bernoulli"

Ascona, 22 septembre 2016

UNI BASEL

BERNOULLI EULER ZENTRUM

Jacob (I) Bernoulli (1654–1705)

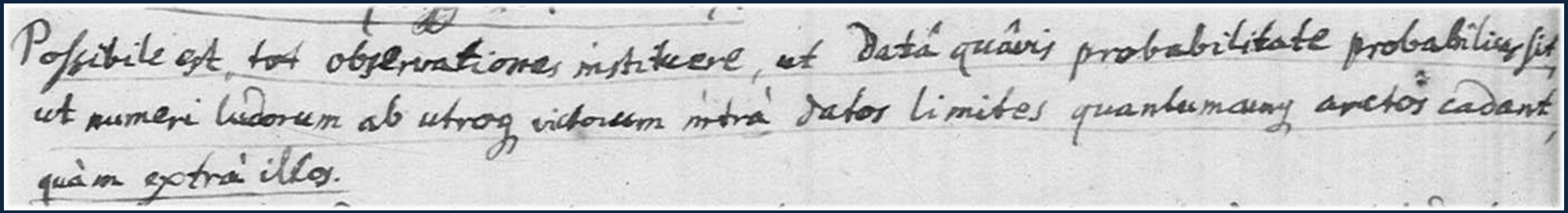
Digression:

La Loi des Grands Nombres -

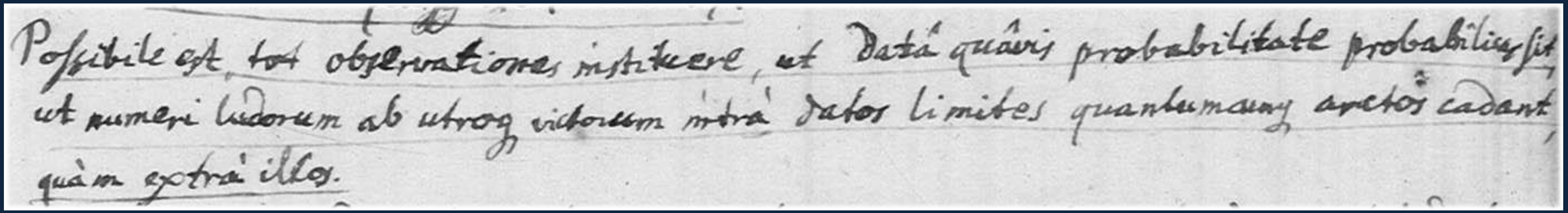
formulation originale et interprétation

du théorème principal de la stochastique de Jacob Bernoulli

d’après les *Meditationes*: Ms UB Basel L Ia 3, p. 185-191 (1689)


Possibile est, tot observationes instituere, ut Datâ quâvis probabilitate probabilius sit, ut numeri ludorum ab utroq victorum intrà datos limites quantumcunq arctos cadant, quàm extrà illos.

Possibile est, tot observationes instituere, ut data quavis probabilitate probabilius sit,
ut numeri ludorum ab utroque victorum intra datos limites quantumcunque arctos cadant,
quam extra illos.


Possibile est, tot observationes instituere, ut Datâ quâvis probabilitate probabilius sit ut numeri ludorum ab utroq victorum intrà datos limites quantumcunq arctos cadant quàm extrà illos.

Possibile est, tot observationes instituere, ut data quavis probabilitate probabilius sit, ut numeri ludorum ab utroque victorum intra datos limites quantumcunque arctos cadant, quam extra illos.

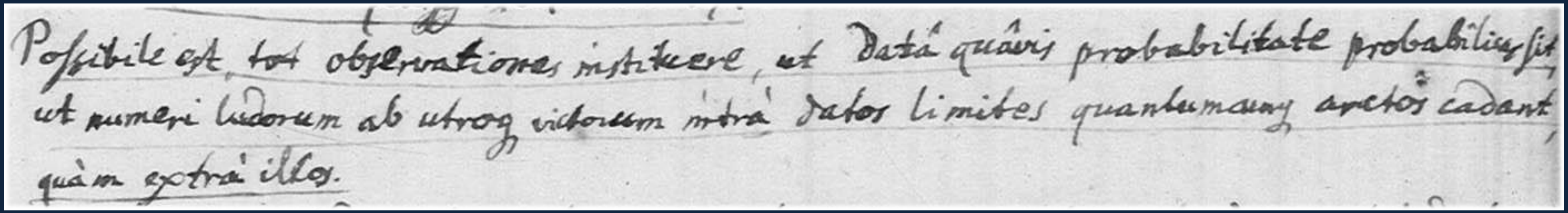
Il est possible de faire autant d'observations qu'il est plus probable de toute probabilité donnée que le nombre des parties gagnées par chacun des deux joueurs tombe entre des bornes fixées – aussi étroites qu'elles soient – qu'en dehors.

Possibile est, tot observationes instituere, ut Datâ quâvis probabilitate probabilius sit
ut numeri ludorum ab utroq victorum intrà datos limites quantumcunq arctos cadant
quàm extrà illos.

Possibile est, tot observationes instituere, ut data quavis probabilitate probabilius sit, ut numeri ludorum ab utroque victorum intra datos limites quantumcunque arctos cadant, quam extra illos.

Il est possible de faire autant d'observations (N) qu'il est plus probable de toute probabilité donnée que le nombre des parties gagnées par chacun des deux joueurs tombe entre des bornes fixées – aussi étroites qu'elles soient – qu'en dehors.

N tel que

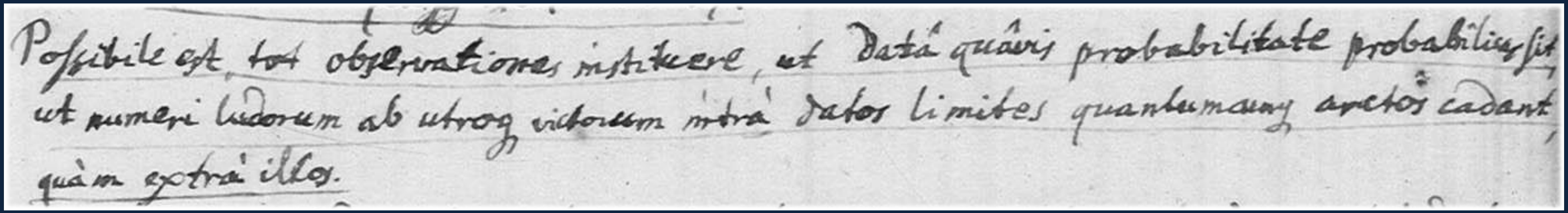

Possibile est, tot observationes instituere, ut Datâ quâvis probabilitate probabilius sit, ut numeri ludorum ab utroq victorum intrà datos limites quantumcunq arctos cadant, quàm extrà illos.

Possibile est, tot observationes instituere, ut data quavis probabilitate probabilius sit, ut numeri ludorum ab utroque victorum intra datos limites quantumcunque arctos cadant, quam extra illos.

Il est possible de faire autant d'observations (N) qu'il est plus probable de toute probabilité donnée $(> 1 - \varepsilon)$ que le nombre des parties gagnées par chacun des deux joueurs tombe entre des bornes fixées – aussi étroites qu'elles soient – qu'en dehors.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il y a N tel que

$$\text{Prob} \left(\qquad\qquad\qquad \right) > 1 - \varepsilon$$

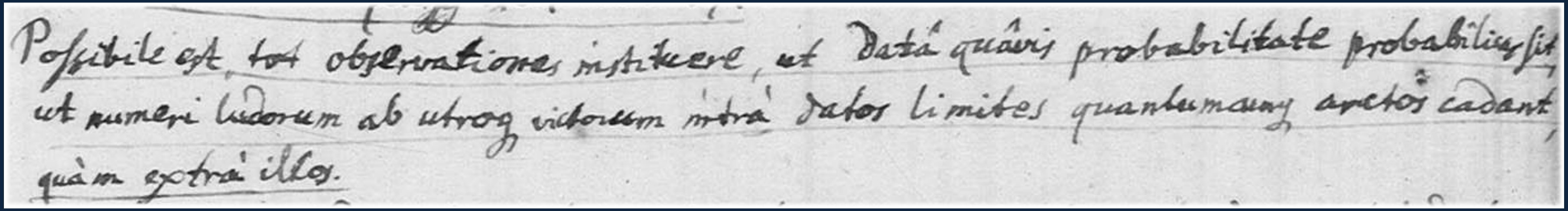

Possibile est, tot observationes instituere, ut Datâ quâvis probabilitate probabilius sit ut numeri ludorum ab utroq victorum intrà datos limites quantumcunq arctos cadant, quàm extrà illos.

Possibile est, tot observationes instituere, ut data quavis probabilitate probabilius sit, ut numeri ludorum ab utroque victorum intra datos limites quantumcunque arctos cadant, quam extra illos.

Il est possible de faire autant d'observations (N) qu'il est plus probable de toute probabilité donnée $(> 1 - \varepsilon)$ que le nombre (N_+) des parties gagnées par chacun des deux joueurs tombe entre des bornes fixées – aussi étroites qu'elles soient – qu'en dehors.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il y a N tel que

$$\text{Prob}\,(\quad (N_+/N) \qquad\qquad) > 1 - \varepsilon$$


Possibile est, tot observationes instituere, ut Datâ quâvis probabilitate probabilius sit, ut numeri ludorum ab utroq victorum intrà datos limites quantumcunq arctos cadant, quàm extrà illos.

Possibile est, tot observationes instituere, ut data quavis probabilitate probabilius sit, ut numeri ludorum ab utroque victorum intra datos limites quantumcunque arctos cadant, quam extra illos.

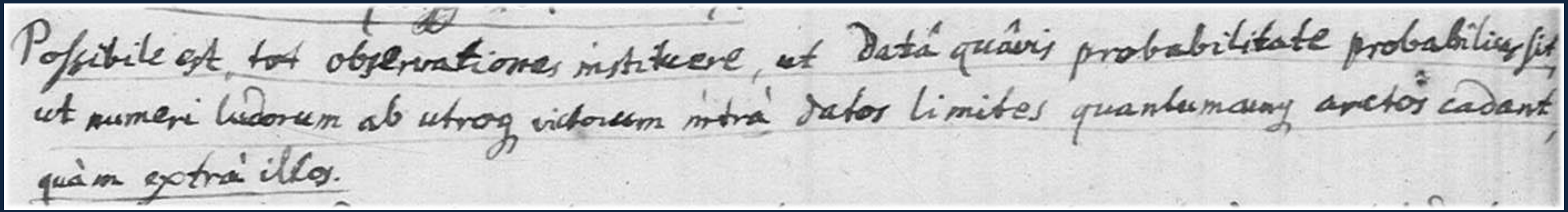
Il est possible de faire autant d'observations (N) qu'il est plus probable de toute probabilité donnée $(> 1 - \varepsilon)$ que le nombre (N_+) des parties gagnées par chacun des deux joueurs tombe entre des bornes fixées – aussi étroites qu'elles soient – qu'en dehors.

Le modèle («expérience de Bernoulli»):

Extraction de cailloux d'une boîte avec n cailloux dont n_+ sont blancs: probabilité n_+/n donnée mais inconnue *a priori*

Pour tout $\varepsilon > 0$ il y a N tel que

$$\text{Prob}\left((N_+/N) \qquad \right) > 1 - \varepsilon$$


Possibile est, tot observationes instituere, ut datâ quâvis probabilitate probabilius sit
ut numeri ludorum ab utroq victorum intra datos limites quantumcunq arctos cadant,
quàm extra illos.

Possibile est, tot observationes instituere, ut data quavis probabilitate probabilius sit, ut numeri ludorum ab utroque victorum intra datos limites quantumcunque arctos cadant, quam extra illos.

Il est possible de faire autant d'observations (N) qu'il est plus probable de toute probabilité donnée $(> 1 - \varepsilon)$ que le nombre (N_+) des parties gagnées par chacun des deux joueurs tombe entre des bornes fixées $(p - \delta\ ,\ p + \delta)$ – aussi étroites (δ) qu'elles soient – qu'en dehors.

Le modèle («expérience de Bernoulli»):

Extraction de cailloux d’une boîte avec n cailloux dont n_+ sont blancs:
probabilité $p = n_+/n$ donnée mais inconnue *a priori*

Pour tout $\delta, \varepsilon > 0$ il y a N tel que

$$\text{Prob}\ (\ |\ (N_+/N) - p\ | < \delta\ ) > 1 - \varepsilon$$

Le modèle («expérience de Bernoulli»):

Extraction de cailloux d'une boîte avec n cailloux dont n_+ sont blancs:
probabilité $p = n_+/n$ donnée mais inconnue *a priori*

Pour tout $\delta, \varepsilon > 0$ il y a N tel que

$$\mathrm{Prob}\,(\,|\,(N_+/N) - p\,|\, < \delta\,) > 1 - \varepsilon$$

La démonstration de Jacob Bernoulli
(très semblable dans les *Meditationes* et l'*Ars Conjectandi*):

Lemmes sur des sommes de termes contigus de la distribution binomiale
par l'estimation du rapport des coefficients binomiaux –
élémentaire, mais techniquement assez délicat

Le modèle («expérience de Bernoulli»):

Extraction de cailloux d'une boîte avec n cailloux dont n_+ sont blancs:
probabilité $p = n_+/n$ donnée mais inconnue *a priori*

Pour tout $\delta, \varepsilon > 0$ il y a N tel que

$$\text{Prob}\,(\,|\,(N_+/N) - p\,| < \delta\,) > 1 - \varepsilon$$

La démonstration de Jacob Bernoulli
(très semblable dans les *Meditationes* et l'*Ars Conjectandi*):

Lemmes sur des sommes de termes contigus de la distribution binomiale
par l'estimation du rapport des coefficients binomiaux –
élémentaire, mais techniquement assez délicat

L'exemple de calcul de Jacob Bernoullis (*Ars Conjectandi*):

- 30 cailloux blancs, 20 noirs dans la boîte, donc $p = 0.6$

Le modèle («expérience de Bernoulli»):

Extraction de cailloux d'une boîte avec *n* cailloux dont n_+ sont blancs:
probabilité $p = n_+/n$ donnée mais inconnue *a priori*

Pour tout $\delta, \varepsilon > 0$ il y a N tel que

$$\text{Prob}\,(\,|\,(N_+/N) - p\,| < \delta\,) > 1 - \varepsilon$$

La démonstration de Jacob Bernoulli
(très semblable dans les *Meditationes* et l'*Ars Conjectandi*):

Lemmes sur des sommes de termes contigus de la distribution binomiale
par l'estimation du rapport des coefficients binomiaux –
élémentaire, mais techniquement assez délicat

L'exemple de calcul de Jacob Bernoullis (*Ars Conjectandi*):

- 30 cailloux blancs, 20 noirs dans la boîte, donc $p = 0.6$
- déviation de moins d'un caillou permise, donc $\delta = 0.02$ et $0.58 < N_+/N < 0.62$

Le modèle («expérience de Bernoulli»):

Extraction de cailloux d'une boîte avec n cailloux dont n_+ sont blancs: probabilité $p = n_+/n$ donnée mais inconnue *a priori*

Pour tout $\delta, \varepsilon > 0$ il y a N tel que

$$\text{Prob}\,(\,|\,(N_+/N) - p\,| < \delta\,) > 1 - \varepsilon$$

La démonstration de Jacob Bernoulli
(très semblable dans les *Meditationes* et l'*Ars Conjectandi*):

Lemmes sur des sommes de termes contigus de la distribution binomiale par l'estimation du rapport des coefficients binomiaux – élémentaire, mais techniquement assez délicat

L'exemple de calcul de Jacob Bernoullis (*Ars Conjectandi*):

- 30 cailloux blancs, 20 noirs dans la boîte, donc $p = 0.6$
- déviation de moins d'un caillou permise, donc $\delta = 0.02$ et $0.58 < N_+/N < 0.62$
- probabilité d'erreur au plus 1 sur 1000 expériences, donc $\varepsilon = 0.001$

Le modèle («expérience de Bernoulli»):

Extraction de cailloux d'une boîte avec n cailloux dont n_+ sont blancs:
probabilité $p = n_+/n$ donnée mais inconnue *a priori*

Pour tout $\delta, \varepsilon > 0$ il y a N tel que

$$\mathrm{Prob}\,(\,|\,(N_+/N) - p\,|\,< \delta\,) > 1 - \varepsilon$$

La démonstration de Jacob Bernoulli
(très semblable dans les *Meditationes* et l'*Ars Conjectandi* sehr ähnlich):

Lemmes sur des sommes de termes contigus de la distribution binomiale
par l'estimation du rapport des coefficients binomiaux –
élémentaire, mais techniquement assez délicat

L'exemple de calcul de Jacob Bernoullis (*Ars Conjectandi*):

- 30 cailloux blancs, 20 noirs dans la boîte, donc $p = 0.6$
- déviation de moins d'un caillou permise, donc $\delta = 0.02$ et $0.58 < N_+/N < 0.62$
- probabilité d'erreur au plus 1 sur 1000 expériences, donc $\varepsilon = 0.001$

Alors on a besoin de $N = 25`550$ observations.