Johann Bernoulli, enveloppes et courbes transcendantes

Philippe HENRY

(Genève)

Cours CRM - WBZ CPS
Monte Verità, Ascona
Mercredi 21 septembre 2016

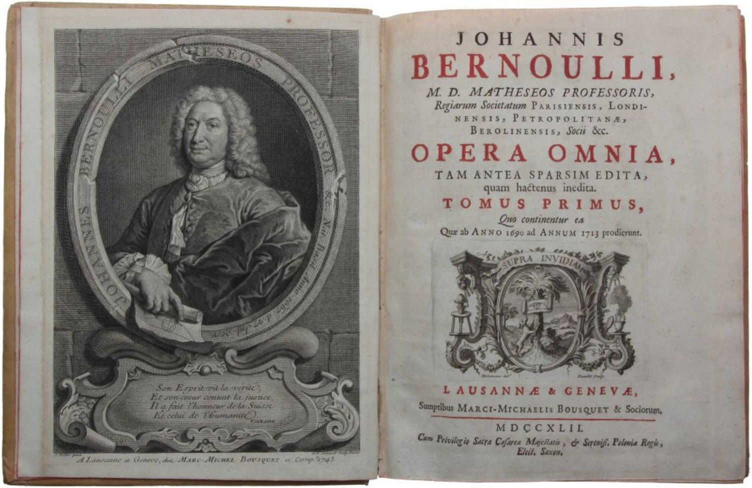
Contenu

Repères chronologiques

Naissance à Bâle le	27 juillet 1667 (6 août 1667)
Étudiant à l'université de Bâle	1683
Magister artium	1685
Études de médecine	1685-1690
En voyage à Genève puis à Paris	fin 1690 - fin 1692
Début de sa correspondance avec Leibniz	1694
Doctorat en médecine	1694
Mariage avec Dorothée Falkner	1694
Professeur de mathématiques à l'université de Groningue (Pays-Bas)	novembre 1695
Professeur de mathématiques à l'université de Bâle	novembre 1705
Mort à Bâle le	1er janvier 1748

« Je m'acquitte avec bien du plaisir, Monsieur, de la commission que mon Père me donne de répondre pour lui à la lettre que vous lui avés fait l'honneur de lui écrire le 5 de ce mois. Il dit qu'il se feroit un plaisir de vous envoyer son portrait, que vous lui demandés, s'il en avoit un qui lui ressembloit, mais tous les peintres qui l'ont tiré ont été si malheureux que de tous les portraits qu'on a faits de lui il n'y en a pas un qui soit seulement passable. Ce mauvais succès lui a ôté l'envie de se faire tirer d'avantage ; il croiroit depenser mal à propos son argent. »

(Johann II Bernoulli à Gabriel Cramer, 09.07.1740, BGE, Ms suppl. 384 f.19)



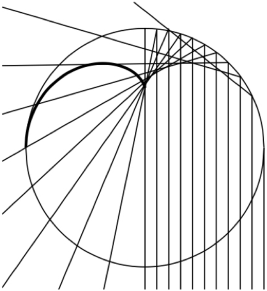
« Si c'est une sorte de douceur pour moi de voir le recueil de mes ouvrages publiés encore avant la fin de mes jours, je sens, Monsieur, que c'est à vous que j'en suis le plus redevable ; je sais combien cette Edition vous a couté de soins, d'attentions et de complaisance et que sans vous le libraire, bien loin de venir à bout d'un ouvrage pour lequel il avoit un si grand bésoin de vos secours, il n'auroit pas osé l'entreprendre. »

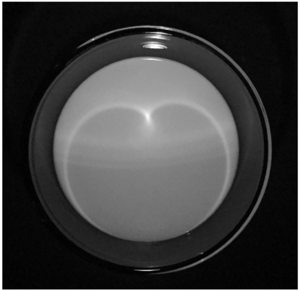
(J. B. à Gabriel Cramer, 01.05.1743, BGE, Ms suppl. 384 f.37)

Les « courbes que la Nature nous met tous les jours devant les yeux »

- étude des mathématiques « à l'inclination et à l'imitation » de son frère ;
- découverte par « un hazard imprévu » de la *Nova methodus* de Leibniz (1684) : « une énigme plutôt qu'une explication » ;
- problème de la chaînette (mai 1690 - juin 1691).

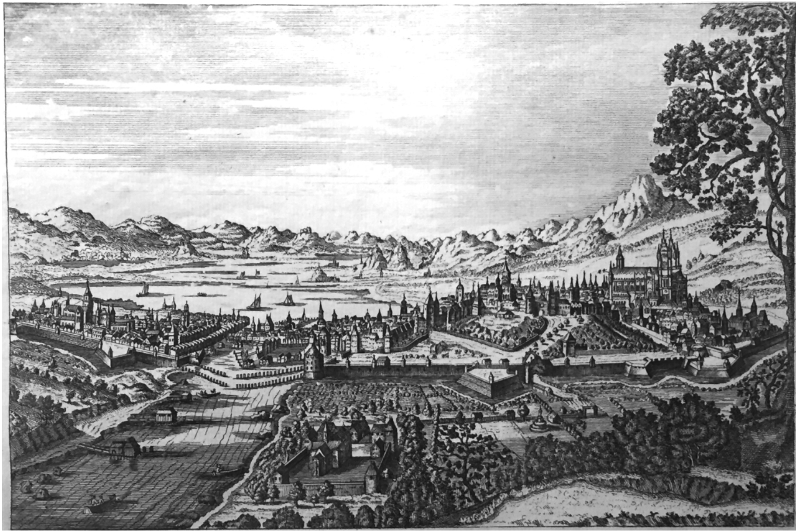
« Mon *Frére*, Professeur à *Bâle*, a pris de là occasion de rechercher plusieurs courbes que la Nature nous met tous les jours devant les yeux (...). »





La néphroïde et la cardioïde.

Vue de Genève au XVII$^{\text{ème}}$ siècle



« lucubratiuneulam *Geneva* » (*Acta Eruditorum*, janvier 1692)

SOLUTIO CURVÆ CAUSTICÆ PER VULgarem Geometriam Cartesianam; aliaque,
Auctore Johanne Bernoulli, Med. Cand.

QUia modus, quo naturam Curvæ Causticæ, Nob. D. T. primum consideratæ, per vulgarem Geometriam inquisivi, diversamque deprehendi ab ea, quam applicatæ Semicirculi in punctis bisectionum formant, non cuivis obvius est, placet hic eum in gratiam amatorum hujus Geometriæ plenius exponere: ubi primo notare convenit,
TAB. I. quod (Fig. I) CB radius reflexus paralleli DC, sit æqualis ipsi AB, interceptæ inter centrum A & punctum intersectionis B. Nam ob ang. ACF = ACE & DCF = BCE, erit ACB = ACD = CAB, ergo BC = AB. q. e. d.

Équation de la néphroïde :

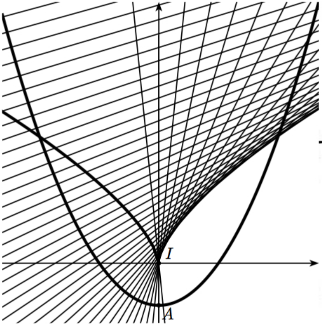
$$\begin{array}{ccccc} 64x^6 & -48a^2x^4 & +12a^4x^2 & -a^6 & = 0. \\ & +192y^2x^4 & -96a^2y^2x^2 & -15a^4y^2 & \\ & & +192y^4x^2 & -48a^2y^4 & \\ & & & +64y^6 & \end{array}$$

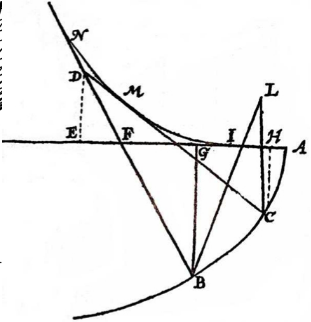
Courbe géométrique (au sens de Descartes, 1637)
mais de degré 6 et non 4 (Tschirnhaus, 1682).

« Du reste, le *Très Illustre Frère* remarqua que cette méthode peut être généralisée & employée pour déterminer les natures de toutes les Développées et Caustiques, c'est-à-dire les courbes formées par les intersections des perpendiculaires ou des rayons réfléchis. »

Développée de la parabole (*Acta Eruditorum*, janvier 1692)

Parabole de sommet A et de *latus rectum* égal à a : $I = (0;0) \Rightarrow y = \frac{x^2}{a} - \frac{a}{2}$.





BN, CM normales, D intersection, $IE = x$, $ED = y$, $BG = z$, $GF = \frac{a}{2}$ (sous-normale)

$AG = \frac{z^2}{a}$, $FE = \frac{ay}{2z}$ (car $FBG \sim FDE$)

$AI + IE = AG + GF + FE \Rightarrow \frac{z^2}{a} - x + \frac{ay}{2z} = 0 \overset{\cdot 2az}{\Rightarrow} 2z^3 - 2axz + a^2y = 0$

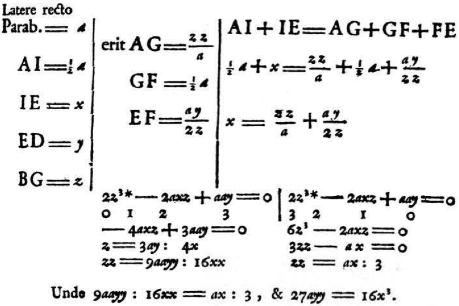
Cette équation possède deux racines positives distinctes.

Construction

Développée de la parabole (*Acta Eruditorum*, janvier 1692)

D appartient à la développée $\Rightarrow 2z^3 - 2axz + a^2y = 0$ possède une racine double

Johann applique alors la méthode de Hudde (1658) : “multiplier” par une progression arithmétique livre une équation qui possède encore cette même racine.



Latere recto Parab. $= a$ | erit $AG = \frac{zz}{a}$ | $AI + IE = AG + GF + FE$

$AI = \frac{1}{2}a$ | $GF = \frac{1}{2}a$ | $\frac{1}{2}a + x = \frac{zz}{a} + \frac{1}{2}a + \frac{ay}{2z}$

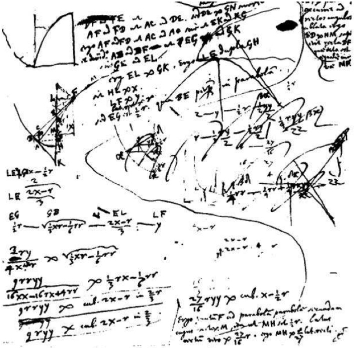
$IE = x$ | $EF = \frac{ay}{2z}$ | $x = \frac{zz}{a} + \frac{ay}{2z}$

$ED = y$

$BG = z$

$$\begin{array}{l|l}
2z^3 * - 2axz + aay = 0 & 2z^3 * - 2axz + aay = 0 \\
0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 & 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\
-4axz + 3aay = 0 & 6z^3 - 2axz = 0 \\
z = 3ay : 4x & 3zz - ax = 0 \\
zz = 9aayy : 16xx & zz = ax : 3
\end{array}$$

Unde $9aayy : 16xx = ax : 3$, & $27ayy = 16x^3$.



Équation de la développée par Johann et Huygens (origine en A, 1659) : parabole semi-cubique

La géométrie de Descartes

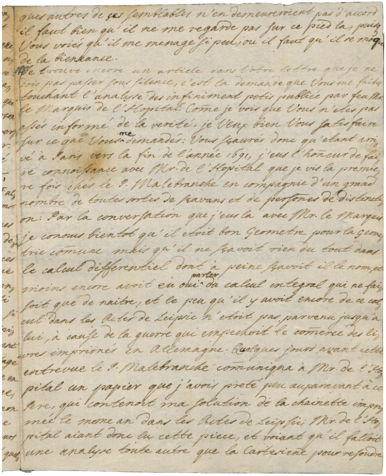
« On conclut de cela que la géométrie ordinaire, si elle est employée adroitement, peut également être étendue à ces problèmes que l'on croyait ne pouvoir être résolus sans recourir à la géométrie des indivisibles, quoique du reste elle ne mérite en aucune façon d'être comparée à celle-ci. » (J. B., *Acta Eruditorum*, janvier 1692)

Rencontre avec le marquis de l'Hospital à Paris

« Qui est ce Mr. de l'Hospital dont parle Mr. Bernoulli ? » (Leibniz à Huygens, 29.12.1691)

« (...) les deux Bernoulli à Basle (...) font plus d'honneur [aux mathématiques] que tout ce qu'il y a de Mathematiciens dans le reste de l'Europe. » (de l'Hospital à J. B., 20.02.1693)

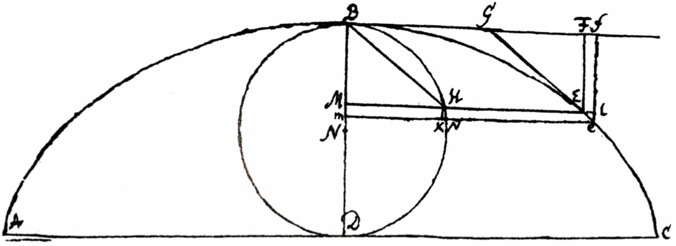
Guillaume de l'Hospital (1661-1704)


ques autres de cas semblables n'en demeureroient pas d'accord
il faut bien qu'il ne me regarde pas sur ce pied la, puisq
Vous voiés qu'il me menage si peu, ou il faut qu'il se moque
de la bienseance.
Je trouve encore un article dans Votre lettre que je ne
dois pas passer sous silence, c'est la demande que Vous me faites
touchant l'analyse des infiniment petits publiée par feu Mr.
le Marquis de l'Hospital. Come je vois que Vous n'etes pas
assés informé de la verité, je Veux bien Vous satisfaire
sur ce que Vous me demandés: Vous sçaurés donc qu'etant arri,
vé à Paris vers la fin de l'année 1691, j'eus l'honeur de fai,
re connoissance avec Mr. de l'Hopital que je vis la premie,
re fois chés le P. Malebranche en compagnie d'un grand
nombre de toutes sortes de sçavans et de persones de distincti,
on: Par la conversation que j'eus la avec Mr. le Marquis
je conus bientot qu'il etoit bon Geometre pour la geome,
trie comune mais qu'il ne sçavoit rien du tout dans
le calcul differentiel dont à peine sçavoit il le nom, et
moins encore avoit eu oui parler du calcul integral qui ne fai,
soit que de naitre, et le peu qu'il y avoit encore de ce cal,
cul dans les Actes de Leipsic n'etoit pas parvenu jusqu'a
lui, à cause de la guerre qui empechoit le comerce des li,
vres imprimés en Allemagne. Quelques jours avant cette
entrevue le P. Malebranche comuniqua à Mr. de l'Ho,
pital un papier que j'avois preté peu auparavant à ce
Pere, qui contenoit ma solution de la chainette impri,
mée le meme an dans les Actes de Leipsic; Mr. de l'Ho,
pital aiant donc lu cette piece, et voiant qu'il falloit
une analyse toute autre que la Cartesiene pour resoudre

J. B. à de Montmort du 21.05.1718

Tangente à la cycloïde (*Lectiones de calculo differentialium*)

rayon $= a, BF = ME = x, FE = BM = y$
prop. cyclo. $\Rightarrow EH =$ arc BH (noté f)
$FG = s$



$$x = BF = EH + HM = f + \sqrt{2ay - y^2} \Rightarrow EL = dx = df + \frac{ady - ydy}{\sqrt{2ay - y^2}} = \frac{2ady - ydy}{\sqrt{2ay - y^2}}$$

car $df = \sqrt{HK^2 + KN^2} = \sqrt{(dy)^2 + (d\sqrt{2ay - y^2})^2} = \frac{ady}{\sqrt{2ay - y^2}}$

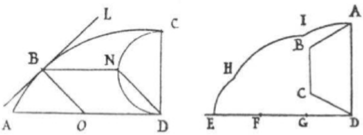
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s} \Rightarrow FG = s = \frac{ydx}{dy} = \sqrt{2ay - y^2} = HM$$

$$\Rightarrow GB = EH \Rightarrow EG \parallel BH$$

Remarque : comparaison

Descartes

(lettre à Mersenne, 23 août 1638)



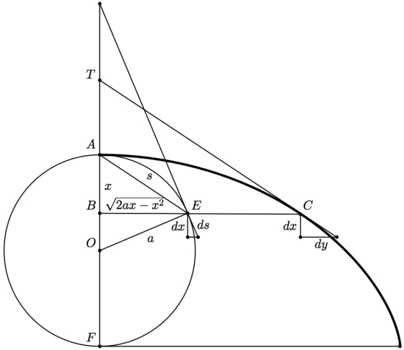
"considérant la roulete comme un polygone a une infinité de costez"

La propriété de perpendicularité de la tangente au cercle est préservée.

"il n'est pas aisé d'y appliquer les règles qui servent aux autres"
(lettre à Fermat, 11 octobre 1638)

Leibniz

(lettre à Huygens, 25 juillet 1690)



$$\frac{ds}{dx} = \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}, \quad s = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

$$BC = y = \sqrt{2ax - x^2} + \int \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

$$\frac{BC}{BT} = \frac{dy}{dx} = \frac{2a - x}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{BF}{BE} = \frac{BE}{AB}$$

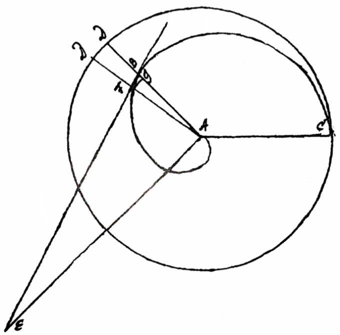
$$\Rightarrow ABE \sim TBC \Rightarrow AE \parallel TC$$

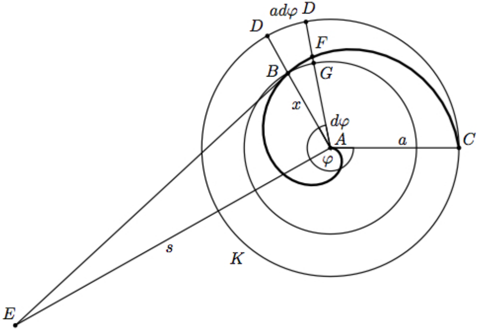
Tangente à la spirale d’Archimède (*Lectiones de calculo differentialium*)

« (...) si une droite est tangente à la spirale en son extrémité obtenue en dernier lieu, et si, sur la droite qui a tourné et repris sa place, on élève en son extrémité fixe une perpendiculaire jusqu’à sa rencontre avec la tangente, je dis que la droite ainsi menée à la rencontre est égale à la circonférence du cercle. »

(Archimède à Dosithée, *Des spirales*)

$AB = x, AC = a, b = 2\pi a$





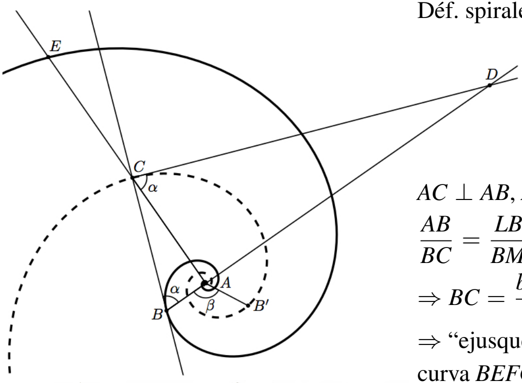
Déf. spirale $\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{a\varphi} \Rightarrow \varphi = \frac{bx}{a^2} \Rightarrow d\varphi = \frac{bdx}{a^2}$

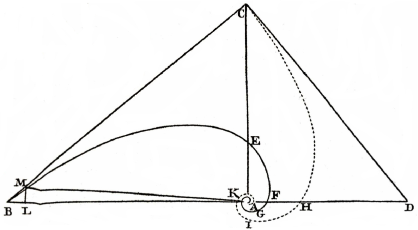
$FGB \sim BAE \Rightarrow \frac{dx}{xd\varphi} = \frac{x}{s} \Rightarrow s = \frac{x^2 d\varphi}{dx} = \frac{x^2 b}{a^2}$

$x = a \Rightarrow s = b$ (Archimède, *Des spirales*, Prop. XVIII)

Construction

Développante de la spirale logarithmique (*Lectiones de methodo integralium*)





Déf. spirale $\Rightarrow \measuredangle ABC = \text{const.} = \alpha$

(BC tangente)

$AC \perp AB$, $AB = y$, $LB = dy$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{LB}{BM} = \frac{a}{b}\Big(= \cos(\alpha)\Big)$$

$$\Rightarrow BC = \frac{b\,y}{a},\ BM = \frac{b\,dy}{a}$$

$\Rightarrow$ "ejusque integrale, id est, curva $BEFG = \frac{b\,y}{a}$ = rectæ tangenti BC."

"Dico hanc curvam $CHIK$ esse eandem Spiralem."

$CD \perp BC \Rightarrow \measuredangle ABC = \measuredangle ACD$

Constructions 1, 2

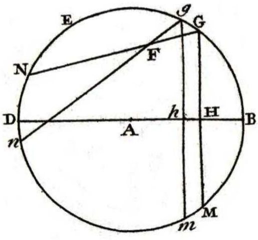
« eadem mutata resurgo » (« je renais à l'identique, déplacée »)

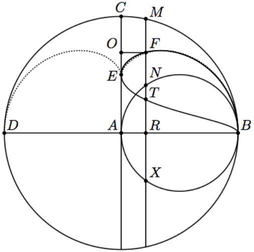
« (...) j'ai pensé qu'elle pourrait être employée avec élégance pour représenter des choses variées. »
(Jakob Bernoulli, *Acta Eruditorum*, mai 1692)

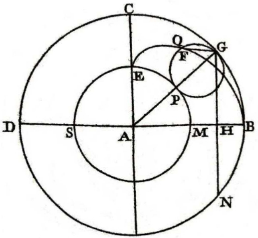
À SON ÉPOUX
JAKOB BERNOULLI
MATHÉMATICIEN INCOMPARABLE,
PROFESSEUR À L'ACADÉMIE DE BÂLE
PENDANT PLUS DE 18 ANS,
ÉGALEMENT ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE
ROYALE DE PARIS ET DE BERLIN,
CÉLÈBRE POUR LES FRUITS
PUBLIÉS DE SES VEILLES,
MORT, SUITE À UNE MALADIE CHRONIQUE,
SON ESPRIT RESTANT SAIN JUSQU'AU BOUT,
LE 16 AOÛT DE L'ANNÉE DU SALUT 1705
À L'ÂGE DE 50 ANS ET 7 MOIS,
QUI ATTEND ICI LA RÉSURRECTION
PROMISE AUX PERSONNES PIEUSES.
JUDITH STUPANA,
SON ÉPOUSE DURANT 20 ANS,
AINSI QUE LEURS DEUX ENFANTS
ONT PLACÉ CE MONUMENT POUR
LE MARI ET PÈRE
HÉLAS TANT REGRETTÉ

Comme on le voit, le graveur de la spirale n'était pas mathématicien !..

Caustique du cercle (rayons parallèles, *Lectiones de methodo integralium*)







$$2 \text{ arc } Gg = \text{ arc } mBg - \text{arc } MBG = \text{arc } gEn - \text{arc } GEN = \text{arc } Nn - \text{arc } Gg$$

$$\Rightarrow \text{arc } Nn = 3 \text{ arc } Gg \Rightarrow \frac{MG}{FG} = \frac{NG}{FG} = \frac{NF+FG}{FG} = \frac{NF+Fg}{Fg} = \frac{nN}{Gg} + 1 = 4$$

$$\Rightarrow FG = \tfrac{1}{2} GH.$$

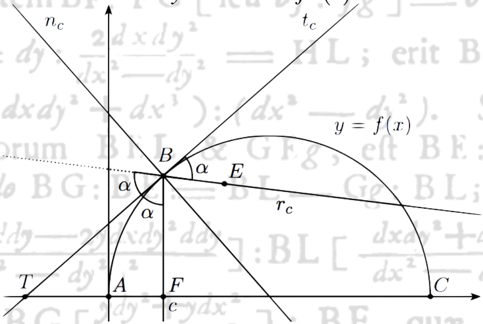
La néphroïde est une épicycloïde (Tschirnhaus 1690, Huygens 1678 (1690)) :

- seg. $GN \sim$ seg. $GQ \Rightarrow \dfrac{GN}{GQ} = \dfrac{a}{a/4} = 4 \Rightarrow \dfrac{GH}{GQ} = 2 = \dfrac{GH}{FG} \Rightarrow Q = F$.
- arc $QG = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot$ arc $GB =$ arc PM, arc $EM =$ arc $PG \Rightarrow$ arc $PF =$ arc PE.

Johann : formule différentielle pour la longueur du rayon réfléchi ;
Équations paramétriques des épicycloïdes (Euler 1775 (1781), E573) ;
Génération comme enveloppe de cordes du cercle (Cremona 1864, Laguerre 1878,...).

Formule différentielle de Johann (*Lectiones de methodo integralium*)

$$AF = x,\ FB = y \Rightarrow BE = -\frac{dx^2 + dy^2}{2d^2y} \rightsquigarrow -\frac{1+f'(x)^2}{2f''(x)}$$



Aujourd'hui, on dérive :

$$r_c(x) = \frac{1}{\tan(2\alpha)}(x-c) + f(c) = \frac{f'(c)^2 - 1}{2f'(c)}(x-c) + f(c)$$

$$\frac{\partial r_c}{\partial c}(x,c) = \frac{(1+f'(c)^2)((x-c)f''(c) + f'(c))}{2f'(c)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{cf''(c) - f'(c)}{f''(c)} \Rightarrow E = \left(\frac{cf''(c)-f'(c)}{f''(c)};\ \frac{-f'(c)^3 + f'(c)}{2f'(c)f''(c)} + f(c)\right)$$

$$f \text{ concave} \Rightarrow d_{\mathbf{R}^2}(B,E) = -\frac{1+f'(c)^2}{2f''(c)}$$

Caustique de la cycloïde (*Lectiones de methodo integralium*)

$EC = 2a$, $AG = x$, $GB = y$. Johann applique la formule $BH = -\frac{dx^2+dy^2}{2d^2y}$...

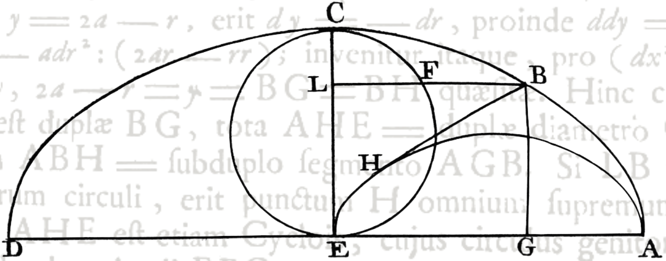
Aujourd'hui :

- $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{a-y}{y}}$ (éq. diff. de Leibniz, $EL = y, EC = a$) $\Rightarrow f'(x) = \sqrt{\dfrac{a-f(x)}{f(x)}}$
- $f''(x) = -\dfrac{af'(x)}{2f^2(x)\sqrt{\frac{a-f(x)}{f(x)}}}$

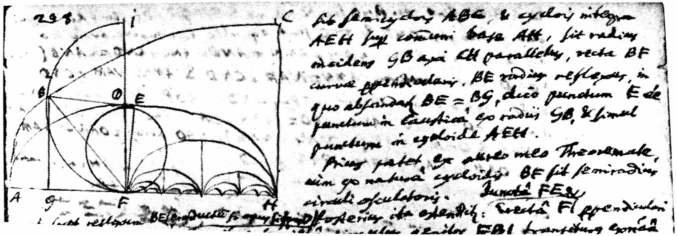
$\Rightarrow BH = -\dfrac{1+f'(x)^2}{2f''(x)} = f(x) = y = BG.$

Construction

(Construction antérieure)

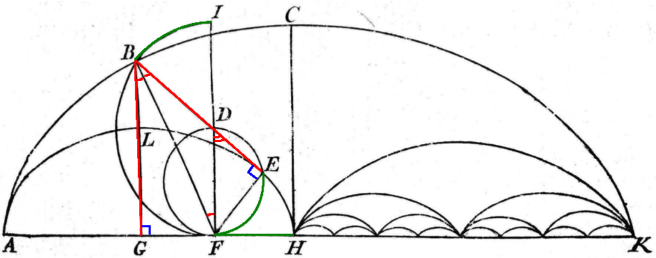


Caustique de la cycloïde (Jakob, *Acta Eruditorum*, juin 1692)


Sit semicyclois ABE, & cyclois integra AEH super communi basa AH, sit radius incidens GB axi CH parallelus, recta BF curvae perpendicularis, BE radius reflexus, in quo abscindatur BE = BG, dico punctum E esse punctum in Caustica ex radiis GB, & simul punctum in cycloide AEH.
Primum patet ex alio meo Theoremate, cum ex natura cycloidis BF sit semiradius circuli osculatoris.

ACK cycloïde,
ALH cycloïde,
$BF \perp ACK$
$BG = BE$
$\measuredangle GBF = \measuredangle FBE$

À voir : $E \in ALH$



$\triangle GBF = \triangle EBF \Rightarrow$ tracer le cercle de diamètre DF, DBF isocèle $\Rightarrow$ D centre FBI.
$\measuredangle FDE = 2\measuredangle DFB, DF = \frac{1}{2}FI \Rightarrow$ arc $FE =$ arc $BI = FH \Rightarrow E \in ALH$.

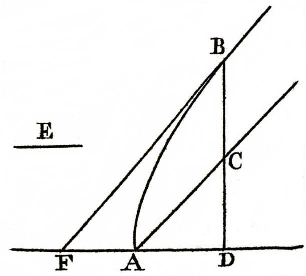
Construction de la courbe de de Beaune (*Lectiones de methodo integralium*)

- plus ancien problème relatif à la méthode inverse des tangentes ;
- discuté encore à Paris autour de Varignon en 1712.

Problème (de Beaune, 1638).

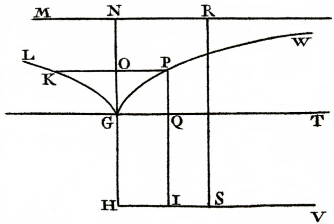
« La droite AC faisant un angle demi-droit avec l'axe $AD[= x = DC]$ et $E[= a]$ étant une ligne constante donnée, chercher la nature de la courbe AB telle que l'ordonnée $BD[= y]$ est à la sous-tangente $FD[= s]$ comme E à BC. »

Solution.



$$\frac{y}{s} = \frac{a}{y - x} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow adx = ydy - xdy$$

$$\begin{aligned} BC = z, y = x + z &\Rightarrow dy = dx + dz \\ &\Rightarrow adx = zdz + zdx \\ &\Rightarrow dx = \frac{zdz}{a - z} \\ &\Rightarrow adx = \frac{azdz}{a - z} \end{aligned}$$



Construction de Johann

De l'Hospital publie la construction de Johann...

« J'ay trouvé depuis peu la solution du Probleme que Mr. de Beaune proposa autrefois à Descartes (...). Je vous en feray part si vous jugez que cela en valle la peine (...). » (De l'Hospital à Huygens, 10.09.1692)

« Je vous envoye la solution (...) telle que je l'ai fait inserer dans le 34^{e} journal de l'année derniere. » (de l'Hospital à Huygens, 12.02.1693)

« Je suis tout à fait surpris de ce que vous me mandez que M^{r}. Huygens a fait mettre dans l'histoire (...). Je vous assure que ç'a esté à mon insceu. (...) Je lui mandois aussi que je croyois qu'il seroit bien aise de voir la construction de la courbe de M^{r}. de Beaune (...) sans lui nommer qui l'avoit trouvée, et c'est apparemment ce qui l'a fait parler de la maniere que vous me mandez. » (de l'Hospital à J. B., 16.05.1693)

« (...) je n'aurois pas manqué de protester et de le revendiquer publiquement ; tout comme j'ai fait par rapport à la construction de la courbe de Mr. de Beaune (...) dont j'etois l'Auteur, mais que Mr. le Marquis de l'Hopital doit avoir debité pour son invention dans une lettre à Mr. Huguens suivant ce que celui ci a publié (...) dans l'Histoire (...) où il attribue sans façon à Mr. de l'Hopital la dite construction (...). »

(J. B. à Montmort, 21.05.1718)

SOLUTION DU PROBLEME QUE M. DE BEAUNE *proposa autrefois à M. Descartes, & que l'on trouve dans la 79. de ses lettres, tome 3. Par Mr.* G***

PROBLEME.

UNE ligne droite quelconque N estant donnée, & ayant mené deux autres lignes indéfinies AC, AI, en sorte que l'angle CAI soit de 45 degrez ; on demande la maniere de décrire la courbe ABB qui soit de telle nature que si l'on mene d'un de ses points quelconques B, l'ordonnée BC &

1692. Iiiii

Je ne mets point ici la démonstration, parce que ceux qui entendent ces matieres, la trouveront aisément, & qu'il faudroit trop de discours pour la faire comprendre aux autres.

Journal des Sçavans du 1er septembre 1692

236 *Histoire des Ouvrages*

est la construction, avec plusieurs proprietez de la Ligne Courbe de Mr. de Beaune, que Mr. Descartes dans sa lettre 79. du 3. vol. dit lui avoir été proposée à trouver par la proprieté donnée de sa Tangente: Problême qui m'a paru très-dificile. On en trouvera la solution de Mr. le Marquis dans le 34. *Journal des Savans* de l'année derniere ; c'est pourquoi je ne la raporte point.

Histoire des Ouvrages des Sçavans, fév. 1693

Seconde construction de la courbe de de Beaune (*Acta Eruditorum*, mai 1693)

« Vous me demandez où j'ay fait voir que la courbe de de Beaune est une logarithmique d'ordonnées inclinées de 45 degrez sur son asymptote ; à cela je repons que j'en ay fait mention dans mes leçons (...) à feu Mr. le Marquis de l'Hopital ; ensuite je luy ay demontré dans une de mes lettres (...). »

(J. B. à Varignon, 11.11.1712)

« Je vous envoirai, si vous souhaitez, le chemin que j'ai tenu pour arriver à cette construction. Mais j'en ai trouve depuis une autre qui me plait davantage et dont vous jugerez. (...) on décrira (...) la logarithmique (...) qui ait (...) pour sous-tangente une ligne egale à [la droite donnée]. »

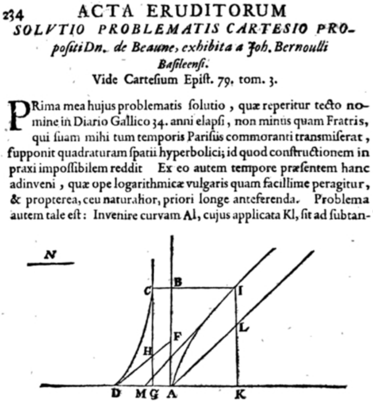
(de l'Hospital à Huygens, 12.02.1693)

« Peut-estre il veut insinuer que pendant son sejour à Paris, il vous a communiqué ses inventions, ce que je suis bien eloigné de croire. »

(Huygens à de l'Hospital, 05.08.1693)

« Ce n'est pas que je me veulle plaindre, je scais au contraire que je dois vous remercier de ce que voulant inserer cette solution dans les actes vous l'ayez fait de la maniere qui me blesse le moins qu'il est possible. » (de l'Hospital à J. B., 01.08.1693)

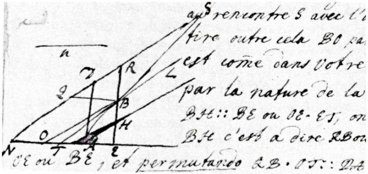
Seconde construction de Johann (1693, 1696)


234 ACTA ERUDITORUM

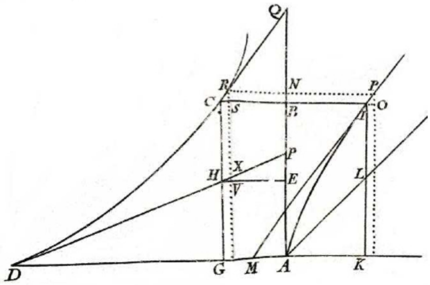
SOLUTIO PROBLEMATIS CARTESIO PROPOSITI Dn. de Beaune, exhibita a Joh. Bernoulli Basileensi.

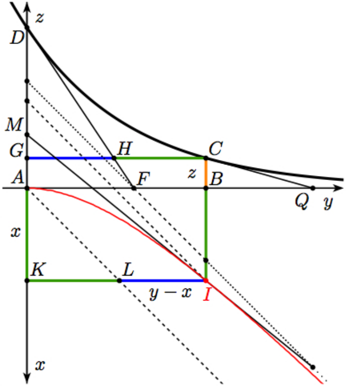
Vide Cartesium Epist. 79, tom. 3.

PRima mea hujus problematis solutio, quæ reperitur tecto nomine in Diario Gallico 34. anni elapsi, non minus quam Fratris, qui suam mihi tum temporis Parisiis commoranti transmiserat, supponit quadraturam spatii hyperbolici; id quod constructionem in praxi impossibilem reddit. Ex eo autem tempore præsentem hanc adinveni, quæ ope logarithmicæ vulgaris quam facillime peragitur, & propterea, ceu naturalior, priori longe anteferenda. Problema autem tale est: Invenire curvam AI, cujus applicata KI, sit ad subtan-



Justification de la seconde construction





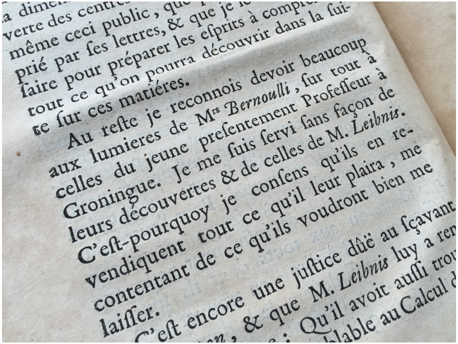
vert $= x$, bleu $= y - x$, orange$= z$, $IO = dx$, $PO = RS = dy$, $CS = -dz$

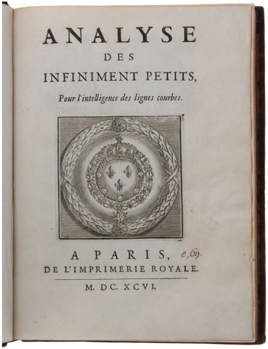
$RSC \sim QBC \Rightarrow \dfrac{dy}{-dz} = \dfrac{a}{z}$, $XVH \sim FEH \Rightarrow \dfrac{XV}{-dz} = \dfrac{a-(y-x)}{z}$ d'où

$$XV = \frac{(a-y+x)\,dy}{a},$$

Construction $\Rightarrow NP(= BI + IO) = RX(= RS + CH - XV) \Rightarrow \dfrac{a}{y-x} = \dfrac{dy}{dx}$.

Livre du marquis de l’Hospital (1696)


Au reſte je reconnois devoir beaucoup
aux lumieres de Mrs *Bernoulli*, ſur tout à
celles du jeune preſentement Profeſſeur à
Groningue. Je me ſuis ſervi ſans façon de
leurs découvertes & de celles de M. *Leibnis*.
C’eſt-pourquoy je conſens qu’ils en re-
vendiquent tout ce qu’il leur plaira, me
contentant de ce qu’ils voudront bien me
laiſſer.


ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
Pour l’intelligence des lignes courbes.

A PARIS,
DE L’IMPRIMERIE ROYALE.
M. DC. XCVI.

« Vous m’avez fait trop d’honneur en parlant si avantageusement de moy dans la preface (...). Vous expliquez les choses fort intelligiblement ; j’y trouve aussy un bel ordre et les propositions bien rangées ; tout y est admirablement bien fait, et mille fois mieux que je n’aurois pu faire ; Enfin je n’y desire rien si ce n’est que vous n’avez pas mis vôtre nom à la téte du livre, ce qui luy auroit donné un bien plus grand éclat, et plus d’Authorité à nôtre nouvelle methode (...).” (J. B. à de l’Hospital, février 1697)

« Si l’on veut parler franchement, Mr. de l’Hôpital n’a pas eu plus de part à la production de ce livre que d’avoir traduit en français la matière que je lui avais donnée la plupart en latin. »

(J. B. à Varignon, 26 février 1707)

Règle de l'art. 163 de l'*Analyse des infiniment petits*

« (...) il ne sera pas inutile de dire un mot sur l'article 163. de l'Anal. des Infin. Pet. (...). L'illustre Auteur du livre resout ce Problême avec cette addresse, & cette facilité qui luy est particuliere. La maniere en est tout-à-fait curieuse ; on peut la voir dans le livre même. M. le M. de l'Hôpital trouve donc que differentiant le Numerateur & le Dénominateur (...). » (Saurin, *Journal des Sçavans*, 03.08.1702)

« (...) un eloge, qui donne à penser, que le seul Mr. de l'Hopital etoit capable de faire une telle decouverte (...) par quelle expression l'auteur du memoire non seulement il me râvit la gloire de l'invention de la regle en question, mais il me declare en quelque façon incapable de l'adresse et de la facilité requise pour faire cette decouverte, puisqu'il dit que cette adresse et cette facilité etoit particuliere à Mr. de l'Hopital. (...) je n'ai vu cette piece qu'après que Mr. de l'Hopital fut deja mort. Je Vous assure Monsieur que je fus extremement scandalisé de la hardiesse de Mr. Saurin, et plus encore de la foiblesse de Mr. de l'Hopital qui a pu souffrir qu'on lui donnât un encens qui ne lui appartenoit nullement (...). » (J. B. à Montmort, 21.05.1718)

Problème (juin 1693, reformulé).

$$q(x) = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}, \quad q(a) = \frac{a^2 - a^2}{a - a} \begin{cases} = \frac{a(a-a)}{a-a} = a\ ? \\ = \frac{(a+a)(a-a)}{a-a} = 2a\ ? \\ = \frac{0}{0} = 1\ ? \end{cases}$$

« Mr. Varignon et (...) Mr. de l'Hopital lesquels n'ont d'abord donné que des paralogismes pour solution et ensuite confessé ingenuement qu'ils ne pouvoient pas le resoudre ». (J. B. à Montmort, 21.05.1718)

Problème. « Etant donné une courbe dont la nature s'exprime par une fraction egale à y, qui en certain cas a le numerateur et le denominateur egaux à zero : on demande la valeur, c'est a dire la grandeur de l'appliquée y. »

Règle de l'art. 163 de l'*Analyse des infiniment petits*

« Je vous avouë que je ne me suis pas fort appliqué à resoudre l'equation $y = \frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{aax}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$ lorsque $x = a$: car ne voyant point de jour pour y reussir, puisque toutes les solutions qui se presentent d'abord ne sont pas exactes, je n'ai pas voulu y perdre de temps inutilement, et j'aime mieux l'apprendre de vous quand vous m'en voudrez faire part. » (de l'Hospital à J. B., 02.09.1693)

Problème (plus facile, 1693). $q(x) = \frac{a^2-ax}{a-\sqrt{ax}}, \quad q(a) = ?$

Solution. (de l'Hospital, art. 165)

$$y = \frac{a^2-ax}{a-\sqrt{ax}} \Rightarrow (x-a)(a^2x - a^3 + 2a^2y - ay^2) = 0 \Rightarrow 2a^2y = ay^2 \Rightarrow \cancel{y=0},\ y = 2a$$

Remarque. $a^2 - ax = (a+\sqrt{ax})(a-\sqrt{ax})$ Illustration

« La methode (...) n'est pas praticable comme vous le remarquez vous mesme dans l'equation proposée, et ainsi quoique j'eûsse pensé qu'il falloit oster les incommensurable, je ne poussai pas cette pensée plus loin, voyant qu'il etoit impossible d'en venir à bout dans cet exemple. Je ne fais point de doute que vôtre derniere methode ne contienne quelque chose de fort curieux puisqu'elle s'etend sur tous les irrationnels, c'est pourquoi si vous m'en voulez faire part je vous serai obligé. J'ai peur de vous fatiguer avec toutes ces demandes, mais prenez vous en à vôtre habileté, et à la permission que vous m'en avez donnée. »

(de l'Hospital à J. B., 07.10.1693)

La règle dévoilée (sans preuve, 22 juillet 1694). Intuition :

$$\lim_{\substack{x\to b\\<}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to b\\<}} \frac{t_{f,b}(x)}{t_{g,b}(x)} = \lim_{\substack{x\to b\\<}} \frac{f'(b)(x-b)+f(b)}{g'(b)(x-b)+g(b)} = \frac{f'(b)}{g'(b)} = \lim_{\substack{h\to 0\\<}} \frac{f(b+h)-f(b)}{g(b+h)-g(b)}$$

$$= \frac{df}{dg} \quad (\text{ évalué en b })$$

« (...) il faut diviser la differentielle du numerateur (...) par la differentielle du denominateur, le quotient, après avoir fait x egal à la supposition de $AB[=b]$, sera la grandeur de $BC[=q(b)]$. »

Isochrone paracentrique

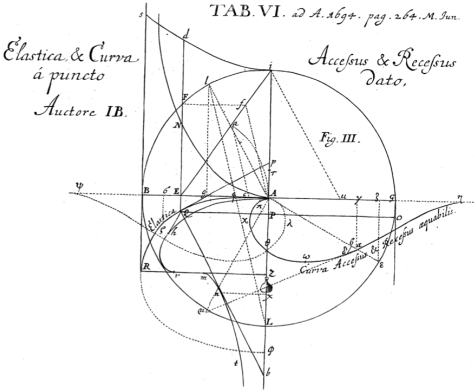
- problème de la courbe isochrone proposé par Leibniz (septembre 1687) ;
- solution de Huygens (octobre 1687) : une parabole semi-cubique ;
- démonstration synthétique de Leibniz (1689) ;
- démonstration analytique de Jakob (1690) (« Ergo & horum Integralia æquantur »...).

« Si l'un d'eux se plaignait qu'on lui a désormais coupé l'herbe sous le pied, il pourra chercher une *autre isochrone* voisine de celle-ci, sur laquelle un corps s'éloigne (ou se rapproche) uniformément, non comme on l'a supposé jusqu'ici, d'une ligne horizontale, mais d'un point déterminé. Le problème serait donc : *trouver la courbe sur laquelle la chute d'un corps pesant l'éloigne ou le rapproche uniformément d'un point donné.* »

(Leibniz, 1689)

Construction de la « courbe d'approche ou de retrait égal » par quadrature et par rectification de l'elastica (Jakob, *A. E.*, juin 1694).

Publication
de la construction par rectification de la lemniscate $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$ (Jakob, *A. E.*, sept. 1694).



Construction de l'isochrone paracentrique par rectification de la lemniscate (Johann, été 1694 ; *Acta Eruditorum*, octobre 1694)

$AE = a$, $x = AB$, $y = AG$, $z = \text{arc } HE$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dz}{\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2y - y^3}} \Rightarrow \frac{adx^2}{2x} = \frac{a^3dy^2}{2a^2y - 2y^3}$$

Observations :

$$\frac{a^2+4ay+4y^2}{4ay+4y^2} + \frac{a^2-4ay+4y^2}{4ay-4y^2} = \frac{a^3}{2a^2y-2y^3}.$$

$$\frac{a^2\pm 4ay+4y^2}{4ay\pm 4y^2} = \frac{(a\pm 2y)^2}{(2\sqrt{ay\pm y^2})^2} = \left[\left(\sqrt{ay\pm y^2}\right)'\right]^2$$

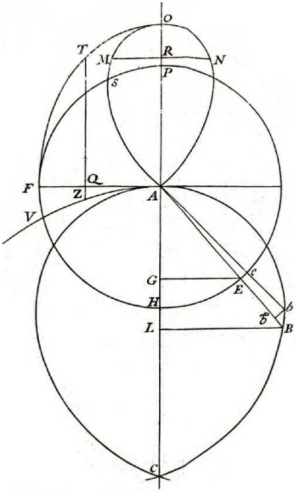
Conclusion : pour $0 \le y \le a$

$$\ell(y) = (\varphi(y); \psi(y)) = (\sqrt{ay+y^2}; \sqrt{ay-y^2})$$

$$\text{“portio curvæ } AM\text{”} = \int_0^{AG} \sqrt{[\varphi'(y)]^2 + [\psi'(y)]^2}\, dy$$

$$= \int_0^{AG} \sqrt{\frac{a^3}{2a^2y-2y^3}}\, dy = \int_0^{AB} \frac{\sqrt{a}\, dx}{\sqrt{2x}} = \sqrt{2ax}\Big|_0^{AB} = \sqrt{2a}\sqrt{AB}.$$

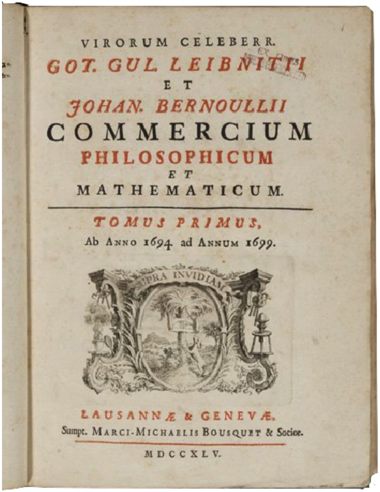
$$\Rightarrow x = AB = (\text{arc } AM)^2/2a$$



Construction

Début de la correspondance avec Leibniz

« Cette méthode n'est pas moins la vôtre que la mienne. » (Leibniz à J. B., mars 1694)



VIRORUM CELEBERR.
GOT. GUL. LEIBNITII
ET
JOHAN. BERNOULLII
COMMERCIUM
PHILOSOPHICUM
ET
MATHEMATICUM.

TOMUS PRIMUS,
Ab Anno 1694 ad Annum 1699.

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Sumpt. Marci-Michaelis Bousquet & Sociorum.
MDCCXLV.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Problème des trajectoires orthogonales

« Étant donné la position d'une infinité de courbes, trouver la courbe qui les intersecte toutes à angles droits. »
(J. B. à Leibniz, septembre 1694)

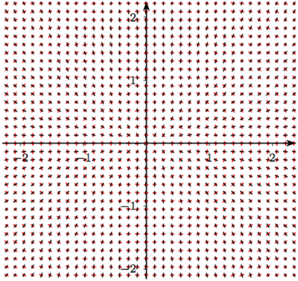
Exemple 1. paraboles de même axe et de même sommet $\rightsquigarrow$ ellipses

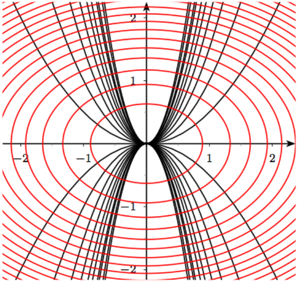
Leibniz (décembre 1694)

$$2by = x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{x} \Leftrightarrow b = -\frac{xdy}{dx}$$
$$2\left(-\tfrac{xdy}{dx}\right)y = x^2 \Rightarrow -2ydy = xdx$$
$$\Rightarrow a^2 - y^2 = \tfrac{x^2}{2}.$$

Avec des 4MA2 (mars 2015)

$$f_C(x) = Cx^2,\ C \in \mathbf{R}^*$$
$$f_C'(x) = 2Cx$$
$$(x_0; y_0) \in \mathbf{R}^2, x_0 \neq 0 \neq y_0$$
$$y'(x_0) = -\tfrac{1}{2Cx_0} = -\tfrac{1}{2\frac{y_0}{x_0^2}x_0} = -\tfrac{x_0}{2y_0}, y_0 = y(x_0)$$
$$2y'(x)y(x) = -x \Rightarrow y^2(x) = -\tfrac{x^2}{2} + K$$





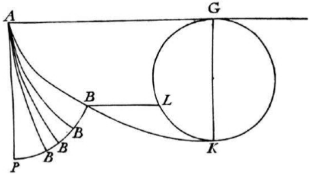
Exemple 2. *Logarithmica vulgaris* ($f_C(x) = Ce^x, C \in \mathbf{R}^*$) $\rightsquigarrow$ paraboles

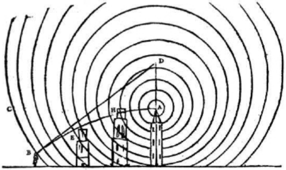
Retour sur le problème des trajectoires orthogonales (juillet 1696)

- problème de la courbe brachystochrone proposé par Johann (juin 1696) ;
- publication des solutions de Johann, Jakob, Leibniz, de l'Hospital, Tschirnhaus, Newton (*Acta Eruditorum*, mai 1697) ;

À la fin de sa solution, Johann propose deux problèmes :

Problème 1. Construire les t. o. de la famille des cycloïdes brachystochrones (« courbes synchrones »)

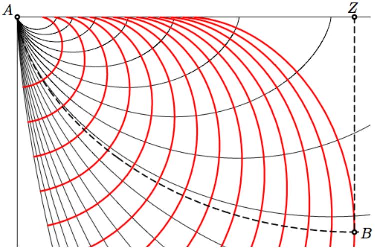




Solution.

$$\frac{AP}{\text{arc } GL} = \frac{\text{arc } GL}{GK}$$

$\Rightarrow LB \parallel GA$ coupe la cycloïde AK
en un point de la synchrone passant par P
(sans justification)



Problème 2. Construire les t. o. de la famille des logarithmiques sur un axe commun & tracées par un même point ($f_C(x) = ae^{Cx/a}$, $C \in \mathbf{R}$)

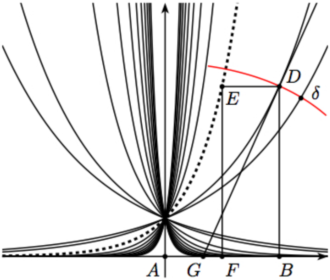
Solution (octobre 1696). $a = 1$ ($f_C(x) = e^{Cx}$, $C \in \mathbf{R}$ et $\sigma_C = 1/C$)
Courbe CE est la *logarithmica vulgaris* ($f_1(x) = e^x$, $\sigma_1 = 1$)

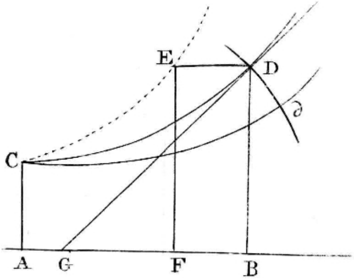
$AC = a = 1$, $BD = EF = y(= e^{Cx})$, $AB = x$, $AF = \ell y(= Cx)$

$$\frac{BD}{BG} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \Rightarrow BG = -\frac{y\,dy}{dx} \text{ et } \left(\frac{1}{1/C} = \right)\frac{AC}{BG} = \frac{AF}{AB}\left(= \frac{Cx}{x}\right) \Rightarrow x\,dx = -y\,\ell y\,dy$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}y^2\ell y + \frac{1}{4}y^2 \quad \text{ou} \quad x = \pm y\sqrt{\frac{1-2\ell y}{2}} \quad \text{ou encore} \quad e^{2x^2}\,y^{2y^2} = e^{y^2}$$

(J. B. n'utilise pas e ! Il fait le cas général et obtient $b^{2xx}\,y^{2yy} = b^{yy}$ avec $\ell b = a$)



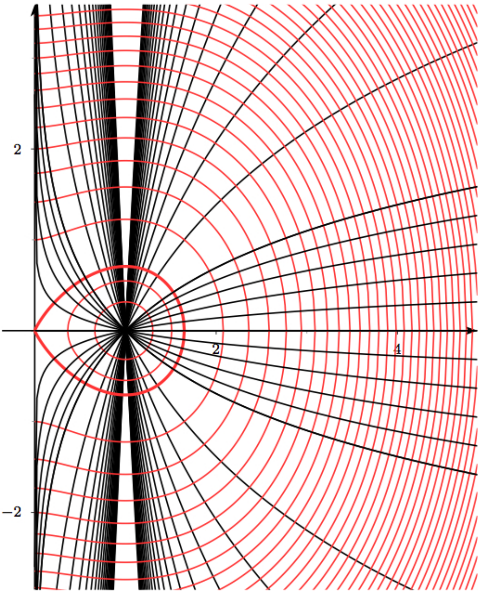


Trajectoires orthogonales de $f_C(x) = C\ln(x)$, $C \in \mathbf{R}^*$

$$y = \pm\sqrt{-x^2\ln(x) + \tfrac{1}{2}x^2 + K}$$

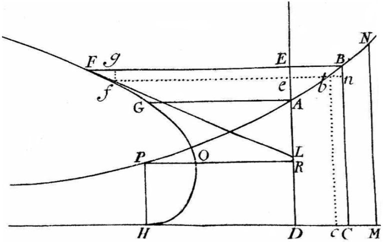
Au mois de mai 1698, Jakob montrera que la difficulté du problème n'est pas liée au caractère algébrique ou transcendant des courbes.

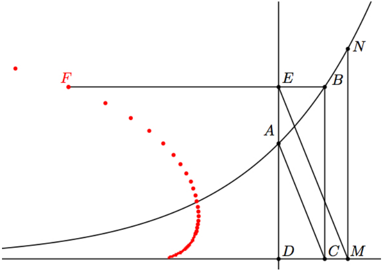
Ce problème sera encore discuté dans le premier quart du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle.



Calculus percurrens (1692 ; *A. E.*, mars 1697)

- découverte de “l’équation parcourante qui exprime la nature de la logarithmique” $y = a^x$;
- règles $dm^n = m^n \ell m\, dn + n\, m^{n-1}\, dm$; dm^{n^p} etc. ;
- étude de $y = x^x$.





$BC = DE = x$, $DC = \ell x$, $AD = 1$

$$y = x^x \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\ell x}{\ell y} \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{DC}{DM} \quad \text{avec} \quad DM = \ell y \quad (\text{i.e. } MN = y)$$

Tracer $EM \parallel AC$ et prendre $EF = MN$.

Construction

Conclusion

“L’histoire des mathématiques” permet

- de mettre en évidence les couches successives de développement ;
- d’identifier les paradigmes ;
- de faire intervenir les protagonistes (personnalités, querelles, ...) ;
- de faire revivre des questions, approches ou résultats oubliés ;
- ...

En particulier, dans l’enseignement, elle est utile pour

- mettre en évidence les difficultés ;
- montrer l’aspect humain et collectif de la construction du savoir ;
- trouver des idées pour présenter les notions ou construire des exercices ;
- ...

La transposition didactique est souvent délicate.

FINIS.

Remarque : reconstruction d'un résultat de de Beaune

« Pour vos lignes courbes, la propriété dont vous m'envoyez la demonstration me paroist si belle, que je la prefere à la quadrature de la parabole trouvée par Archimede. Car il examinoit une ligne donnée, au lieu que vous determinez l'espace contenu dans une qui n'est pas encore donnée. »

(Descartes à de Beaune, 20.02.1639)

Détermination de l'aire sous une courbe à sous-tangente constante

$y = b^x$ $(b > 1)$

courbes "logarithmica"

sous-tangente s constante ($s = 1/\ln(b)$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s} \Rightarrow y\,dx = s\,dy$$

$$\Rightarrow \text{aire entre } A \text{ et } B$$

$$\text{Integr. } y\,dx = s(y-1)$$

$$\left[\int_0^{x_0} b^t\,dt = \frac{1}{\ln(b)} \cdot (b^{x_0} - 1)\right]$$

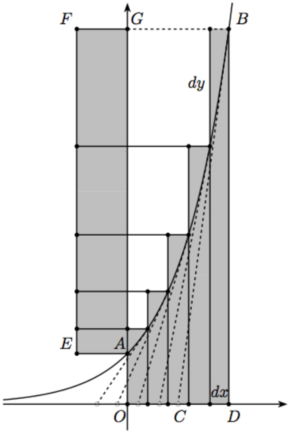


Figure :

$EA = FG = s = CD = 1$ (i.e. $b = e$),

$AO = 1$, $OD = x_0$

Retour

Méthode de Hudde

« Si dans une équation deux racines sont égales et que celle-ci est multipliée par une progression arithmétique quelconque ; c'est-à-dire le premier terme de l'équation par le premier terme de la progression, le second terme de l'équation par le second terme de la progression, et ainsi de suite : je dis que le résultat sera une équation dans laquelle une des racines précédentes apparaîtra. » (Hudde, lettre à van Schooten, février 1658)

Exemple.

$$(x-2)^2(x-3) = \underset{0}{x^3} - 7\underset{1}{x^2} + 1\underset{2}{6x} - 1\underset{3}{2} = 0$$

$$(x-2)(-7x+18) = \quad -7x^2 + 32x - 36 = 0$$

Preuve. p polynôme degré $n+2$ avec racine double x_0 :

$$p(x) = (x-x_0)^2 q(x) = (x^2 - 2x_0 x + x_0^2)\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{i+2} - 2x_0 a_i x^{i+1} + x_0^2 a_i x^i.$$

En multipliant les coefficients par a, $a+r$, $a+2r$, . . ., $a+(n+2)r$:

$$\widetilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{n}(a+(i+2)r)a_i x^{i+2} - (a+(i+1)r)2x_0 a_i x^{i+1} + (a+ir)x_0^2 a_i x^i$$

$$= a\sum_{i=0}^{n}\left[a_i x^{i+2} - 2x_0 a_i x^{i+1} + x_0^2 a_i x^i\right] + rx\sum_{i=0}^{n}\left[(i+2)a_i x^{i+1} - (i+1)2x_0 a_i x^i + ix_0^2 a_i x^{i-1}\right]$$

$$= ap(x) + rxp'(x)$$

Comme x_0 est une racine double de p, on a $p'(x_0) = 0$ et donc $\widetilde{p}(x_0) = 0$.

Retour