Delle quantità trascendenti derivanti dal cerchio

De quantitatibus transcendentibus ex circulo ortis

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana
2008

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

giugno 2008

Introduzione

In questo articolo è presentata la traduzione dal latino del capitolo VIII del tomo *Introductio analysin infinitorum* di Eulero (tale tomo è catalogato con E101; una versione online è consultabile sul sito `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k69587.image.r=euler+Introductio+analysin.langFR.f1.pagination`).

Non si tratta di una traduzione parola per parola ma di una presentazione con commenti e note, pensata per essere fruibile anche da allievi liceali.

Per alleggerire la parte matematica useremo le notazioni moderne, in particolare:

- al posto di Ang. scriveremo arc (per esempio al posto di Ang. $\tan$ scriveremo $\arctan$);
- al posto di $l(x)$ scriveremo $\ln x$;
- al posto di xx scriveremo x^2, al posto di tt scriveremo t^2;
- al posto di etc. scriveremo ...

Inoltre, per facilitare la lettura, sono state inserite delle note (esse sono riconoscibili poiché sono state scritte in corsivo e tra parentesi quadre); i titoli dei paragrafi sono nostri, i numeri dei paragrafi sono invece quelli originali.

La traduzione è stata rivista dal prof. Vittore Nason, docente di latino e greco del Liceo cantonale di Locarno.

Delle quantità trascendenti derivanti dal cerchio

126. Perché proprio archi, seni e coseni?

Dopo i logaritmi e le quantità esponenziali devono essere considerati gli archi circolari con il loro seno e il loro coseno, poiché non solo costituiscono un altro genere di quantità trascendenti, ma anche perché provengono dai logaritmi e dalle esponenziali quando si coinvolgono quantità immaginarie, cosa che apparirà più chiaramente in seguito.

Poniamo dunque il raggio del cerchio, o l'intero seno, uguale a 1, e poiché è evidente che la circonferenza di quel cerchio non può essere espressa esattamente con numeri razionali, è stato trovato per approssimazioni che la semicirconferenza di quel cerchio è uguale a 3.141592653589793238462643383279502884171693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132$\underline{7}$23066470938446...[1], per il quale numero scriverò π così come è π la semicirconferenza del cerchio il cui raggio è 1 oppure la lunghezza dell'arco di 180 gradi[2].

127. Notazioni e riepilogo di valori e formule per seno, coseno, tangente e cotangente

Se z è un arco qualsiasi di quel cerchio, il cui raggio assumo essere sempre 1, possiamo considerarne in particolar modo il seno e il coseno. In seguito indicherò il seno dell'arco z con $\sin .A.z$ oppure con $\sin .z$. Il coseno lo indicherò con $\cos .A.z$ oppure con $\cos .z$ [*per praticità nel seguito useremo le notazioni attuali, senza il puntino dopo il simbolo della funzione*]. Così, essendo l'arco di 180°, sarà $\sin 0\pi = 0$ e $\cos 0\pi = 1$ e $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$ e $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ e $\sin \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$ e $\sin \frac{3}{2}\pi = -1$ e $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$ e $\sin 2\pi = 0$ e $\cos 2\pi = 1$. Dunque tutti i seni e coseni sono compresi tra i limiti $+1$ e -1.

Sarà poi anche $\cos z = \sin(\frac{1}{2}\pi - z)$ e $\sin z = \cos(\frac{1}{2}\pi - z)$, come pure $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$. Oltre a queste denominazioni, sono da notare $\tan z$, che indica la tangente dell'arco z; $\cot z$, la cotangente dell'arco z; dalla trigonometria si sa che $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ e $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\tan z}$.

---

[1] L'allineamento corretto è 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132$\boxed{\mathbf{8}}$23066470938446... Nel testo stampato, al posto della cifra **8** c'è un $\underline{7}$. Nella traduzione in francese presente sul sito già citato, la cifra 7, errata, non è sottolineata. In "Hairer–Wanner, *L'analyse au fil de l'histoire*, Springer, 2001" a pagina 40 si legge che il valore riportato da Eulero è stato calcolato nel 1719 da T. F. de Lagny.

[2] Il simbolo π per la costante di Archimede è stato introdotto nel 1706 dal matematico inglese William Jones quando pubblicò "*A New Introduction to Mathematics*", benché lo stesso simbolo fosse stato utilizzato in precedenza per indicare la circonferenza del cerchio. La notazione diventò standard dopo che Eulero l'ebbe utilizzata. In entrambi i casi π è la prima lettera di *περιμετροσ* (*perimetros*), che significa "misura attorno" in greco. Inoltre il simbolo π venne usato all'inizio dallo stesso William Jones che, nel 1706 lo usò in onore di Pitagora (l'iniziale di Pitagora nell'alfabeto greco è appunto Π, ma, trattandosi di un numero, si preferisce usare la minuscola). Tuttavia, ancora nel 1739 Eulero usava il simbolo *p*. (`http://it.wikipedia.org/wiki/Pi_greco#Storia`).

128. Le formule di addizione e quelle che derivano dalle simmetrie

Si sa che se si hanno due archi y e z, sarà:

$$\begin{aligned}
\sin(y+z) &= \sin y \cdot \cos z + \cos y \cdot \sin z \\
\cos(y+z) &= \cos y \cdot \cos z - \sin y \cdot \sin z \\
\sin(y-z) &= \sin y \cdot \cos z - \cos y \cdot \sin z \\
\cos(y-z) &= \cos y \cdot \cos z + \sin y \cdot \sin z
\end{aligned}$$

Sostituendo in queste formule alla y gli archi $\frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ sarà:

$$\begin{aligned}
\sin(\tfrac{1}{2}\pi+z) &= +\cos z & \sin(\tfrac{1}{2}\pi-z) &= +\cos z \\
\cos(\tfrac{1}{2}\pi+z) &= -\sin z & \cos(\tfrac{1}{2}\pi-z) &= +\sin z \\
\\
\sin(\pi+z) &= -\sin z & \sin(\pi-z) &= +\sin z \\
\cos(\pi+z) &= -\cos z & \cos(\pi-z) &= -\cos z \\
\\
\sin(\tfrac{3}{2}\pi+z) &= -\cos z & \sin(\tfrac{3}{2}\pi-z) &= -\cos z \\
\cos(\tfrac{3}{2}\pi+z) &= +\cos z & \cos(\tfrac{3}{2}\pi-z) &= -\cos z \\
\\
\sin(2\pi+z) &= +\sin z & \sin(2\pi-z) &= -\sin z \\
\cos(2\pi+z) &= +\cos z & \cos(2\pi-z) &= +\cos z
\end{aligned}$$

Se dunque n indica un numero intero qualsiasi, sarà [*all'argomento aggiunge un numero intero di giri, cioè* $2n\pi$]:

$$\begin{aligned}
\sin(\tfrac{4n+1}{2}\pi+z) &= +\cos z & \sin(\tfrac{4n+1}{2}\pi-z) &= +\cos z \\
\cos(\tfrac{4n+1}{2}\pi+z) &= -\sin z & \cos(\tfrac{4n+1}{2}\pi-z) &= +\sin z \\
\\
\sin(\tfrac{4n+2}{2}\pi+z) &= -\sin z & \sin(\tfrac{4n+2}{2}\pi-z) &= +\sin z \\
\cos(\tfrac{4n+2}{2}\pi+z) &= -\cos z & \cos(\tfrac{4n+2}{2}\pi-z) &= -\cos z \\
\\
\sin(\tfrac{4n+3}{2}\pi+z) &= -\cos z & \sin(\tfrac{4n+3}{2}\pi-z) &= -\cos z \\
\cos(\tfrac{4n+4}{2}\pi+z) &= +\cos z & \cos(\tfrac{4n+3}{2}\pi-z) &= -\cos z \\
\\
\sin(\tfrac{4n+4}{2}\pi+z) &= +\sin z & \sin(\tfrac{4n+4}{2}\pi-z) &= -\sin z \\
\cos(\tfrac{4n+4}{2}\pi+z) &= +\cos z & \cos(\tfrac{4n+4}{2}\pi-z) &= +\cos z
\end{aligned}$$

Queste formule sono vere sia per un numero intero n positivo sia per uno negativo.

129. Formula ricorsiva per seni e coseni di archi in progressione aritmetica

Se $\sin z = p$ e $\cos z = q$ sarà $pp + qq = 1$; sia $\sin y = m$ e $\cos y = n$ in modo che valga anche $mm + nn = 1$; il seno e il coseno di archi composti con essi si ottengono così:

$$\begin{array}{lcl}
\sin z & = & p \\
\sin(y+z) & = & mq + np \\
\sin(2y+z) & = & 2mnq + (nn - mm)p \\
\sin(3y+z) & = & (3nm^2 - m^3)q + (n^3 - 3m^2n)p \\
\dots & &
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{lcl}
\cos z & = & p \\
\cos(y+z) & = & nq - mp \\
\cos(2y+z) & = & (nn - mm)q - 2mnp \\
\cos(3y+z) & = & (n^3 - 3m^2n)q - (3mn^2 - m^3)p \\
\dots & &
\end{array}$$

Gli archi $z, y+z, 2y+z, 3y+z, \dots$ sono in progressione aritmetica; mentre i loro seni e coseni costituiscono una successione per ricorrenza[3] simile a quella originata dal denominatore $1 - 2nx + (m^2 + n^2)x^2$; è infatti

$$\sin(2y+z) = 2n \cdot \sin(y+z) - (mm + nn)\sin z$$

[3]Cioè una formula ricorsiva (per ricorrenza) che esprime un elemento in funzione dei due precedenti. Nel capitolo IV dell'*Introductio* — "*De explicatione Functionum per series infinitas*" — Eulero presenta un metodo (che sostituisce quello per divisione continua, "*cum autem sit tediosa*") per esprimere una funzione fratta in una serie di potenze con esponente intero e con un numero infinito di termini: consiste nel considerare lo sviluppo con coefficienti generici, liberare dal denominatore e applicare il principio dell'uguaglianza dei coefficienti. Sia

$$\frac{N(z)}{D(z)} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} + \cdots$$

con il grado del numeratore minore di quello del denominatore. Eulero applica il procedimento dapprima a $\frac{a}{\alpha+\beta z}$, poi a $\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$ e all'esempio $\frac{1+2z}{1-z-z^2}$. Ne ricava la constatazione (paragrafo **62**) che le serie infinite che derivano dalle funzioni fratte obbediscono alla legge seguente: ogni termine (coefficiente) può essere determinato conoscendo alcuni termini (coefficienti) già calcolati. Così per lo sviluppo di $\frac{a}{\alpha+\beta z}$ basta conoscere il primo coefficiente $A = \frac{a}{\alpha}$ (termine noto) perché due coefficienti consecutivi P e Q sono legati dalla relazione $\alpha Q + \beta P = 0$; per lo sviluppo della funzione $\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$ basta conoscere i primi due coefficienti $A = \frac{a}{\alpha}$ e $B = \frac{b}{\alpha} - \frac{a\beta}{\alpha^2}$ perché tre coefficienti consecutivi P, Q e R sono legati dalla relazione $\alpha R + \beta Q + \gamma P = 0$; per lo sviluppo di una funzione che ha a denominatore un quadrinomio $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ basta conoscere i primi tre coefficienti A, B, C perché un coefficiente S può essere calcolato conoscendo i tre che lo precedono grazie alla relazione $\alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P = 0$; e così di seguito.
La legge che permette di determinare ogni termine conoscendone alcuni che lo precedono è facilmente deducibile dal denominatore della frazione che produce la serie.
[...] Queste serie sono state chiamate, dal celebre de Moivre che ne ha studiato più particolarmente la natura, *ricorrenti*, poiché è necessario ricorrere ai termini che precedono se si vogliono conoscere quelli che seguono.
Da quanto precede, avendo trovato che $\sin(2y+z) = 2n\sin(y+z) - (m^2+n^2)\sin z$, cioè che $1 \cdot \sin(2y+z) - 2n\sin(y+z) + (m^2+n^2)\sin z = 0$, Eulero fa risaltare la ricorrenza, analoga a quella che si avrebbe sviluppando una frazione con denominatore $1 - 2nx + (m^2+n^2)x^2$.

o piuttosto
$$\sin(2y+z) = 2\cos y \cdot \sin(y+z) - \sin z$$
e in modo analogo
$$\cos(2y+z) = 2\cos y \cdot \cos(y+z) - \cos z.$$
Allo stesso modo sarà poi
$$\begin{aligned}\sin(3y+z) &= 2\cos y \cdot \sin(2y+z) - \sin(y+z)\\ \cos(3y+z) &= 2\cos y \cdot \cos(2y+z) - \cos(y+z)\end{aligned}$$
e anche
$$\begin{aligned}\sin(4y+z) &= 2\cos y \cdot \sin(3y+z) - \sin(2y+z)\\ \cos(4y+z) &= 2\cos y \cdot \cos(3y+z) - \cos(2y+z)\end{aligned}$$
eccetera.

Grazie a queste leggi, chiunque lo desideri può ricavare velocemente seno e coseno di archi in progressione aritmetica.

130. Ricaviamo le formule di bisezione

Poiché
$$\sin(y+z) = \sin y \cos z + \cos y \sin z \quad \text{e} \quad \sin(y-z) = \sin y \cos z - \cos y \sin z,$$
aggiungendo o sottraendo membro a membro si ha:
$$\sin y \cdot \cos z = \frac{\sin(y+z) + \sin(y-z)}{2} \quad \text{e} \quad \cos y \cdot \sin z = \frac{\sin(y-z) - \sin(y+z)}{2}.$$
Inoltre, essendo
$$\cos(y+z) = \cos y \cos z - \sin y \sin z \quad \text{e} \quad \cos(y-z) = \cos y \cos z + \sin y \sin z,$$
si avrà anche
$$\cos y \cos z = \frac{\cos(y-z) + \cos(y+z)}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\cos(y-z) - \cos(y+z)}{2}.$$
Ponendo ora $y = z = \frac{1}{2}v$, dalle ultime due formule si ricava:
$$(\cos \tfrac{1}{2}v)^2 = \frac{1+\cos v}{2}, \quad \text{cioè} \quad \cos \tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\cos v}{2}}$$
e
$$(\sin \tfrac{1}{2}v)^2 = \frac{1-\cos v}{2}, \quad \text{cioè} \quad \sin \tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1-\cos v}{2}}$$
per cui, noto il coseno di un angolo qualsiasi, si possono trovare seno e coseno della sua metà ["*. . . unde, ex dato Cosinu cujusque anguli reperiuntur ejus semissis Sinus & Cosinus.*"].

131. Formule di prostaferesi e altre

Si ponga l'arco $y+z=a$ e $y-z=b$; sarà $y=\frac{a+b}{2}$ e $z=\frac{a-b}{2}$; introducendoli nelle formule precedenti si avranno le seguenti uguaglianze:

$$\sin a+\sin b=2\sin\tfrac{a+b}{2}\cos\tfrac{a-b}{2}\qquad \sin a-\sin b=2\cos\tfrac{a+b}{2}\sin\tfrac{a-b}{2}\tfrac{a-b}{2}$$

$$\cos a+\cos b=2\cos\tfrac{a+b}{2}\cos\tfrac{a-b}{2}\qquad \cos a-\cos b=2\sin\tfrac{a+b}{2}\sin\tfrac{a-b}{2}\tfrac{a-b}{2}$$

da qui, poi, dividendo, nascono i teoremi seguenti:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b} &= \tan\frac{a+b}{2}\cot\frac{a+b}{2}=\frac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{a-b}{2}}\\
\frac{\sin a+\sin b}{\cos a+\cos b} &= \tan\frac{a+b}{2} \qquad \frac{\sin a+\sin b}{\cos b-\cos a}=\cot\frac{a-b}{2}\\
\frac{\sin a-\sin b}{\cos a+\cos b} &= \tan\frac{a-b}{2} \qquad \frac{\sin a-\sin b}{\cos b-\cos a}=\cot\frac{a+b}{2}\\
\frac{\cos a+\cos b}{\cos b-\cos a} &= \cot\frac{a+b}{2}\cot\frac{a-b}{2}.
\end{aligned}$$

Da questi si deducono poi i teoremi seguenti:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin a+\sin b}{\cos a+\cos b} &= \frac{\cos b-\cos a}{\sin b-\sin a}\\
\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}\cdot\frac{\cos a+\cos b}{\cos b-\cos a} &= \cot^2\frac{a-b}{2}\\
\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}\cdot\frac{\cos b-\cos a}{\cos a+\cos b} &= \tan^2\frac{a+b}{2}.
\end{aligned}$$

132. Se si introducono i numeri complessi...

Poiché $\sin^2 z+\cos^2 z=1$, scomponendo in fattori sarà

$$(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)=1;$$

questi fattori, anche se immaginari, sono di grande utilità per combinare e moltiplicare gli archi.

Se infatti si calcola il prodotto di fattori di questo tipo

$$(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)(\cos y-\sqrt{-1}\sin y)$$

si ottiene

$$\cos y\sin z-\sin y\sin z+(\cos y\sin z+\sin y\cos z)\sqrt{-1}.$$

Essendo però

$$\cos y\sin z-\sin y\sin z=\cos(y+z)\quad \text{e}\quad \cos y\sin z+\sin y\cos z=\sin(y+z),$$

quel prodotto diventerà

$$(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y+z) + \sqrt{-1}\sin(y+z)$$

e, analogamente,

$$(\cos y - \sqrt{-1}\sin y)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y+z) - \sqrt{-1}\sin(y+z).$$

Allo stesso modo si avrà anche

$$\begin{aligned} & (\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos y \pm \sqrt{-1}\sin y)(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z) = \\ = \; & \cos(x+y+z) \pm \sqrt{-1}\sin(x+y+z). \end{aligned}$$

133. La formula di de Moivre e sviluppi in serie

Da quanto precede, segue anche che [*i due fattori sono uguali*]:

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^2 = \cos 2z \pm \sqrt{-1}\sin 2z$$

e

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^3 = \cos 3z \pm \sqrt{-1}\sin 3z$$

e, più in generale;

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz$$

[*è questa la* formula di de Moivre, *di cui però egli stesso scrisse nel 1698 che era nota a Newton perlomeno dal 1676.*]. Sommando le due formule riassunte nella precedente, si ottiene

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$

e sottraendole

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Sviluppando i binomi in serie [*per il coseno, le potenze dispari di* i *si annullano e le potenze pari valgono alternativamente* -1 *e* 1] sarà:

$$\begin{aligned} \cos nz &= (\cos z)^n - \tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\cos z)^{n-2}(\sin z)^2 + \\ &+ \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\cos z)^{n-4}(\sin z)^4 + \\ &- \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}(\cos z)^{n-6}(\sin z)^6 + \cdots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sin nz &= \tfrac{n}{1}(\cos z)^{n-1}\sin z - \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos z)^{n-3}(\sin z)^3 + \\ &+ \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(\cos z)^{n-5}(\sin z)^5 - \cdots \end{aligned}$$

[*Secondo Hairer–Wanner, p. 45, questa formula è stata trovata da de Moivre nel 1730; con Eulero siamo nel 1748.*].

134. Sviluppi in serie di sin **e** cos **e applicazione al calcolo**

Sia l'arco z infinitamente piccolo, sarà $\sin z = z$ e $\cos z = 1$; sia poi n un numero infinitamente grande scelto in modo che nz sia di grandezza finita, per esempio $nz = v$; poiché $\sin z = z = \frac{v}{n}$, sarà [*inserendo negli sviluppi precedenti* $nz = v$ *e le approssimazioni* $\sin z = z$ *e* $\cos z = 1$ *le potenze di* cos *sono* 1; *nei fattori con* sin, *le frazioni* $\frac{n(n-1)}{n^2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n^4}$, ... *vengono poste uguali a* 1, *che è il limite se* $n \to \infty$]

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{v^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots$$

e

$$\sin v = v - \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{v^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$$

Dato dunque l'arco v, per mezzo di queste serie se ne possono trovare il seno e il coseno; per rendere più chiaro l'uso di queste formule, supponiamo che l'arco v stia al quadrante, cioè a 90° [*Eulero scrive* 90°, *ma sostituisce il valore di* π], come m sta a n, cioè che sia $v = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$. Poiché il valore di π è noto, se lo sostituiamo dappertutto otteniamo:

$$\begin{aligned}
\sin \tfrac{m}{n} 90^\circ \quad = \quad & \tfrac{m}{n} \cdot 1.5707963267948966192313216916 \\
- \quad & \tfrac{m^3}{n^3} \cdot 0.6459640975062462536557565636 \\
+ \quad & \tfrac{m^5}{n^5} \cdot 0.0796926262461670451205055488 \\
- \quad & \tfrac{m^7}{n^7} \cdot 0.0046817541353186881006854632 \\
+ \quad & \tfrac{m^9}{n^9} \cdot 0.0001604411847873598218726605 \\
- \quad & \tfrac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0.0000035988432352120853404580 \\
+ \quad & \tfrac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0.0000000569217292196792681171 \\
- \quad & \tfrac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0.0000000006688035109811467224 \\
+ \quad & \tfrac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0.0000000000060669357311061950 \\
- \quad & \tfrac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0.0000000000000437706546731370 \\
+ \quad & \tfrac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0.0000000000000002571422892856 \\
- \quad & \tfrac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0.0000000000000000012538995403 \\
+ \quad & \tfrac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0.0000000000000000000051564550 \\
- \quad & \tfrac{m^{27}}{n^{27}} \cdot 0.0000000000000000000000181239 \\
+ \quad & \tfrac{m^{29}}{n^{29}} \cdot 0.0000000000000000000000000549
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\cos \tfrac{m}{n} 90^\circ \;=\;& 1.0000000000000000000000000000 \\
-\;& \tfrac{m^2}{n^2} \cdot 1.2337005501361698273543113745 \\
+\;& \tfrac{m^4}{n^4} \cdot 0.2536695079010480136365633659 \\
-\;& \tfrac{m^6}{n^6} \cdot 0.0208634807633529608730516364 \\
+\;& \tfrac{m^8}{n^8} \cdot 0.0009192602748394265802417158 \\
-\;& \tfrac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0.0000252020423730606054810526 \\
+\;& \tfrac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0.0000004710874778818171503665 \\
-\;& \tfrac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0.0000000063866030837918522408 \\
+\;& \tfrac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0.0000000000656596311497947230 \\
-\;& \tfrac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0.0000000000005294400200734620 \\
+\;& \tfrac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0.0000000000000034377391790981 \\
-\;& \tfrac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0.0000000000000000183599165212 \\
+\;& \tfrac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0.0000000000000000000820675327 \\
-\;& \tfrac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0.0000000000000000000003115285 \\
+\;& \tfrac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0.0000000000000000000000010165 \\
-\;& \tfrac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0.0000000000000000000000000026
\end{aligned}
$$

[*Poiché nell'originale in latino l'impaginazione è infelice (su due pagine e con righe non orizzontali per via della riproduzione), i calcoli per il seno e il coseno sono stati ricavati dalla traduzione in francese presente sul sito* `http://www.math.dartmouth.edu/~euler/`].

Poiché basta conoscere seno e coseno degli angoli fino a 45° [*sul cerchio goniometrico si può vedere molto bene, grazie alle simmetrie rispetto agli assi e alla prima bisettrice: vedi anche la disposizione grafica della tavola per i rapporti trigonometrici di angoli particolari.*], la frazione $\frac{m}{n}$ sarà sempre minore di $\frac{1}{2}$ e, poiché lo stesso vale per le potenze della frazione $\frac{m}{n}$, la convergenza delle serie mostrate è rapida ["*... Series exhibitae maxime convergent...* "], al punto che bastano spesso pochi termini, soprattutto se per il seno e il coseno non si desiderano tante cifre.

135. E per tangente e cotangente?

Trovati seni e coseni, si possono trovare tangenti e cotangenti per mezzo delle consuete relazioni ma poiché in quel modo grande è la molestia di moltiplicare e dividere numeri grandi ["*... at quia hujusmodi ingentibus numeris multiplicatio & divisio vehementer est molesta...* "], conviene esprimere queste [*tangenti* *e cotangenti*] in un modo particolare. Sarà dunque:

$$\tan v = \frac{v - \frac{v^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{v^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{v^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \cdots}{1 - \frac{v^2}{1\cdot2} + \frac{v^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{v^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \cdots}$$

e

$$\cot v = \frac{1 - \frac{v^2}{1\cdot2} + \frac{v^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{v^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \cdots}{v - \frac{v^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{v^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{v^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \cdots}.$$

[*Siccome queste formule sono pesanti da usare, Eulero propone un altro metodo di calcolo che dimostrerà più tardi; nella traduzione in francese presente sul sito si legge: "On expliquera plus au long dans la suite la formation de ces dernières séries. Voyez art. 197 et suiv.". Ed ecco l'altro metodo.*]

Se ora prendiamo un arco $v = \frac{m}{n}90^\circ$, allo stesso modo di prima si avrà:

$$\begin{aligned}
\tan \tfrac{m}{n}90^\circ &= \tfrac{2mn}{n^2-m^2} \cdot 0.6366197723675 \\
&+ \tfrac{m}{n} \cdot 0.2975567820597 \\
&+ \tfrac{m^3}{n^3} \cdot 0.0186886502773 \\
&+ \tfrac{m^5}{n^5} \cdot 0.0018424752034 \\
&+ \tfrac{m^7}{n^7} \cdot 0.0001975800714 \\
&+ \tfrac{m^9}{n^9} \cdot 0.0000216977245 \\
&+ \tfrac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0.0000024011370 \\
&+ \tfrac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0.0000002664132 \\
&+ \tfrac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0.0000000295864 \\
&+ \tfrac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0.0000000032867 \\
&+ \tfrac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0.0000000003651 \\
&+ \tfrac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0.0000000000405 \\
&+ \tfrac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0.0000000000045 \\
&+ \tfrac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0.0000000000005
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\cot \tfrac{m}{n}90^\circ &= \tfrac{n}{m} \cdot 0.6366197723675 \\
&- \tfrac{4mn}{4n^2-m^2} \cdot 0.3183098861837 \\
&+ \tfrac{m}{n} \cdot 0.2052888894145 \\
&+ \tfrac{m^3}{n^3} \cdot 0.0065510747882 \\
&+ \tfrac{m^5}{n^5} \cdot 0.0003450292554 \\
&+ \tfrac{m^7}{n^7} \cdot 0.0000202791060 \\
&+ \tfrac{m^9}{n^9} \cdot 0.0000012366527 \\
&+ \tfrac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0.0000000764959 \\
&+ \tfrac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0.0000000047597 \\
&+ \tfrac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0.0000000002969 \\
&+ \tfrac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0.0000000000185 \\
&+ \tfrac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0.0000000000011
\end{aligned}
$$

La ragione [*formazione*] di queste serie viene esposta più diffusamente in seguito [*nella traduzione in francese: vedi punto 197 e seguenti. Ma il punto 197 rimanda al punto 181, e questo risale ancora più indietro*].

136–137. Ancora artifici per ridurre i calcoli

Da quanto precede si sa che, se fossero conosciuti seno e coseno di tutti gli angoli minori di un semiretto [45°], si avrebbero contemporaneamente seno e coseno di tutti gli angoli maggiori. È altrettanto vero che, avendo il seno e il coseno degli angoli minori di 30°, si possono trovare, usando solo addizioni e sottrazioni, seno e coseno di tutti gli angoli maggiori. Essendo infatti

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

posto $y = 30^\circ$, dal paragrafo **130** si otterrà

$$\cos z = \sin(30^\circ + z) + \sin(30^\circ - z)$$

e

$$\sin z = \cos(30^\circ - z) - \cos(30^\circ + z)$$

e perciò [*ideoque*] dai seni e coseni degli angoli z e $30^\circ - z$ si trovano

$$\sin(30^\circ + z) = \cos z - \sin(30^\circ - z)$$

e

$$\cos(30^\circ + z) = \cos(30^\circ - z) - \sin z,$$

cioè vengono definiti il seno e il coseno degli angoli da 30° a 30°, e da qui tutti i maggiori.

Similmente si procede per le tangenti e le cotangenti. Essendo infatti

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b},$$

sarà

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan a \cdot \tan a},$$

e

$$\cot 2a = \frac{\cot a - \tan a}{2},$$

per cui, dalle tangenti e cotangenti degli archi minori di 30° si ricavano le cotangenti fino a 60°.

Se infatti è $a = 30° - b$, sarà $2a = 60° - 2b$ e $\cot 2a = \tan(30° + 2b)$; dunque sarà

$$\cot 2a = \tan(30° + 2b) = \frac{\cot(30° - b) - \tan(30° - b}{2}$$

da cui otteniamo le tangenti degli angoli maggiori di 30°.

Secanti e cosecanti si possono trovare dalle tangenti unicamente mediante sottrazioni; è infatti

$$\csc z = \cot\frac{1}{2}z - \cot z$$

e quindi

$$\sec z = \cot(45° - \frac{1}{2}z) - \tan z.$$

Da qui dunque si può vedere perfettamente in che modo possono essere costruite le tavole dei seni.

138. Seni e coseni di archi reali e quantità esponenziali immaginarie

Si ponga di nuovo nelle formule del paragrafo **133**,

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$

e

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

l'arco z infinitamente piccolo e per n un numero infinitamente grande i in modo che iz abbia un valore finito v. Sarà dunque $nz = v$ e $z = \frac{v}{i}$, da cui $\sin z = \frac{v}{1}$ e $\cos z = 1$; sostituendo:

$$\cos v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$$

e

$$\sin v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$

Ma nel capitolo precedente[4] abbiamo visto essere $(1+\frac{z}{i})^i = \mathrm{e}^z$, in cui e indica la base dei logaritmi iperbolici [*sono i logaritmi naturali*]: scritto dunque per z una volta $+v\sqrt{-1}$ e una volta $-v\sqrt{-1}$, si avrà:

$$\cos v = \frac{\mathrm{e}^{+v\sqrt{-1}} + \mathrm{e}^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

e

$$\sin v = \frac{\mathrm{e}^{+v\sqrt{-1}} - \mathrm{e}^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Da qui si capisce in che modo quantità esponenziali immaginarie si riconducano al seno e al coseno di archi reali.[5]

139. Seni e coseni di archi reali e logaritmi immaginari

In quelle stesse formule del paragrafo **133** [*nel testo, erroneamente paragrafo* ***130****, corretto nella versione francese*],

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$

e

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}},$$

sia ora n un numero infinitamente piccolo, ad esempio $n = \frac{1}{i}$, dove i è un numero infinitamente grande; sarà $\cos nz = \cos\frac{z}{i} = 1$ e $\sin nz = \sin\frac{z}{i} = \frac{z}{i}$; infatti per l'arco che tende a zero il seno è uguale all'arco e il coseno è uguale a 1 [*"Arcus enim evanescentis* $\frac{z}{i}$ *Sinus est ipsi aequalis, Cosinus vero* $= 1$*"*]. Si avrà allora:

$$1 = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\cdot\sin z)^{1/i} + (\cos z - \sqrt{-1}\cdot\sin z)^{1/i}}{2}$$

e

$$\frac{1}{i} = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\cdot\sin z)^{1/i} + (\cos z - \sqrt{-1}\cdot\sin z)^{1/i}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ma introducendo i logaritmi iperbolici, prima (vedi paragrafo **125**) abbiamo mostrato che

$$\ln(1+x) = i\cdot(1+x)^{1/i} - i$$

oppure, messo y al posto di $1+x$, che

$$y^{1/i} = 1 + \frac{1}{i}\ln y.$$

[4]Paragrafo **115**: $a^z = (1+\frac{kz}{i})^j$; e paragrafo **122**: "scegliendo la base dei logaritmi in modo tale che sia $k = 1$".

[5]Combinando le due formule si ottiene $\cos v + \sqrt{-1}\sin v = \mathrm{e}^{v\sqrt{-1}}$, cioè la ben nota formula $\cos z + \mathrm{i}\cdot\sin z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, da cui si ricava, nel caso particolare $z = \pi$, la relazione $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, o se si preferisce $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$, in cui i è l'unità immaginaria.

Ora dunque, ponendo al posto di y una volta $\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z$ e una volta $\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z$, si ha

$$1 = \frac{1 + \frac{1}{i}\ln(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z) + 1 + \frac{1}{i}\ln(\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z)}{2};$$

ma siccome i logaritmi tendono a zero ["*ob Logarithmos evanescentes*"] si ottiene $1 = 1$ e non si può concludere niente. In realtà, basta l'altra relazione, quella per il seno, che dà

$$\frac{z}{i} = \frac{\frac{1}{i}\ln(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z) - \frac{1}{i}\ln(\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z)}{2\sqrt{-1}}$$

e perciò[6]

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \ln \frac{\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z}{\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z}.$$

Da qui appare chiaramente in che modo i logaritmi immaginari siano riconducibili agli archi circolari.

140. La serie dell'arcotangente e una serie di trovata da Leibniz

Essendo $\frac{\sin z}{\cos z} = \tan z$, l'arco z può essere espresso attraverso la sua tangente come segue:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \ln \frac{1 + \sqrt{-1} \cdot \tan z}{1 - \sqrt{-1} \cdot \tan z}$$

[*basta dividere per* $\cos z$ *numeratore e denominatore nell'espressione indicata sopra*]. Poiché in precedenza [*paragrafo **123***] abbiamo visto che

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \cdots,$$

posto $x = \sqrt{-1} \cdot \tan z$, si otterrà

$$\begin{aligned} \ln \frac{1 + \sqrt{-1} \cdot \tan z}{1 - \sqrt{-1} \cdot \tan z} \quad &= \quad \frac{2\sqrt{-1} \cdot \tan z}{1} + \frac{-2\sqrt{-1} \cdot (\tan z)^3}{3} + \frac{2\sqrt{-1} \cdot (\tan z)^5}{5} + \\ &+ \quad \frac{-2(\sqrt{-1} \cdot \tan z)^7}{7} + \cdots \end{aligned}$$

Dividendo per $2\sqrt{-1}$ si ottiene dunque

$$z = \frac{\tan z}{1} - \frac{(\tan z)^3}{3} + \frac{(\tan z)^5}{5} - \frac{(\tan z)^7}{7} + \cdots$$

Se dunque poniamo $\tan z = t$, dove z è l'arco la cui tangente è t, che indicheremo con $\arctan t$, sarà $z = \arctan t$. Dunque, nota la tangente t, l'arco corrispondente sarà

$$\arctan t = z = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + \cdots$$

[6] Moltiplicando per i e applicando un teorema sui logaritmi.

Poiché, se la tangente t è uguale al raggio 1 è $\arctan z = \arctan 45°$ ossia $z = \frac{\pi}{4}$, la serie diventa

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

che è la serie che fu prodotta per primo da Leibniz per esprimere il valore della circonferenza.

141, 142. Dalle preoccupazioni per una convergenza rapida ad una nuova serie per π

Ma affinché con serie di questo genere si possa definire rapidamente la lunghezza di un arco di circonferenza, è evidente che alla tangente t si debbano sostituire frazioni abbastanza piccole[7]. Così, per mezzo di quella serie, si determina facilmente la lunghezza dell'arco z la cui tangente vale $\frac{1}{10}$, che sarebbe $z = \frac{1}{10} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{50000} + \cdots$, e il valore di tale serie può essere approssimato con dei decimali senza troppa difficoltà. Ma in verità, dalla conoscenza di un tale arco non è lecito concludere alcunché per la lunghezza dell'intera circonferenza, poiché il rapporto tra l'arco la cui tangente è $= \frac{1}{10}$ e l'intera circonferenza non è assegnabile.

Per questo motivo, per cercare il contorno [*del cerchio*] occorre cercare un arco che sia nello stesso tempo una parte aliquota del contorno e che abbia una tangente abbastanza piccola da poter essere espressa comodamente. Di solito si sceglie l'arco di 30°, la cui tangente è $\frac{1}{\sqrt{3}}$, poiché le tangenti di archi più piccoli commisurabili con il contorno risultano troppo irrazionali [*"nimis fiunt irrationales"*]. Perciò, per l'arco di $30° = \frac{\pi}{6}$, sarà

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2\sqrt{3}} - \cdots,$$

e

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3} + \cdots$$

Ed è facendo uso di questa serie che è stato determinato, con una fatica incredibile [*"incredibili labore"*], il valore di π indicato in precedenza [*vedi il paragrafo **126**, il primo di questo capitolo*].

La fatica è stata tanto più grande poiché in primo luogo tutti i termini sono irrazionali, poi perché ogni termine non è molto più piccolo del precedente, ma è circa la sua terza parte.

Ma a questo inconveniente si può ovviare: si assuma l'arco di 45° o $\frac{\pi}{4}$, il cui valore, anche se espresso attraverso la serie a malapena convergente

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

può essere tuttavia ritenuto e ripartito su due archi a e b con

$$a + b = \frac{\pi}{4} = 45°.$$

[7]La serie dell'arcotangente converge se $|z| \leq 1$.

Poiché è

$$\tan(a+b) = 1 = \frac{\tan a + \tan b}{+\tan a \cdot \tan b},$$

sarà

$$1 - \tan a \cdot \tan b = \tan a + \tan b$$

e

$$\tan b = \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}.$$

Sia ora $\tan a = \frac{1}{2}$; sarà $\tan b = \frac{1}{3}$, quindi entrambi gli archi a e b saranno espressi con una serie razionale molto più convergente di quella sopra, e la somma delle due darà il valore dell'arco di $\frac{\pi}{4}$. Sarà dunque

$$\pi = 4 \cdot \begin{cases} \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \cdots \\ \\ \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \cdots \end{cases}$$

La lunghezza della semicirconferenza π può dunque essere trovata molto più speditamente in questo modo di quanto non sia stato fatto servendosi della serie ricordata prima.