JEUX AVEC LES CHIFFRES DES DÉVELOPPEMENTS DÉCIMAUX DE QUELQUES RATIONNELS

Jean Luc Bovet, Auvernier

Notre merveilleuse manière d'écrire les nombres, due, dit-on, aux Indiens via les Arabes, présente en plus de son efficacité incontestable des aspects parfois étonnants. Certaines propriétés sont bien connues, d'autres peut-être un peu moins.

1. Je vous laisse déterminer les 6 premiers multiples du nombre 142857 ou les 12 de 076923 au cas où vous ne l'auriez jamais fait. Je ne vous ferai pas l'injure d'une démonstration du phénomène : calculez simplement le développement décimal de 1/7, 2/7… et de 1/13, 2/13… ; le reste coule de source.

2. (Pour simplifier l'écriture, je note 0,{142857} pour 0,142857142857…).
   Parmi les développements périodiques présentant un nombre pair de chiffres dans la période, certains ont la propriété suivante : la deuxième moitié de la période est le complément à 9 de la première moitié : par exemple $1/7 = 0,\{142\underline{857}\}$.
   $1 + 8 = 4 + 5 = 2 + 7 = 9$
   Il en va ainsi chaque fois que le développement est issu de la division par un nombre premier ou par une puissance de celui-ci.
   $1/49 = 0,\{020408163265306122448\underline{979591836734693877551}\}$
   Démontrons la chose avec une période de 6 chiffres, la généralisation étant immédiate.
   Soit $1/p = 0,\{abcdef\}$. Alors $10^6/p = abcdef + 1/p$, puis $(10^6\text{-}1) / p = abcdef$: entier.
   Donc p divise $10^6\text{-}1$ donc p divise $(10^3\text{-}1)(10^3+1)$.
   Or si p (premier) divise un produit, il divise l'un des facteurs. Il ne saurait diviser le premier : la période serait alors de longueur 3 (ou moins) et non 6 ; p divise donc 10^3+1.
   $(10^3+1) / p$ s'écrit abc,$\{defabc\}$ + 0,$\{abcdef\}$ c'est-à-dire $abc,\{(a + d)(b + e)(c + f)\}$ et il est entier. Donc ou bien $a + d = b + e = c + f = 0$, (ce qui n'est pas possible), ou bien ces trois sommes valent chacune 9, ce qu'il fallait démontrer.
   Si nous avions p^k au dénominateur, les facteurs premiers de p^k , tous égaux à p ne sauraient diviser simultanément 10^3+1 et $10^3 - 1$ qui sont impairs et qui diffèrent de 2.

3. La contemplation de certains développements décimaux crée parfois des états d'âme :

   A) dans le début de la période
      1/49 = 0,{02 04 08 16 32 65…}.
      1/19 = 0,{0526315789…} ou plus visiblement
      1/199 = 0,{005 025 125 628…} où le report des retenues ne trouble la vision que plus tard.
      Quelle est la raison de l'apparition des puissances de 2 ou de 5 dans ces développements ?

B) dans la fin de la période
1/19 = 0,{…4736 8 4 2 1} ou plus visiblement dans
1/199 = 0,{…728 64 32 16 08 04 02 01}
1/29 = 0,{…4137 9 3 1} ou plus visiblement dans
1/299 = 0,{…143 81 27 09 03 01}
1/399 = 0,{…656 64 16 04 01}
Pourquoi les puissances de 2, 3 ou 4 interviennent-elles dans ces développements ?

C) dans le début
1/89 = 0,{01123595505…} ou plus visiblement dans
1/998999 = 0,{000 001 001 002 003 005 008 013 021 034 055 089 144 233 377 611…}
Que vient faire ici la suite de Fibonacci ?

D) dans la fin
1/109 = 0,{…23853211} ou plus visiblement dans
1/10099 = 0,{…444 89 55 34 21 13 08 05 03 02 01 01}
Encore une intervention de Fibonacci !

* * *

A) On sait que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ Faisons $x = \frac{1}{20}$ et enlevons 1 de chaque côté
Il vient $\frac{1}{19} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20^2} + \ldots$

```
0 . 0 5
0 . 0 0 2 5
0 . 0 0 0 1 2 5
0 . 0 0 0 0 0 6 2 5
0 . 0 0 0 0 0 0 3 1 2 5
0 . 0 0 0 0 0 0 0 1 5 6 2 5
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 7 8 1 2 5
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 9 0 6 2 5
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 9 5 3 1 2 5
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 9 7 6 5 6 2 5
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4 8 8 2 8 1 2 5
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 4 4 1 4 0 6 2 5
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 2 0 7 0 3 1 2 5
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 6 1 0 3 5 1 5 6 2 5
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 0 5 1 7 5 7 8 1 2 5
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 5 2 5 8 7 8 9 0 6 2 5
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 7 6 2 9 3 9 4 5 3 1 2 5
-----------------------------------------------------------------------
0 . 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 | 0 5 2 6
```

De même $\frac{1}{49} = \frac{1}{50} + \frac{1}{50^2} + \ldots$ d'où le développement en puissances de 2 ou de 5.

B) Démontrons la chose pour $\dfrac{1}{19}$ = 0,{052631578947368421} :

La période du développement est formée de 18 chiffres. Soit P le nombre qui s'écrit avec ces chiffres. $P =$ 052631578947368421

$$\frac{1}{19} = P(10^{-18} + 10^{-36} + \cdots)$$

$$\frac{10^{18}}{19} = P(1 + 10^{-18} + 10^{-36} + \cdots) = P + \frac{1}{19}. \text{ D'où } P = \frac{10^{18} - 1}{19}.$$

D'autre part

$$1 + 20 + \cdots + 20^{17} = \frac{20^{18} - 1}{19} = \frac{20^{18} - 10^{18} + 10^{18} - 1}{19} = \frac{(2^{18} - 1)\cdot 10^{18} + 10^{18} - 1}{19} = \frac{(2^{18} - 1)}{19}\cdot 10^{18} + P$$

C'est-à-dire que, $(2^{18}$ -1) étant divisible par 19 en vertu du théorème de Fermat,

$1 + 20 + \cdots + 20^{17}$ = P + un nombre qui se termine par 18 zéros.

En résumé, la situation est donc la suivante :

																						1
																					2	0
																				4	0	0
																			8	0	0	0
																	1	6	0	0	0	0
																3	2	0	0	0	0	0
															6	4	0	0	0	0	0	0
													1	2	8	0	0	0	0	0	0	0
												2	5	6	0	0	0	0	0	0	0	0
											5	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
									1	0	2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
								2	0	4	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
							4	0	9	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
						8	1	9	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
				1	6	3	8	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			3	2	7	6	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		6	5	5	3	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	1	0	7	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	8	4	2	1	**0**	**5**	**2**	**6**	**3**	**1**	**5**	**7**	**8**	**9**	**4**	**7**	**3**	**6**	**8**	**4**	**2**	**1**

Reste à comprendre l'intervention de Fibonacci.

C) A gauche.

$$\frac{1}{89} = \frac{1}{100 - 11} = \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{11}{100}} = \frac{1}{100}\cdot\left(1 + \frac{11}{100} + \left(\frac{11}{100}\right)^2 + \cdots\right),$$

c'est-à-dire 0,01

+0,0011

+0,000121

+0,00001331

+ ……………..

On reconnaît (au report des décimales près à partir de la 5^{ème} ligne) le triangle de Pascal.

Remettons-le dans sa disposition habituelle :

0 0 1	1	a
0 0 0 1 1	1 1	b c
0 0 0 0 1 2 1	1 2 1	d e f
0 0 0 0 0 1 3 3 **1**	1 3 3 **1**	g h i **j**
0 0 0 0 0 0 1 4 **6** 4 1	1 4 **6** 4 1	k l **m** n o
0 0 0 0 0 0 0 1 **5** 10 10 5 1	1 **5** 10 10 5 1	p **q** r s t u
0 0 0 0 0 0 0 0 0 **1** 6 15 20 15 6 1	**1** 6 15 20 15 6 1	**v** w x y z A B

La somme 1 + 6 + 5 + 1 se présente alors en diagonale. Regardons-la avec les lettres : $v = p$ (=1), $q = k + l$, $m = h + i$, $j = f$ (=1). Donc chaque diagonale est la somme des deux précédentes ce qui est la règle de Fibonacci.

D) A droite.

$$\frac{1}{109} = 0,\{0091743119266055045871559633027522935779816513761467889908256880733944954128440366972477064220183486238532 11\}$$

Soit P le nombre qui s'écrit avec les 108 chiffres de la période de $\frac{1}{109}$. Comme précédemment, $P = \frac{10^{108}-1}{109}$

D'autre part,

$$S = 1 + 110 + 110^2 + \cdots + 110^{107} = \frac{110^{108}-1}{109} = 109^{-1}\cdot(11^{108}\cdot 10^{108} - 10^{108} + 10^{108} - 1)$$

$$= 109^{-1}\cdot(11^{108}-1)\cdot 108 + P$$

Les 108 derniers chiffres de S sont donc ceux de P, $109^{-1}\cdot(11^{108}-1)$ étant entier selon Fermat. Calculons S

.

1	1	a
1 1	1 1	b c
1 2 1	1 2 2	d e f
1 **3** 3 1	1 **3** 3 1	g **h** i j
1 4 6 **4** 1	1 4 6 **4** 1	k l m **n** o
1 5 10 10 5 **1**	1 5 d d 5 **1**	p q r s t **u**

On reconnaît de nouveau le triangle de Pascal. De même qu'avant on voit que chaque diagonale est la somme des deux précédentes : règle de Fibonacci.

*　　*　　*

Remarques

1. La suite des décimales de la période de 1/109 recèle d'autres surprises. Pour la décaler, calculons 21/109 :
21/109 = 0,{192660550458715596330275229357798165137614678899082568 807339449541284403669724770642201834862385321100917431}.
On voit qu'à droite on n'a plus la suite de Fibonacci, mais celle de Lucas !

2. D'ailleurs, à partir de tous les chiffres précédés d'un chiffre plus grand, vers la gauche, on trouve une « supersuite » de Fibonacci. Sils sont précédés d'un chiffre plus petit, il faut simplement leur ajouter 1.

3. La fréquence des différents chiffres est très constante : chacun intervient 11 fois sauf 0 et 9 qui interviennent 10 fois.

4. D'autre part cette suite a une propriété très remarquable (probabilité < 10^{-46} dans une suite aléatoire) : les 108 nombres formés par deux chiffres consécutifs (y compris le 108ème et le 1er) sont 00, 01, … ,99 , chacun 1 fois, sauf pour les doubles 11, 22, … ,88 : chacun 2 fois. Cela ne saurait être dû au hasard, et je vois une explication a posteriori: si deux chiffres consécutifs (par exemple 21) se présentaient deux fois, la suite des décimales, à partir de ceux-ci, vers la gauche, serait identique et la période n'aurait pas 108 chiffres mais moins. En d'autres termes, 1/109 ne peut avoir la période maximale (108 chiffres) que si cette condition est remplie. Seuls 11 … 88 peuvent exister 2 fois, une fois avec retenue, une fois sans. Remarquons que si les chiffres ***a*42** se suivent, $a = 6$. Si ***a*24**, $a = 7$ (retenue). Si ***abb*0**, $a = 2b$ (ou $2b - 10$) alors que si ***abb*9**, $a = 2b + 1$ (ou $2b + 1 - 10$). On peut voir enfin que tous les 0 et tous les 9 sont «utilisés» pour suivre les doubles ou eux-mêmes. La suite contient donc toutes les suites de Fibonacci commençant par deux nombres d'un chiffre. Et y en a encore qui ne croient pas aux miracles !

5. Précisons enfin que les propriétés A, B, C et D sont valables dans n'importe quelle base. Voici quelques résultats :

- En base 7
  $1/13 = 1/16 = 0,\{035245631421\}_7$ cf en base 10: 1/19
  $1/41 = 1/56 = 0,\{0112363262135202250655430340453146441 61\}_7$ cf en base 10: 1/89
  $1/55 = 1/106 = 0,\{006144033642201532 11\}_7$ cf en base 10: 1/109
- En base 12. (*A* et *B* : chiffres 10 et 11)
  $1/23 = 1/1B = 0,\{06316948421\}_{12}$ cf en base 10: 1/19
  $1/71 = 1/5B = 0,\{020408142854A997732650A1834691163061\}_{12}$ cf en base 10: 1/49
  $1/131 = 1/AB = 0,\{0112359...78404491B1\}_{12}$ cf en base 10: 1/89
  $1/155 = 1/10B = 0,\{00B1944B55...99BA1853211\}_{12}$ cf en base 10: 1/109

6. La propriété notée sous **4.** est valable en base 2 et en base 6. (Mais pas dans les quelques autres bases que j'ai testées…). Il faut et il suffit pour cela que $b^2 + b - 1$ soit premier et que son inverse soit de période maximale ($b^2 + b - 2$ chiffres) dans la base b, mais cette remarque est bien loin de donner les bases où la propriété est vraie !
En base 2, $1/5 = 1/101 = 0,\{0011\}_2$
En base 6, $1/41 = 1/105 = 0,\{00513354124403302344550422014311522532 11\}_6$; tous les nombres de 2 chiffres de *00* à *55* apparaissent 1 fois sauf *11, 22, 33* et *44* qui apparaissent 2 fois.

7. On m'a signalé enfin que les nombres 109 et 89, qui présentent des propriétés « fibonacciennes » (donc des accointances avec le nombre d'or φ), sont donnés par les polynômes $b^2 + b - 1$ et $b^2 - b - 1$ dont les zéros sont φ et $-1/\varphi$ pour le premier, et pour le second $-\varphi$ et $1/\varphi$. Coïncidences ?