Le point de Miquel

Jean Piquerez
Collège et Ecole de Commerce Madame de Staël

J'ai par hasard retrouvé un théorème de géométrie synthétique en traitant avec mes élèves un problème de similitude à l'aide des nombres complexes.
Considérons en effet quatre points *A*, *B*, *C* et *D* du plan complexe d'affixes respectives *a*, *b*, *c* et *d*, et la similitude *s* telle que *s*(*A*) = *C* et *s*(*B*) = *D* et déterminons son équation complexe en fonction de *a*, *b*, *c* et *d*.

Comme $s(z) = uz + v$ avec $u, v \in \mathbb{C}$ à déterminer, il vient : $\left.\begin{array}{l} c = ua + v \\ d = ub + v \end{array}\right\} \Rightarrow c - d = u(a - b)$

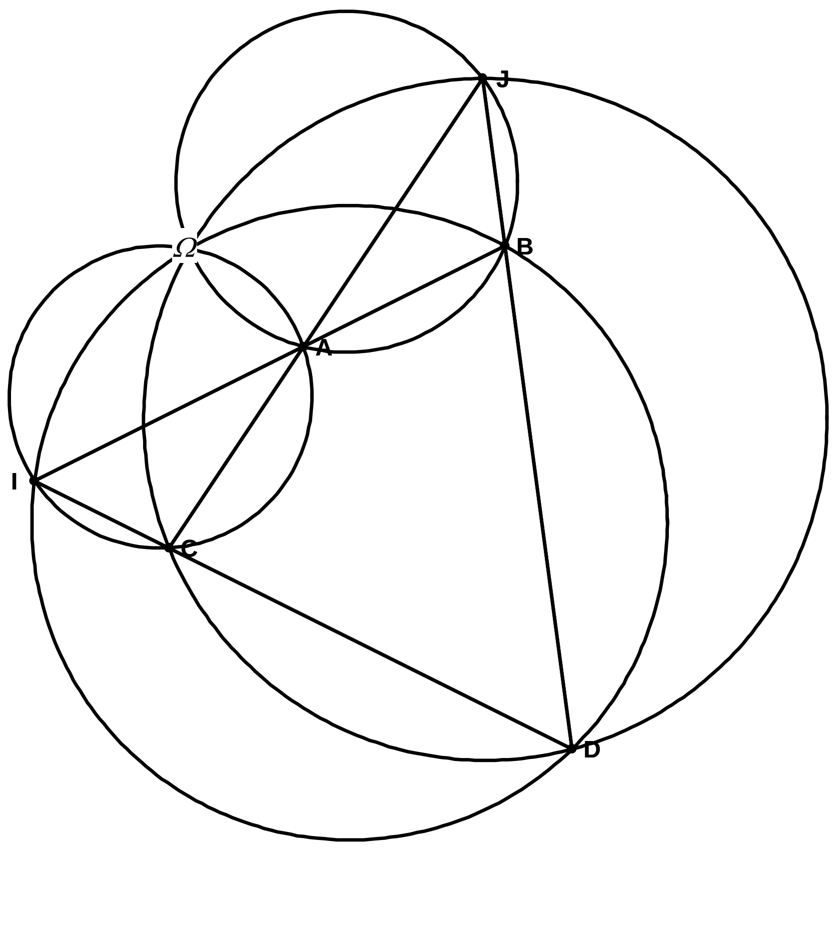
d'où $u = \dfrac{c-d}{a-b}$, car $a \neq b$.

En substituant on a : $c = \dfrac{(c-d)\ a}{a-b} + v$, et, après calculs $v = \dfrac{ad - bc}{a-b}$.

Le point fixe Ω d'affixe ω d'une telle similitude est tel que : $\omega = \dfrac{v}{1-u}$, si $u \neq 1$, ce que l'on supposera désormais.

Donc $\omega = \dfrac{ad - bc}{a + d - (b + c)}$, et ce qui frappe dans cette expression, c'est son invariance par rapport à toutes les permutations de *a*, *b*, *c* et *d* qui échangent *b* et *c* et/ou *a* et *d*.

figure 1



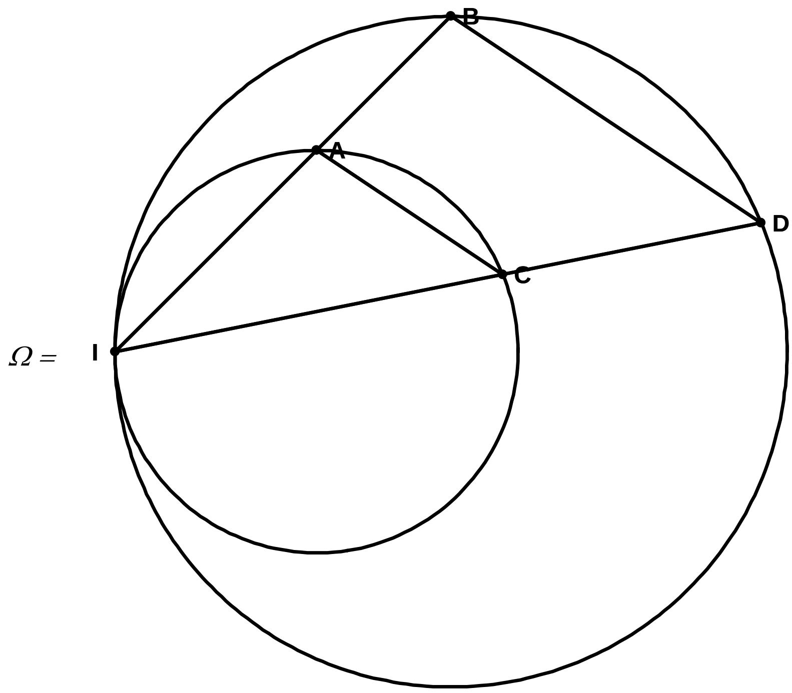
Or ces permutations sont au nombre de quatre. En plus de *s*, il y a *s'* définie par *s'*(*A*) = *B* et *s'*(*C*) = *D*, ainsi que s^{-1} et $(s')^{-1}$. Toutes quatre ont Ω pour point fixe. Il s'agit maintenant de comprendre quelle propriété géométrique cela traduit.

Rappelons que *s* a donc Ω pour point fixe et est d'angle α avec $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ (voir fig. 1).
Donc Ω est sur l'arc capable d'angle α des deux segments $[AC]$ et $[BD]$. Pour des raisons en tous points identiques, Ω qui est le point fixe de *s'*, est sur l'arc capable d'angle $\beta = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$ des deux segments $[AC]$ et $[BD]$, à supposer que les deux paires de droites (*AB*), (*CD*) et (*AC*), (*BD*) se coupent, ce que l'on fera dorénavant..
Ainsi les quatre cercles circonscrits aux triangles *IAC*, *IBD*, *JAB* et *JCD* se coupent au point Ω, appelé point de Miquel du quadrilatère complet *ABCDIJ*.

Cas particulier : (*AC*) // (*BD*) mais (*AB*) et (*CD*) sécants.

En termes complexes cela signifie que $d - b = \lambda(c - a)$.
Donc $\omega = \dfrac{a[b + \lambda(c-a) - bc]}{a - c + \lambda(c-a)} = \dfrac{\lambda a - b}{\lambda - 1}$, car $\lambda \neq 1$, sinon on aurait (*AB*) // (*CD*).
Ainsi, $\omega \in (AB)$.
On montre de même que $\omega = \dfrac{\mu c - d}{\mu - 1}$ avec $\mu = \dfrac{1}{\lambda} \neq 1 \Rightarrow \omega \in (CD)$.
En conclusion $\omega \in (AB) \cap (CD)$ et Ω coïncide avec I (voir figure 2). Les cercles (*ABJ*) et (*CDJ*) dégénèrent en les droites (*AB*) et (*CD*), les deux cercles (*ACI*) et (*BDI*) sont tangents en *I*, point commun aux deux cercles et aux deux droites (*AB*) et (*CD*).

figure 2



Reprenons le cas général et envisageons les deux similitudes suivantes : $s_1(A) = D$, $s_1(B) = C$ et $s_1^{'}(A) = B$, $s_1^{'}(D) = C$. Elles ont, au même titre que $(s_1)^{-1}$ et $(s_1^{'})^{-1}$, le même centre de similitude Ω_1 d'affixe $\omega_1 = \dfrac{ac-bd}{a+c-(b+d)}$, ce qui donne lieu à quatre cercles circonscrits aux triangles *ADI*, *BCI*, *ABK* et *DCK*, avec $K = (AD) \cap (BC)$, tous concourants en Ω_1 précisément.
Les deux similitudes restantes, à savoir : $s_2(A) = C$, $s_2(D) = B$ et $s_2^{'}(A) = D$, $s_2^{'}(C) = B$ ont elles aussi, de même que $(s_2)^{-1}$ et $(s_2^{'})^{-1}$, le même centre de similitude Ω_2 d'affixe $\omega_2 = \dfrac{ab-cd}{a+b-(c+d)}$, ce qui donne lieu à nouveau à quatre cercles circonscrits aux triangles *ACK*, *DBK*, *ADJ* et *CBJ* concourants en Ω_2.

La figure 3 ci-dessous rend compte de cette situation :