Jouer avec les congruences

Marcel Délèze, Collège du Sud, Bulle

◻ Règles du jeu

Demander à une autre personne d'effectuer les choix et calculs suivants:

1. Choisir un nombre dans $\{0, 1, ..., 100\}$, par exemple $s = 83$ (secret)
2. Multiplier le nombre précédent par 51: $83 \cdot 51 = 4233$ (secret)
3. Choisir un nombre naturel de quatre chiffres, par exemple 3427 (secret)
4. Additionner les deux derniers nombres: $4233 + 3427 = 7660$ (secret)
5. Du nombre du point 3, permuter les deux tranches de deux chiffres 2734 (secret)
6. Additionner les deux derniers nombres et publier le résultat $7660 + 2734 = 10394 = p$

La suite du texte explique comment retrouver le nombre s du point 1, en fonction de p.

◻ Fondements mathématiques

Pour déterminer le reste de la division d'un nombre par 101, diviser le nombre en tranches de deux chiffres (depuis la droite) puis faire la somme alternée des tranches (depuis la droite). On peut itérer le procédé. Par exemple,

$$543268714 \equiv 14 - 87 + 26 - 43 + 5 \pmod{101}$$
$$\equiv -85 \pmod{101} \qquad \equiv 16 \pmod{101}.$$

En effet, on a

$$100 \equiv 101 - 1 \equiv -1 \pmod{101}$$
$$100^n \equiv (-1)^n \pmod{101} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Par suite, pour un nombre décomposé en tranches de deux chiffres, $t_i \in \{0, 1, ..., 99\}$,

$$t_0 + 100\, t_1 + 100^2\, t_2 + 100^3\, t_3 + 100^4\, t_4 + ...$$
$$\equiv t_0 + (-1)\, t_1 + (-1)^2\, t_2 + (-1)^3\, t_3 + (-1)^4\, t_4 + ... \pmod{101}$$
$$\equiv t_0 - t_1 + t_2 - t_3 + t_4 + ... \pmod{101} \qquad \blacksquare$$

◻ Propriétés des nombres construits par les règles du jeu

Les nombres des points 3 et 5 sont opposés modulo 101.

La somme des nombres des points 3 et 5 est multiple de 101.

Les nombres des points 2 et 6 ont le même reste par division par 101.

◻ Solution à l'aide des congruences

$$p \equiv 51\, s \pmod{101}$$
$$2\, p \equiv 102\, s \equiv s \pmod{101}$$
$$\boxed{s \equiv 2\, p \pmod{101}}$$

Pour l'exemple, $s \equiv 2 \cdot 10394 \equiv 2\,(94 - 3 + 1) \equiv 184 \equiv 83 \pmod{101}$.

◻ Généralisation

Les critères de divisibilité pour $n \in \{11, 101, 1001, ..., 10^k + 1\}$, ainsi que leur usage dans des devinettes et tours de magie, sont connus depuis des siècles. Moyennant quelques adaptations, on peut formuler des jeux analogues pour $n \in \{9, 99, 999, ..., 10^k - 1\}$. Plusieurs exemples de chacune de ces deux familles sont donnés sur le site **http://www.collegedusud.ch/profs/delezem/** à la rubrique *Autres fichiers/Exposés /Jeux arithmétiques*.