UNE PARTICULARITÉ DE QUELQUES RÉELS

Jean Luc Bovet, Auvernier

J'ai éprouvé une certaine stupéfaction après avoir calculé quelques puissances successives du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

n	φ^n
1	1.61803399
2	2.61803399
3	4.23606798
4	6.85410197
5	11.0901699
6	17.9442719
7	29.0344419
8	46.9787138
9	76.0131556
10	122.991869
11	199.005025
12	321.996894
13	521.001919

Deux propriétés apparaissent.

1) Plus n est grand, plus φ^n est proche de son arrondi, c'est-à-dire de l'entier le plus proche.
2) Au premier terme près, la suite des arrondis (2, 3, 4, 7, 11, 18 …) est la suite dite de Lucas (1, 3, 4, 7, 11, 18 …), la suite qui commence par $t_1 = 1, t_2 = 3$ et de terme général $t_n = t_{n-2} + t_{n-1}$. Nous dirons que φ^n est asymptotiquement égal à t_n ($\varphi^n \simeq t_n$) et que φ est un ***PE*** (Presque Entier, ou plus précisément un nombre dont la différence des nièmes puissances avec leurs arrondis tend vers 0 quand n tend vers l'infini). Nous dirons aussi que la suite des φ^n une suite ***TE*** de constante φ (dont les Termes se rapprochent de nombres Entiers).

Bien sûr la contemplation des 13 résultats ci-contre suggère ces affirmations mais ne démontre rien.

Démonstration.

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$

$\theta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est l'autre solution.

On a donc $\varphi^2 = \varphi + 1$, $\varphi + \theta = 1$, $\varphi \cdot \theta = -1$ et $\theta^2 = \theta + 1$.
On a aussi $2\varphi - 1 = \sqrt{5}$ et $2\theta - 1 = -\sqrt{5}$.

$$\begin{array}{lll}
\varphi & \theta = 1 - \varphi & \varphi + \theta = 1 = t_1 \\
\varphi^2 = \varphi + 1 & \theta^2 = 1 - 2\varphi + \varphi^2 = 2 - \varphi & \varphi^2 + \theta^2 = 3 = t_2 \\
\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1 & \theta^3 = 2 - 3\varphi + \varphi^2 = 3 - 2\varphi & \varphi^3 + \theta^3 = 4 = t_3 \\
\varphi^4 = 2\varphi^2 + \varphi = 3\varphi + 2 & \theta^4 = 3 - 5\varphi + 2\varphi^2 = 5 - 3\varphi & \varphi^4 + \theta^4 = 7 = t_4
\end{array}$$

On est conduit à penser que $\varphi^n + \theta^n = t_n$. Montrons-le par récurrence.

Hypothèse : $\varphi^{n-2} + \theta^{n-2} = t_{n-2}$
$\varphi^{n-1} + \theta^{n-1} = t_{n-1}$

Additionnons : $\varphi^{n-2}(1 + \varphi) + \theta^{n-2}(1 + \theta) = t_{n-2} + t_{n-1}$

Utilisant $\varphi + 1 = \varphi^2$, $\theta^2 = \theta + 1$ et $t_{n-2} + t_{n-1} = t_n$,
On aura $\varphi^n + \theta^n = t_n$, cqfd2.

Enfin, $|\theta|$ étant < 1 , $\theta^n \to 0$ quand $n \to \infty$, $\varphi^n \to t_n$
c'est-à-dire φ est un PE, cqfd1.

*****

La suite des arrondis de φ^n étant la suite de Lucas on serait intéressé à obtenir celle de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … , où $f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$.

Partons de
1, 3, 4, 7, 11, 18, … $\varphi^n + \theta^n$, …
3 ,4 ,7 ,11 ,18 ,29, … $\varphi^{n+1} + \theta^{n+1}$,…

Trouvons deux nombres a et b tels que $a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{3} = 1$ et $a \cdot \mathbf{3} + b \cdot \mathbf{4} = 1$.

Réponse : $a = -\frac{1}{5},\ b = \frac{2}{5}$.

Multiplions la première suite par a, la deuxième par b et additionnons; il vient

1, 1 ,2, 3, 5, …, $-\frac{1}{5} \cdot \varphi^n + \frac{2}{5}\varphi^{n+1} - \frac{1}{5}\theta^n + \frac{2}{5}\theta^{n+1}$, …

Ce terme général, f_n vaut $\frac{1}{5} \cdot \left(\varphi^n(-1 + 2\varphi) + \theta^n(-1 + 2\theta)\right)$.

Puisque $2\varphi - 1 = \sqrt{5}$ et que $2\theta - 1 = -\sqrt{5}$,

on aura $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \theta^n)$

Asymptotiquement, $f_n \simeq \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ et $f_n \simeq \frac{t_n}{\sqrt{5}}$ ou bien « Fibonacci $\simeq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot$ Lucas»

Autre stupéfaction donc : si la suite des φ^n est une TE, celle des $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \varphi^n$ aussi. Nous l'appellerons suite unitaire (commençant par 1, 1) de φ^n.

*****

Nous pouvons maintenant obtenir n'importe quelle suite s telle que $s_1 = a, s_2 = b$, $s_n = s_{n-2} + s_{n-1}$. On utilisera le même procédé qu'avant.

On aura : $s_n = (2a - b)f_n + (b - a)f_{n+1}$ et asymptotiquement $s_n \simeq \frac{c + d \cdot \varphi}{\sqrt{5}} \cdot \varphi^n$.

Cela entraîne que tous les nombres de la forme $\frac{(2a-b)+(b-a)\cdot\varphi}{\sqrt{5}} \cdot \varphi^n$ sont des PE.

On aurait pu s'en aviser plus tôt en observant que
1 Si S_1 et S_2 sont des TE, leur somme terme à terme est une TE
2 Si S est une TE, si a est entier, la suite $a \cdot S$ est une TE
3 Si S est une TE de constante φ, la suite $\varphi \cdot S$ est une TE

Sont-ils les seuls ?

*****

Le fait que φ a des puissances quasi entières nous a conduits aux suites de Fibonacci et apparentées. Essayons d'aller dans l'autre sens.

Envisageons les suites (x, y, a, b) c'est-à-dire les suites telles que $s_1 = a, s_2 = b$ et $s_n = x \cdot s_{n-2} + y \cdot s_{n-1}$.

Par exemple la suite (2,3,1,4) est 1, 4, 14, 50, 178 …

Comme les précédentes cette suite se comporte asymptotiquement comme une suite géométrique. La raison, $\psi = 3{,}56155281$, devrait être la solution positive de l'équation $t^2 = x + y \cdot t$, soit $t^2 - 3t - 2 = 0$.
ψ va jouer le rôle de φ. Dans le cas particulier, $\psi = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$. Les calculs vérifient que ψ est encore un PE.

n	$s(n)$	$s(n)/s(n-1)$
1	1	
2	4	4
3	14	3.5
4	50	3.57142857
5	178	3.56
6	634	3.56179775
7	2258	3.5615142
8	8042	3.5615589
9	28642	3.56155185
10	102010	3.56155296
11	363314	3.56155279
12	1293962	3.56155282
13	4608514	3.56155281
14	16413466	3.56155281
15	58457426	3.56155281
16	208199210	3.56155281

La suite obtenue n'est pas la suite (2,3,1,4) mais (2,3,3,13). Il convient donc de trouver le bon facteur. Mêmes calculs que pour passer de Lucas à Fibonacci. On trouve $c = \frac{7+\psi}{34}$.
La suite des $c \cdot \psi^n$ est donc de nouveau une TE.

n	ψ^n	arrondi	Arr corrigé	$c \cdot \psi^n$	arrondi
1	3.56155281	4	3	1.10633906	1
2	12.6846584	13	13	3.94028500	4
3	45.1770809	45	45	14.0335331	14
4	160.900560	161	161	49.9811694	50
5	573.055841	573	573	178.010574	178
6	2040.96864	2041	2041	633.994062	634
7	7269.01761	7269	7269	2258.00333	2258
8	25888.9901	25889	25889	8041.99813	8042
9	92205.0056	92205	92205	28642.0011	28642
10	328392.997	328393	328393	102009.999	102010
11	1169589.00	1169589	1169589	363314.000	363314
12	4165553.00	4165553	4165553	1293962.00	1293962
13	14835837.0	14835837	14835837	4608514.00	4608514

*****

Voyons enfin les choses d'une manière générale : suite (x, y, s_1, s_2).

Soit ψ la solution positive de l'équation $t^2 = x + y \cdot t, \psi = \frac{y+\sqrt{y^2+4x}}{2}$.

Soit θ l'autre solution : $\theta = \frac{y-\sqrt{y^2+4x}}{2}$.

Somme des solutions : $\Sigma = y$, produit des solutions : $\Pi = -x$.

On a $\psi + \theta = y, \psi^2 + \theta^2 = \Sigma^2 - 2\Pi = y^2 + 2x$.

ψ et θ étant des solutions de l'équation, on a $x + y \cdot \psi = \psi^2$ et $x + y \cdot \theta = \theta^2$.

On définit la suite $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ où $m_n = \psi^n + \theta^n$.

Elle obéit à la règle de récurrence. En effet

$x \cdot (\psi^{n-2} + \theta^{n-2}) + y \cdot (\psi^{n-1} + \theta^{n-1}) = \psi^{n-2}(x + y \cdot \psi) + \theta^{n-2}(x + y \cdot \theta) = \psi^n + \theta^n$

Prenons les suites $m_1, m_2, m_3, \dots$ et $m_2, m_3, m_4, \dots$. Multiplions la première par a, la deuxième par b et additionnons-les terme à terme.

On obtient la suite $a \cdot m_1 + b \cdot m_2, a \cdot m_2 + b \cdot m_3, \dots$.

Choisissons a et b pour obtenir la suite $s_1, s_2, \dots$

Tous calculs faits, $a = \frac{s_1 \cdot m_3 - s_2 \cdot m_2}{m_1 \cdot m_3 - m_2^2}$ et $b = \frac{s_1 \cdot m_2 - s_2 \cdot m_1}{m_1 \cdot m_3 - m_2^2}$

Le terme général s_n vaut $a \cdot m_n + b \cdot m_{n+1} = a \cdot (\psi^n + \theta^n) + b \cdot (\psi^{n+1} + \theta^{n+1})$, c'est-à-dire $s_n = (a + b \cdot \psi) \cdot \psi^n + (a + b \cdot \theta) \cdot \theta^n$

Enfin si $|\theta| < 1, s_n \simeq (a + b \cdot \psi) \cdot \psi^n$, et la suite des $(a + b \cdot \psi) \cdot \psi^n$ est donc une TE.

*****

Pour illustrer ce qui précède, vous trouverez un tableau Excel à l'adresse *www.sspmp.ch/crm/telecharger/PE.xlsx* .
Il vous permet de choisir x, y, s_1, s_2. En rouge, il donne les suites $m_1, m_2, \dots et\ s_1, s_2 \dots$ calculées selon la règle de récurrence et, en noir, ces mêmes suites calculées selon la méthode ci-dessus.

*****

On peut encore essayer de voir, parmi les nombres de la forme $a + \sqrt{b}$ lesquels sont des PE.

Les suites (x, y, s_1, s_2) sont régies par le nombre ψ solution de $\psi^n = x \cdot \psi^{n-2} + y \cdot \psi^{n-1}$ ou $\psi^2 - y \cdot \psi - x = 0$.

$\psi = \frac{y+\sqrt{y^2+4x}}{2} = a + \sqrt{b}$, donc $a = \frac{y}{2}$ et $b = \frac{y^2}{4} + x$.

y étant entier, a est entier ou demi-entier.

1) Si a est entier, y est pair, donc $\frac{y^2}{4}$ est entier, donc b est entier (mais pas carré).
   Pour que $a + \sqrt{b}$ soit un PE il faut que $\left|a - \sqrt{b}\right| < 1$ donc a doit être un des deux entiers qui encadrent $\sqrt{b}$.

   Par exemple si $b = 29$, $\sqrt{b} \cong 5{,}38$ donc a doit valoir 5 ou 6.

2) Si a est un demi-entier, y est impair donc $b = \frac{t}{4}$ où $t \equiv 1 \bmod 4$. En écriture habituelle $b =$ qqch,25 (mais pas le carré d'un demi-entier : pas 2,25, 6.25, 12.25 …). Alors a doit être un des deux demi-entiers qui encadrent $\sqrt{b}$.

   Par exemple si $b = 7.25$, $\sqrt{b} \cong 2{,}69$, donc a doit valoir 2,5 ou 3,5 .

La deuxième feuille du tableau Excel permet de vérifier la chose.

*****

Ce petit tour chez les PE explique quelques bizarreries. On peut vivre sans ça, c'est vrai, mais j'espère vous avoir amusé. Merci pour votre attention.