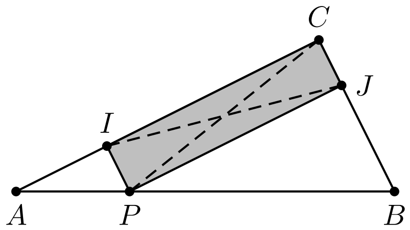
Projections dans un triangle

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

1. Problématique

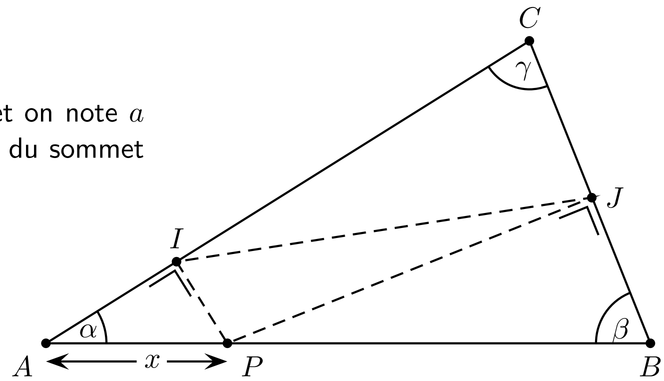
Dans un triangle rectangle ABC, lorsqu'un point P situé sur l'hypoténuse est projeté orthogonalement sur les cathètes, on obtient un rectangle $IPJC$ comme illustré ci-contre. Les diagonales IJ et PC ont donc la même longueur, celle-ci est minimale lorsque P est la projection orthogonale de C sur le côté AB.



Nous nous proposons de généraliser ce résultat à un triangle ABC quelconque. On considère un point P sur un côté du triangle (disons sur le côté AB) et on projette ce point orthogonalement sur les deux autres côtés, obtenant des points I (sur le côté AC) et J (sur le côté BC). Nous voulons calculer la longueur du segment IJ et savoir où placer le point P pour rendre cette longueur minimale.

2. Notations

On adopte les notations du schéma ci-contre et on note a (resp. b et c) la longueur du côté situé en face du sommet A (resp. B et C).



3. Première approche

Comme nous ne savons pas à quel résultat nous attendre, nous allons exprimer la longueur (IJ) en fonction de $x = (AP)$. L'angle en P dans le triangle IJP est $180° - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \alpha + \beta = 180° - \gamma$ et le théorème du cosinus implique

$$\begin{aligned}(IJ)^2 &= (PI)^2 + (PJ)^2 - 2(PI)(PJ)\cos(180° - \gamma)\\ &= (PI)^2 + (PJ)^2 + 2(PI)(PJ)\cos(\gamma).\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la relation "sin-opp-hyp" dans les triangles rectangles IPA et JPB, on obtient $(PI) = x\sin\alpha$ et $(PJ) = (c-x)\sin\beta$. On a donc

$$(IJ)^2 = x^2(\sin\alpha)^2 + (c-x)^2(\sin\beta)^2 + 2x(c-x)\sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma).$$

Nous allons exprimer maintenant tous les angles à l'aide d'un seul, disons γ. En appliquant le théorème du sinus dans le triangle ABC, on obtient $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}\sin\gamma$ et $\sin\beta = \dfrac{b}{c}\sin\gamma$.

On en déduit $(IJ)^2 = \left(\frac{\sin\gamma}{c}\right)^2 \left[x^2a^2 + (c-x)^2b^2 + 2x(c-x)ab\cos\gamma\right]$. On peut alors développer et réordonner le polynôme en x entre crochets :

$$(IJ)^2 = \left(\frac{\sin\gamma}{c}\right)^2 \left[(a^2+b^2-2ab\cos\gamma)x^2 - 2bc(b-a\cos\gamma)x + b^2c^2\right].$$

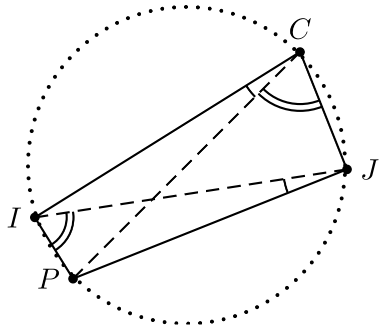
Le théorème du cosinus appliqué au triangle ABC dit que $a^2+b^2-2ab\cos\gamma = c^2$ et d'autre part, on a $b - a\cos\gamma = c\cos\alpha$ car la hauteur issue du sommet B partage le côté b en deux segments de longueurs respectives $a\cos\gamma$ et $c\cos\alpha$. Il s'ensuit donc

$$(IJ)^2 = \left(\frac{\sin\gamma}{c}\right)^2 \left[c^2x^2 - 2bc^2x\cos\alpha + b^2c^2\right] = (\sin\gamma)^2\left[x^2 - 2bx\cos\alpha + b^2\right].$$

Le théorème du cosinus appliqué au triangle APC montre que la dernière expression entre crochets n'est rien d'autre que $(CP)^2$. On a donc $(IJ)^2 = (\sin\gamma)^2(CP)^2$.

Conclusion. On a $(IJ) = (CP)\sin\gamma$. La longueur (IJ) est minimale lorsque (CP) est minimale, c'est à-dire lorsque P est la projection orthogonale de C sur le côté AB. Cette longueur minimale est alors $(IJ) = h_C\sin\gamma = a\sin(\beta)\sin(\gamma)$.

4. Variante de preuve



Au vu de la simplicité du résultat, il est légitime de présenter une preuve plus courte. Le quadrilatère $IPJC$ est inscriptible dans un cercle de diamètre PC (cercle de Thalès). L'angle au sommet C est $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ avec $\gamma_1 = \widehat{PCI}$ et $\gamma_2 = \widehat{PCJ}$. Par le théorème de l'angle inscrit, on a alors $\widehat{PJI} = \widehat{PCI} = \gamma_1$ et $\widehat{PIJ} = \widehat{PCJ} = \gamma_2$.

Dans le triangle PIJ, l'angle au sommet P est donc $180° - \gamma$ et le théorème du sinus implique $\frac{(IP)}{\sin\gamma_1} = \frac{(IJ)}{\sin(180° - \gamma)}$. Comme $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$ et $\sin\gamma_1 = \frac{(IP)}{(PC)}$ selon le triangle rectangle PIC, on en déduit que $(PC) = \frac{(IJ)}{\sin\gamma}$, donc $(IJ) = (PC)\sin\gamma$. $\square$

5. Corollaires

Etablissons maintenant des relations intéressantes au sujet de notre quadrilatère $IPJC$.

Corollaire 1. En utilisant la formule d'addition des angles et les relations dans les triangles rectangles CIP et CJP, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{(IJ)}{(PC)} &= \sin\gamma = \sin(\gamma_1+\gamma_2) = \sin(\gamma_1)\cos(\gamma_2) + \cos(\gamma_1)\sin(\gamma_2)\\ &= \frac{(PI)}{(PC)}\cdot\frac{(JC)}{(PC)} + \frac{(IC)}{(PC)}\cdot\frac{(PJ)}{(PC)} = \frac{(PI)(JC)+(IC)(PJ)}{(PC)^2}\end{aligned}$$

On en déduit que $(PI)(JC) + (IC)(PJ) = (IJ)(PC)$ autrement dit, dans le quadrilatère $IPJC$, la somme des produits des côtés opposés est égale au produit des diagonales. Cette propriété caractérise les quadrilatères convexes inscriptibles (théorème de Ptolémée).

Corollaire 2. L'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère $IPJC$ peut être calculée avec les triangles rectangles CIP et CJP. On peut également utiliser le triangle JCI qui présente un angle γ et le triangle JPI qui présente un angle $180° - \gamma$ (ayant le même sinus que γ) :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\big((CI)(IP) + (CJ)(JP)\big) = \frac{1}{2}\big((JP)(PI) + (JC)(CI)\big)\sin\gamma.$$

En isolant $\sin\gamma$, on peut exprimer le quotient des diagonales à l'aide des produits des paires de côtés successifs :

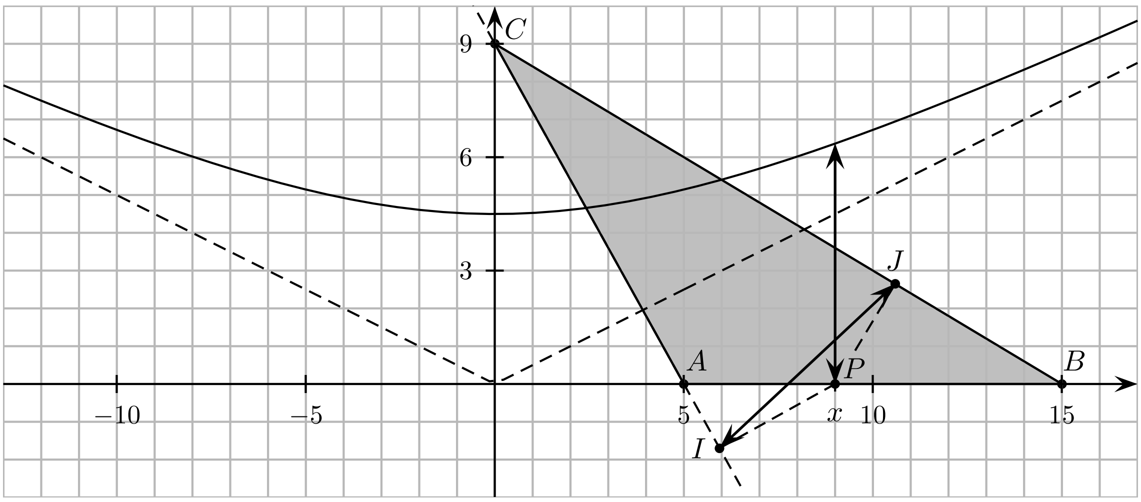
$$\frac{(IJ)}{(PC)} = \frac{(CI)(IP) + (CJ)(JP)}{(JP)(PI) + (JC)(CI)}$$

Cette propriété est en fait valable pour tous les quadrilatères convexes inscriptibles $IPJC$ (deuxième théorème de Ptolémée).

6. Remarque

Nous avons raisonné avec un triangle ABC dont la hauteur h_C issue du sommet C coupe le côté AB, c'est-à-dire lorsque les angles α et β sont aigus. Lorsque ce n'est pas le cas, on peut généraliser le problème en considérant les trois droites supportant les côtés du triangle.

Nous avons reproduit ci-dessous le graphe de $y = (IJ)$ en fonction de l'abscisse x du point P (relativement à celle de C). Dans cet exemple, on a $\gamma \cong 30°$ et $y_C = 9$, donc $y = (CP)\sin\gamma \cong \frac{1}{2}\sqrt{x^2+81}$, ce qui est asymptotique à la fonction $y = \frac{1}{2}|x|$ dont le graphe est donné en traitillés.



7. Conclusion

Nous avons généralisé à un triangle quelconque un résultat évident concernant les triangles rectangles. Alors que la première démonstration utilisait les théorèmes du sinus et du cosinus, la deuxième a permis de découvrir les théorèmes de Ptolémée sur les quadrilatères inscriptibles (que nous n'avons pas démontrés de manière générale). La problématique peut être introduite avec un logiciel tel que Geogebra : on peut identifier les coefficients a et b d'une fonction $f(x) = a\sqrt{x^2+b^2}$ puis, en déplaçant le sommet C sur l'axe Oy (ou les sommets A et B sur l'axe Ox), on peut exprimer a à l'aide de l'angle γ et interpréter la racine carrée comme la distance entre les points P et C.