Initiation aux équations de Pell-Fermat

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

1. Problématique

Nous voulons déterminer les entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels la somme $1 + 2 + \cdots + n$ est un carré parfait, autrement dit nous voulons résoudre l'équation diophantienne $\dfrac{n(n+1)}{2} = m^2$. En multipliant l'équation par 8 et en développant le membre de gauche, on obtient $4n^2 + 4n = 8m^2$, donc $(2n+1)^2 - 1 = 8m^2$, ou encore $(2n+1)^2 - 8m^2 = 1$. En posant $x = 2n + 1$ (entier impair) et $y = m$, on aboutit à une équation de Pell-Fermat $x^2 - 8y^2 = 1$. L'objectif de cet article est d'expliquer le lien entre les solutions $(x; y)$ de cette équation avec la fraction continue de $\sqrt{8}$.

2. Fractions continues

Tout nombre réel positif x_0 s'écrit de manière unique comme la somme d'un nombre naturel $a_0 = \lfloor x_0 \rfloor$ (appelé la *partie entière* de x_0) et d'un nombre compris dans l'intervalle $[0; 1[$. Si ce dernier nombre est non nul, on peut l'exprimer comme l'inverse d'un nombre $x_1 > 1$ et on peut itérer la démarche. On fabrique ainsi petit à petit la fraction continue de x_0 :

$$x_0 \;=\; a_0 + \frac{1}{x_1} \;=\; a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} \;=\; a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}} \;=\; \ldots$$

Pour gagner de la place, on liste simplement les nombres naturels a_k (non nuls sauf éventuellement pour $k = 0$) : $x_0 \;=\; [a_0; x_1] \;=\; [a_0; a_1; x_2] \;=\; [a_0; a_1; a_2; x_3] \;=\; \cdots$

Premier exemple : fraction continue de 80/7

Par l'algorithme de division euclidienne, on a $80 = 11 \cdot 7 + 3$, donc $\frac{80}{7} = 11 + \frac{3}{7} = \left[11; \frac{7}{3}\right]$ et on peut poursuivre : $7 = 2 \cdot 3 + 1$, donc $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ et $\frac{80}{7} = [11; 2; 3]$. On obtient ici une fraction continue finie. Notons que l'on peut également écrire $\frac{80}{7} = [11; 2; 2; 1]$ et on retiendra que pour un nombre rationnel, on peut choisir une fraction continue de longueur paire ou impaire. Nous utiliserons également le fait que deux fractions continues de même longueur qui sont associées au même nombre sont égales coefficients à coefficients : si $[a_0; a_1; \ldots; a_n] = [b_0; b_1; \ldots; b_n]$, alors $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots$, $a_n = b_n$.

Deuxième exemple : fraction continue de $\sqrt{8}$

La partie entière de $\sqrt{8}$ est 2 et $\sqrt{8} - 2 = \frac{4}{\sqrt{8}+2}$ est l'inverse de $\frac{\sqrt{8}+2}{4}$ donc $\sqrt{8} = \left[2; \frac{\sqrt{8}+2}{4}\right]$. On peut poursuivre la démarche : la partie entière de $\frac{\sqrt{8}+2}{4}$ est 1 et $\frac{\sqrt{8}+2}{4} - 1 = \frac{\sqrt{8}-2}{4} = \frac{1}{\sqrt{8}+2}$ est l'inverse de $\sqrt{8} + 2$, donc $\sqrt{8} = [2; 1; \sqrt{8} + 2]$. On peut alors introduire la fraction continue de $\sqrt{8}$ dans elle-même : $\sqrt{8} = [2; 1; 4; 1; \sqrt{8} + 2] = [2; 1; 4; 1; 4; 1; \sqrt{8} + 2]$, etc... On obtient ici une fraction continue infinie qui présente une répétition : $\sqrt{8} = [2; \overline{1; 4}]$.

De manière générale, nous pouvons énoncer les propriétés suivantes :

- Un nombre admet une fraction continue finie si et seulement s'il est rationnel.
- Un nombre admet une fraction continue présentant une période si et seulement s'il est irrationnel et annule un polynôme quadratique à coefficients entiers.
- Pour un nombre naturel n non carré, on a $\sqrt{n} = [a_0; \overline{\underbrace{a_1; a_2; \ldots; a_2; a_1}_{\text{palindrome}}; 2a_0}]$.

3. Approche matricielle

Pour un nombre x et une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on définit le nombre $M * x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ et on vérifie sans peine que $M_1 * (M_2 * x) = (M_1 M_2) * x$. Par exemple, avec la matrice $\mathcal{M}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient $M(\alpha) * x = \alpha + \dfrac{1}{x}$ et plus généralement $\mathcal{M}(a_0)\mathcal{M}(a_1)\cdots\mathcal{M}(a_n) * x = [a_0; a_1; \ldots; a_n; x]$.

Dans le deuxième exemple, nous avions trouvé $\sqrt{8} = \mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1) * (\sqrt{8}+2)$. En considérant la matrice $\mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cette relation devient $\sqrt{8} = \dfrac{a\sqrt{8}+2a+b}{c\sqrt{8}+2c+d}$. En multipliant cette égalité par le dénominateur du membre de droite, on obtient $8c + (2c+d)\sqrt{8} = a\sqrt{8} + 2a + b$, autrement dit $(-a+2c+d)\sqrt{8} = 2a+b-8c$. Comme $\sqrt{8}$ n'est pas rationnel, on en déduit que $2c+d = a$ et $2a+b = 8c$. Multiplions la première relation par a, la seconde par c et soustrayons les résultats :

$$a^2 - 8c^2 = (2ca + da) - (2ac + bc) = ad - bc = \det(\mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1)) = 1,$$

la dernière égalité provenant du fait que le déterminant d'une matrice $\mathcal{M}(\alpha)$ vaut -1. Par le théorème de Bézout, a et c sont relativement premiers et en remarquant encore que

$$\frac{a}{c} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \infty = \mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1) * \infty = [2;1] = 2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1},$$

on trouve $a = 3$ et $c = 1$. Ainsi le couple $(3;1)$ vérifie l'équation $x^2 - 8y^2 = 1$. On peut refaire tout le raisonnement avec la relation $\sqrt{8} = \mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1)\mathcal{M}(4)\mathcal{M}(1) * (\sqrt{8}+2)$ et $[2;1;4;1] = \frac{17}{6}$ fournit la solution $(17;6)$. De même, $[2;1;4;1;4;1] = \frac{99}{35}$ fournit la solution $(99;35)$ et $[2;1;4;1;4;1;4;1] = \frac{577}{204}$ fournit la solution $(577;204)$, etc...

4. Raccourci

La matrice $M = \mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ permet, par multiplication à gauche, de passer de $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1)$, puis à $\mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1)\mathcal{M}(4)\mathcal{M}(1)$, puis à $\mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1)\mathcal{M}(4)\mathcal{M}(1)\mathcal{M}(4)\mathcal{M}(1)$, etc... On en déduit que la k-ième solution $(a;c)$ fournie par notre méthode est donnée par la première colonne de la matrice $M^k\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui correspond à celle de la matrice M^k. On peut remarquer que la matrice M est associée à la multiplication par $3+\sqrt{8}$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{8}]$ par rapport à la base $\mathcal{B}(1;\sqrt{8})$: une matrice est construite avec les images des vecteurs de base et les images de 1 et $\sqrt{8}$ (associés à des vecteurs de base $\vec{e_1} = \binom{1}{0}$ et $\vec{e_2} = \binom{0}{1}$) sont respectivement $3+\sqrt{8}$ et $8+3\sqrt{8}$ (associées aux vecteurs $\binom{3}{1}$ et $\binom{8}{3}$). Il s'ensuit que la matrice M^k est associée à la multiplication par $(3+\sqrt{8})^k$. La première colonne de M^k correspond à $M^k\binom{1}{0}$, donc à $(3+\sqrt{8})^k$ et en développant cette puissance sous la forme $x + y\sqrt{8}$, on aboutit à une solution $(x;y)$ de l'équation $x^2 - 8y^2 = 1$. Par exemple, $(3+\sqrt{8})^4 = 577 + 204\sqrt{8}$ donne la solution $(577;204)$.

Notons $(x_k; y_k)$ la solution découlant de $(3+\sqrt{8})^k$. On a donc la relation $(3+\sqrt{8})^k = x_k + y_k\sqrt{8}$ et on vérifie que $(3-\sqrt{8})^k = x_k - y_k\sqrt{8}$. On en déduit

$$x_k = \frac{(3+\sqrt{8})^k + (3-\sqrt{8})^k}{2} \quad \text{et} \quad y_k = \frac{(3+\sqrt{8})^k - (3-\sqrt{8})^k}{2\sqrt{8}}.$$

Comme on peut négliger les puissances de $3-\sqrt{8} \cong 0.17$, on peut dire que x_k est l'entier directement supérieur à $\dfrac{(3+\sqrt{8})^k}{2}$ et y_k est l'entier directement inférieur à $\dfrac{(3+\sqrt{8})^k}{2\sqrt{8}}$.

5. Retour au problème initial

Nous cherchions les entiers n pour lesquels la somme $1+2+\cdots+n$ est un carré parfait et nous avons remarqué que chaque couple $(x; y)$ vérifiant $x^2 - 8y^2 = 1$ fournit une solution

$$n = \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}\left(\left\lceil \frac{(3+\sqrt{8})^k}{2} \right\rceil - 1\right).$$

Les dix premières valeurs de n sont 1, 8, 49, 288, 1681, 9800, 57121, 332928, 1940449 et 11309768.

Remarquons que l'équation $x^2 - 8y^2 = 1$ est équivalente à $x^2 - 2y^2 = 1$ avec y pair. Cette dernière équation est souvent utilisée pour résoudre notre problème initial (voir par exemple le sujet "*Nombre carré triangulaire*" sur Wikipédia) mais la fraction continue $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$ présente une période minimale de longueur 1 et ce cas trop particulier aurait certainement moins aidé à comprendre le mécanisme dans sa généralité. En fait, les fractions continues de longueur paire (comme $[1;2] = \frac{3}{2}$ et $[1;2;2;2] = \frac{17}{12}$) livrent des solutions de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ alors que celles de longueur impaire (comme $[1] = \frac{1}{1}$, $[1;2;2] = \frac{7}{5}$ et $[1;2;2;2;2] = \frac{41}{29}$) livrent des solutions de l'équation $x^2 - 2y^2 = -1$ (car le déterminant d'une matrice $\mathcal{M}(\alpha)$ vaut -1...).

6. Problème entièrement résolu

Nous allons montrer maintenant que la fraction continue de $\sqrt{8}$ permet de trouver **toutes** les solutions de l'équation diophantienne $x^2 - 8y^2 = 1$.

Considérons une solution $(x; y)$, la fraction continue $x/y = [a_0; a_1; \ldots; a_n]$ de longueur paire (choix), ainsi que la matrice $M = \mathcal{M}(a_1)\mathcal{M}(a_2)\cdots\mathcal{M}(a_n) = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$. Son déterminant est $ps - qr = -1$ et comme $\dfrac{x}{y} = \mathcal{M}(a_0)M * \infty = \mathcal{M}(a_0) * \dfrac{p}{q} = \dfrac{a_0p+q}{p}$, on a $p = y$ et $q = x - a_0p = x - a_0y$ car les fractions sont irréductibles[1]. On peut remarquer que $q^2 - 1 = (x - a_0y)^2 - 1 = (x^2-1) - 2a_0xy + a_0^2y^2$ est un multiple de $y = p$, disons $q^2 - 1 = kp$, et on a $p(s-k) = ps - pk = (qr-1) - (q^2-1) = q(r-q)$. Relativement premier avec q, le nombre p divise forcément $r - q$, mais comme[2] $r, q \in \{1, \ldots, p-1\}$, on a $|r-q| \leqslant p-2$, donc $r - q = 0$. Ainsi, la matrice M est symétrique et comme les matrices $\mathcal{M}(\alpha)$ le sont également, on peut écrire $[a_1; \ldots; a_n] = M * \infty = {}^tM * \infty = \mathcal{M}(a_n)\cdots\mathcal{M}(a_1) * \infty = [a_n; \ldots; a_1]$, donc la fraction continue $[a_1; \ldots; a_n]$ est un palindrome ($a_n = a_1$, $a_{n-1} = a_2$, etc).

1. Avec le théorème de Bézout, l'irréductibilité de x/y est évidente et celle de $(a_0p+q)/p$ découle de la relation $(a_0p+q)r - p(s+a_0r) = qr - ps = 1$.
2. On montre facilement par induction que le plus grand coefficient d'un produit de n matrices $\mathcal{M}(\cdot)$ se trouve en haut à gauche.

Considérons maintenant la fraction continue périodique $\theta = [a_0; \overline{a_1; \ldots; a_1; 2a_0}]$ qui commence par celle de x/y. On a alors $\theta - a_0 = [0; a_1; \ldots; a_1; a_0 + \theta]$, autrement dit

$$\begin{aligned}
\theta - a_0 &= \mathcal{M}(0) \overbrace{\mathcal{M}(a_1) \cdots \mathcal{M}(a_1)}^{=M} * (\theta + a_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ q & s \end{pmatrix} * (\theta + a_0) \\
&= \begin{pmatrix} q & s \\ p & q \end{pmatrix} * (\theta + a_0) = \frac{q(\theta + a_0) + s}{p(\theta + a_0) + q}
\end{aligned}$$

En multipliant les deux extrémités de cette chaîne d'égalités par $p(\theta + a_0) + q$, on obtient la relation $p(\theta^2 - a_0^2) + q(\theta - a_0) = q(\theta + a_0) + s$, donc $p\theta^2 - a_0^2 p - a_0 q = a_0 q + s$ et $p^2\theta^2 = a_0^2 p^2 + 2a_0 pq + ps$. Comme le déterminant de M est $ps - q^2 = -1$, on a

$$p^2\theta^2 = a_0^2 p^2 + 2a_0 pq + q^2 - 1 = (a_0 p + q)^2 - 1 = x^2 - 1 = 8y^2 = 8p^2.$$

On a ainsi $\theta = \sqrt{8}$ et la fraction continue de x/y commence celle de $\sqrt{8}$ avant que cette dernière se répète indéfiniment. Ceci montre que la méthode présentée avec la fraction continue de $\sqrt{8}$ permet de trouver toutes les solutions de l'équation $x^2 - 8y^2 = 1$.

7. Théorie

Après avoir traité un cas particulier, il serait intéressant de connaître le résultat général. Pour n'importe quel nombre naturel N qui n'est pas un carré parfait, la fraction continue de $\sqrt{N}$ présente une période (motif répétitif). Une telle période permet de trouver une solution de l'équation $x^2 - Ny^2 = 1$ si elle est de longueur paire, ou de l'équation $x^2 - Ny^2 = -1$ si elle est de longueur impaire. Notons que s'il existe une période de longueur n, alors il existe des périodes de longueur kn pour n'importe quel nombre entier $k \geqslant 1$. Ainsi, la fraction continue de $\sqrt{N}$ livre une infinité de solutions de l'équation $x^2 - Ny^2 = 1$, ainsi que de l'équation $x^2 - Ny^2 = -1$ si la période minimale est de longueur impaire. Elle donne en réalité toutes les solutions.

Exemple

La fraction continue $\sqrt{41} = [6; \overline{2; 2; 12}]$ a une période de longueur 3. On a $[6; 2; 2] = 32/5$, donc $(32; 5)$ vérifie l'équation $x^2 - 41y^2 = -1$. On peut également dire que $\sqrt{41} = [6; \overline{2; 2; 12; 2; 2; 12}]$ a une période de longueur 6, on a $[6; 2; 2; 12; 2; 2] = 2049/320$ donc $(2049; 320)$ vérifie $x^2 - 41y^2 = 1$. Remarquons qu'avec le raccourci présenté au paragraphe 4, on a directement $(32 + 5\sqrt{41})^2 = 2049 + 320\sqrt{41}$ et le carré de ce nombre livre $(8'396'801; 1'311'360)$ comme deuxième solution de l'équation $x^2 - 41y^2 = 1$, dans le sens où il n'y a aucune solution $(x; y)$ avec $2049 < x < 8'396'801$.

8. Conclusion

Nous espérons que cette brève incursion dans le monde fascinant des fractions continues a intéressé le lecteur. Les fractions continues permettent de résoudre divers types d'équations diophantiennes, comme les équations de Bézout $ax + by = 1$ (où a et b sont des entiers premiers entre eux), les équations d'Euler $p = x^2 + y^2$ (où p est un nombre premier congru à 1 modulo 4) ou les équations de Pell-Fermat $x^2 - Ny^2 = \pm 1$ (où N est un entier positif non carré). Concernant ces dernières, une approche alternative est présentée dans l'article "*An algorithm to solve a Pell equation*", disponible sur internet à l'adresse `www.geman.in/volumes//all_volumes-page1_2015`