# La suite de Stern

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

## 1 Problématique

Moins connue que celle de Fibonacci, la suite de Stern[1] n'en est pas moins intéressante. Elle est définie par les valeurs initiales $s_0 = 0$, $s_1 = 1$ et des relations de récurrence différentes selon la parité de l'indice : $s_{2n} = s_n$ et $s_{2n+1} = s_n + s_{n+1}$ pour $n \geqslant 1$. Les premières valeurs sont présentées dans le tableau suivant.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_n$ | 0 | 1 | 1 | $\underline{2}$ | 1 | $\underline{3}$ | 2 | $\underline{3}$ | 1 | 4 | 3 | $\underline{5}$ | 2 | $\underline{5}$ | 3 | 4 | 1 |

Dans cet article, nous expliquons le lien entre la valeur de $s_n$ et le développement binaire de $n$ par le biais d'une fraction continue, nous déduisons une bijection explicite entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}_+$, puis nous démontrons que deux "1" consécutifs dans la suite de Stern délimitent une sous-suite palindromique (en gris dans le tableau) dont le plus grand élément est un nombre de Fibonacci (souligné).

## 2 Approche matricielle

Posons $\overrightarrow{v_n} = \binom{s_n}{s_{n+1}}$. Ce vecteur est envoyé sur $\overrightarrow{v_{2n}}$ par la matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et sur $\overrightarrow{v_{2n+1}}$ par la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, autrement dit $G\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_{2n}}$ et $D\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_{2n+1}}$. Si on ne s'intéresse qu'à l'indice, on voit que la matrice $G$ a pour effet de rajouter un "0" à droite dans le développement binaire de $n$ alors que la matrice $D$ a pour effet d'y rajouter un "1". On peut construire facilement les antécédants successifs d'un indice donné, disons $n = 200$ :

$$200 \xleftarrow{G} 100 \xleftarrow{G} 50 \xleftarrow{G} 25 \xleftarrow{D} 12 \xleftarrow{G} 6 \xleftarrow{G} 3 \xleftarrow{D} 1 \xleftarrow{D} 0.$$

L'antécédant d'un indice $n$ est $\lfloor n/2 \rfloor$ en notant "$G$" si $n$ est pair et "$D$" si $n$ est impair. En lisant cette chaîne d'antécédants de droite à gauche, on peut en déduire aussi bien le développement binaire $200 = [11001000]_2$ que la relation vectorielle $\overrightarrow{v_{200}} = GGGDGGDD\overrightarrow{v_0} = G^3D^1G^2D^2\overrightarrow{v_0}$. On passe d'une information à l'autre en faisant les remplacements $G \leftrightarrow 0$, $D \leftrightarrow 1$ et en inversant le mot.

De manière générale, pour un indice donné par son développement binaire

$$n = [\underbrace{1\ldots1}_{a_k}\underbrace{0\ldots0}_{a_{k-1}}\cdots\underbrace{1\ldots1}_{a_1}\underbrace{0\ldots0}_{a_0}]_2$$

avec des entiers $a_0 \geqslant 0$, $a_1, \ldots, a_k \geqslant 1$ et $k$ impair, on a $\overrightarrow{v_n} = G^{a_0}D^{a_1}\cdots G^{a_{k-1}}D^{a_k}\overrightarrow{v_0}$. On peut encore remarquer que

$$D^mG^n = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+mn & m \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

autrement dit $D^mG^n = \mathcal{M}(m)\mathcal{M}(n)$ avec $\mathcal{M}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Moritz Abraham Stern (1807 – 1894) est un mathématicien allemand, il fit son doctorat à Göttingen sous la direction de Gauss (1777 – 1855).

En intercalant judicieusement la matrice identité $I = G^0 = D^0$ dans l'expression de $\overrightarrow{v_n}$ trouvée précédemment, on obtient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_n} &= D^0 G^{a_0} D^{a_1} \cdots G^{a_{k-1}} D^{a_k} G^0 \overrightarrow{v_0} \\ &= \mathcal{M}(0)\mathcal{M}(a_0)\mathcal{M}(a_1)\cdots\mathcal{M}(a_{k-1})\mathcal{M}(a_k)\mathcal{M}(0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{M}(0)\binom{0}{1} = \binom{1}{0}$, il s'ensuit que le vecteur $\overrightarrow{v_n}$ est la première colonne du produit matriciel $M_n = \mathcal{M}(0)\mathcal{M}(a_0)\mathcal{M}(a_1)\cdots\mathcal{M}(a_{k-1})\mathcal{M}(a_k)$ qui comporte un nombre impair de facteurs $\mathcal{M}(\cdot)$. En particulier, le déterminant de $M_n = \left(\begin{smallmatrix} s_n & a \\ s_{n+1} & b\end{smallmatrix}\right)$ est $bs_n - as_{n+1} = -1$. Cette combinaison est divisible par le plus grand diviseur commun de $s_n$ et $s_{n+1}$, donc ce dernier vaut 1.

## 3 Lien avec les fractions continues

Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ et un nombre $x$, on pose $M * x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ et on vérifie facilement que $M_1 * (M_2 * x) = (M_1 M_2) * x$. On a $\mathcal{M}(\alpha) * x = \alpha + \frac{1}{x}$ et plus généralement

$$\mathcal{M}(\alpha_1)\mathcal{M}(\alpha_2)\cdots\mathcal{M}(\alpha_n) * x \;=\; \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\ddots \; \alpha_n + \cfrac{1}{x}}}$$

Cette structure de fractions imbriquées les unes dans les autres s'appelle une *fraction continue* et on la note $[\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n; x]$. La fraction continue d'un nombre rationnel s'obtient par divisions euclidiennes successives. On a par exemple $\frac{19}{14} = 1 + \frac{5}{14} = \left[1; \frac{14}{5}\right]$ et comme $\frac{14}{5} = 2 + \frac{4}{5} = \left[2; \frac{5}{4}\right]$, on en déduit que $\frac{19}{14} = \left[1; 2; \frac{5}{4}\right]$. Comme $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4} = [1; 4]$, on a finalement $\frac{19}{14} = [1; 2; 1; 4]$ et l'algorithme est terminé car tous les nombres $\alpha_i$ sont entiers. Remarquons que l'on peut aussi écrire $\frac{19}{14} = [1; 2; 1; 3; 1]$ et on retiendra que pour un nombre rationnel, on peut choisir une fraction continue de longueur paire ou impaire.

Comme $\binom{s_n}{s_{n+1}} = \mathcal{M}(0)\mathcal{M}(a_0)\mathcal{M}(a_1)\cdots\mathcal{M}(a_{k-1})\mathcal{M}(a_k)\binom{1}{0}$, on a

$$\frac{s_n}{s_{n+1}} \;=\; \mathcal{M}(0)\mathcal{M}(a_0)\mathcal{M}(a_1)\cdots\mathcal{M}(a_{k-1})\mathcal{M}(a_k) * \infty \;=\; [0; a_0; a_1; \ldots; a_{k-1}; a_k],$$

ce qui permet de trouver $s_n$ et $s_{n+1}$ puisque ces deux entiers sont premiers entre eux. Par exemple, comme $200 = [11001000]_2$, on a $\dfrac{s_{200}}{s_{201}} = [0; 3; 1; 2; 2] = \dfrac{7}{26}$ donc $s_{200} = 7$ et $s_{201} = 26$. Remarquons que si $a_0 = 0$, la fraction continue devient simplement $\dfrac{s_n}{s_{n+1}} = [a_1; \ldots; a_{k-1}; a_k]$ mais dans tous les cas, elle admet une longueur impaire. Pour la suite, lorsque nous considérerons une fraction continue $[a_1; \ldots; a_{k-1}; a_k]$ de longueur impaire, on gardera à l'esprit qu'elle pourrait être de la forme $[0; a_0; a_1; \ldots; a_{k-1}; a_k]$ grâce à un décalage d'indice.

## 4 Dénombrabilité de $\mathbb{Q}_+$

Toute fraction $\dfrac{a}{b}$ avec $a \geqslant 0$ et $b > 0$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b} = \dfrac{s_n}{s_{n+1}}$ pour un certain entier $n$. Il suffit pour cela d'établir la fraction continue $\dfrac{a}{b} = [a_1; \ldots; a_k]$ de longueur impaire et de considérer le nombre $n = [\underbrace{1\ldots1}_{a_k}\underbrace{0\ldots0}_{a_{k-1}}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_2}\underbrace{1\ldots1}_{a_1}]_2$ exprimé en base 2.

Par exemple, $\frac{19}{14} = [1;2;1;3;1]$ implique $n = [10001001]_2 = 137$ donc $s_{137} = 19$ et $s_{138} = 14$. Pour la fraction inverse, on a la fraction continue $\frac{14}{19} = [0;1;2;1;4]$ et donc $n = [11110110]_2 = 246$ convient, autrement dit $s_{246} = 14$ et $s_{247} = 19$.

L'application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}_+$ qui envoie un entier $n = [\overbrace{1\ldots1}^{a_k}\overbrace{0\ldots0}^{a_{k-1}}\ldots\overbrace{1\ldots1}^{a_1}\overbrace{0\ldots0}^{a_0}]_2$ sur la fraction $\frac{s_n}{s_{n+1}} = [0;a_0;a_1;\ldots;a_k]$ est clairement bijective. Les nombres $\varphi(n)$ avec $n \in \mathbb{N}$ constituent la *suite de Calkin-Wilf* :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(n)$ | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 2 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | 3 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | 4 | $\frac{1}{5}$ |

Nous voulons trouver maintenant une formule permettant de passer d'un nombre $x = s_n/s_{n+1}$ au suivant. On considère donc la fraction continue $x = [a_1;a_2;\ldots;a_k]$ de longueur impaire de sorte que $n = [\underbrace{1\ldots1}_{a_k}\underbrace{0\ldots0}_{a_{k-1}}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_2}\underbrace{1\ldots1}_{a_1}]_2$. On a alors $n+1 = [\underbrace{1\ldots1}_{a_k}\underbrace{0\ldots0}_{a_{k-1}}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_2-1}1\underbrace{0\ldots0}_{a_1}]_2$, donc

$$\frac{s_{n+1}}{s_{n+2}} = \underbrace{[0;a_1;1;a_2-1;a_3;\ldots;a_k]}_{\text{longueur impaire}} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{-1 + [a_2;a_3;\ldots;a_k]}}}$$

En remplaçant $[a_2;a_3;\ldots;a_k]$ par $\frac{1}{x-a_1}$ et en remontant la fraction continue, on trouve

$$\frac{s_{n+1}}{s_{n+2}} = \frac{1}{2a_1+1-x} = \frac{1}{2\lfloor x\rfloor + 1 - x}$$

Ainsi, on passe d'un nombre $x$ au suivant grâce à l'expression $f(x) = \frac{1}{2\lfloor x\rfloor + 1 - x}$.

Le lecteur attentif aura remarqué que notre raisonnement pose problème si $a_2 = 0$. Dans ce cas, on a $n = [\underbrace{1\ldots1}_{a_1}]_2$, $n+1 = [1\underbrace{0\ldots0}_{a_1}]_2$, donc $x = \frac{s_n}{s_{n+1}} = a_1$ et $\frac{s_{n+1}}{s_{n+2}} = [0;a_1;1] = \frac{1}{a_1+1} = f(x)$. Ainsi, la fonction $f$ est toujours valable.

## 5 Sous-suites palindromiques

On démontre facilement que $s_k = 1$ si et seulement si $k$ est une puissance de 2 et nous allons montrer que deux “1” consécutifs dans la suite de Stern délimitent une sous-suite palindromique[2], ce qui revient à montrer que $s_{2^n+m} = s_{2^{n+1}-m}$ pour tous les entiers $n \geqslant 1$ et $m \in \{1,2,\ldots,2^n-1\}$.

Considérons donc un nombre $m = [\underbrace{0\ldots0}_{b_k}\underbrace{1\ldots1}_{b_{k-1}}\ldots\underbrace{1\ldots1}_{b_1}\underbrace{0\ldots0}_{b_0}]_2$ dont on a complété le développement binaire à gauche par des “0” pour avoir $n+1$ digits. On peut remarquer que $b_k \geqslant 1$ et on a alors

$$2^n + m = [1\underbrace{0\ldots0}_{b_k-1}\underbrace{1\ldots1}_{b_{k-1}}\ldots\underbrace{1\ldots1}_{b_1}\underbrace{0\ldots0}_{b_0}]_2 \quad \text{et} \quad 2^{n+1}-1-m = [\underbrace{1\ldots1}_{b_k}\underbrace{0\ldots0}_{b_{k-1}}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{b_1}\underbrace{1\ldots1}_{b_0}]_2.$$

2. Ceci est assez évident car une sous-suite en gris dans notre tableau de valeurs s'obtient en intercalant dans la sous-suite précédente les sommes de toutes les paires de nombres consécutifs. Nous voulons donner ici une démonstration faisant appel aux développements binaires et aux fractions continues.

Si $k$ est impair, ces développements binaires indiquent respectivement

$$\frac{s_{2^n+m}}{s_{2^n+m+1}} = [b_0; b_1; \ldots; b_{k-1}; b_k - 1; 1] \quad \text{et} \quad \frac{s_{2^{n+1}-1-m}}{s_{2^{n+1}-m}} = [0; b_0; b_1; \ldots; b_{k-1}; b_k].$$

On en déduit que $\dfrac{s_{2^{n+1}-m}}{s_{2^{n+1}-1-m}} = [b_0; b_1; \ldots; b_{k-1}; b_k] = \dfrac{s_{2^n+m}}{s_{2^n+m+1}}$.

En comparant les fractions (irréductibles), on a bien $s_{2^{n+1}-m} = s_{2^n+m}$ (et $s_{2^{n+1}-m-1} = s_{2^n+m+1}$). Le raisonnement s'adapte facilement lorsque $k$ est pair.

## 6 Lien avec les nombres de Fibonacci

Nous démontrons ici que la valeur maximale atteinte par la suite de Stern entre deux "1" consécutifs est un nombre de Fibonacci[3]. On montre d'abord par induction sur $n$ que $s_m \leqslant F_{n+2}$ pour tout entier $m \in \{2^n, \ldots, 2^{n+1}\}$. Ceci est facile à vérifier pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons que l'assertion est vérifiée pour deux indices consécutifs ($n-1$ et $n$) et considérons un entier $m \in \{2^{n+1}, \ldots, 2^{n+2}\}$.

- Si $m$ est pair, disons $m = 2m'$ avec $m' \in \{2^n, \ldots, 2^{n+1}\}$, alors $s_m = s_{m'} \leqslant F_{n+2} < F_{n+3}$.
- Si $m$ est impair, on peut écrire $m = 2m' + 1$ avec $m' \in \{2^n, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ et on a alors $s_m = s_{m'} + s_{m'+1}$. Comme l'un des deux indices ($m'$ ou $m'+1$) est pair, on a par hypothèse d'induction et le raisonnement précédent $s_m = s_{m'} + s_{m'+1} \leqslant F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+3}$.

Ainsi l'assertion est vérifiée pour $n+1$. Il reste à voir qu'il existe un entier $m \in \{2^n, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ tel que $s_m = F_{n+2}$. Le développement binaire de $m$ admet $n+1$ digits et on y considère une alternance de "0" et de "1".

- Si $n$ est pair, on a $m = [\overbrace{1010\ldots01}^{n+1 \text{ digits}}]_2$, donc $\dfrac{s_m}{s_{m+1}} = [\overbrace{1; 1; \ldots; 1}^{n+1}] = \dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ et $s_m = F_{n+2}$.

  On peut remarquer que $3m = m + 2m = [\underbrace{11\ldots1}_{n+2 \text{ digits}}]_2 = 2^{n+2} - 1$, donc $m = \dfrac{2^{n+2}-1}{3}$.

- Si $n$ est impair, on a $m = [\overbrace{101\ldots10}^{n+1 \text{ digits}}]_2$, donc $\dfrac{s_m}{s_{m+1}} = [0; \overbrace{1; \ldots; 1}^{n+1}] = \dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ et $s_{m+1} = F_{n+2}$.

  Remarquons que $m = 2 \cdot [\underbrace{1010\ldots1}_{n \text{ digits}}]_2 = 2 \cdot \dfrac{2^{n+1}-1}{3} = \dfrac{2^{n+2}-2}{3}$, donc $m + 1 = \dfrac{2^{n+2}+1}{3}$.

Pour résumer, on a $s_m = F_{n+2}$ pour $m = \dfrac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{3} = 2^n + \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$. Par la propriété de palindromie, on peut également considérer $m = 2^{n+1} - \dfrac{2^n - (-1)^n}{3} = \dfrac{5 \cdot 2^n + (-1)^n}{3}$.

## 7 Conclusion

Fortement reliée aux développements binaires et aux fractions continues, la suite de Stern possède des propriétés étonnantes. Les personnes voulant approfondir le sujet peuvent consulter l'article de Jean-Paul Delahaye, "*La suite de Stern-Brocot, soeur de Fibonacci*", paru en octobre 2012 dans la revue "*Pour la science*".

3. Né à Pise, Leonardo Fibonacci ($\sim 1175 - 1250$) a importé en Occident le savoir mathématique arabe mais il est surtout connu pour sa suite de nombres définis par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour $n \geqslant 0$. On montre facilement par induction sur $n \geqslant 1$ que $\frac{F_{n+1}}{F_n} = [\underbrace{1; 1; \ldots; 1}_{n}]$.