Le nombre d'Euler

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

Problématique

Nous réunissons quelques résultats concernant le nombre d'Euler [1], tels que l'existence de la limite qui le définit, sa série avec les inverses des factorielles, sa fraction continue, son irrationalité et sa transcendance. Certaines explications simplifient un peu celles que l'on rencontre habituellement.

1 Deux limites célèbres

Le nombre d'Euler $e \cong 2{,}7182818$ peut être donné par des limites :

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

Nous démontrons en premier lieu que ces deux limites existent et sont bel et bien égales.

Preuve. On peut tout d'abord remarquer que pour des nombres $x > y > 0$ et un entier $n \geqslant 1$, on a

$$(x-y)(n+1)y^n \ < \ x^{n+1} - y^{n+1} \ < \ (x-y)(n+1)x^n \qquad (*)$$

car le membre central est $x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y)(x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \cdots + y^n)$.

Par exemple, pour les nombres $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, on peut écrire

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n - a_{n+1} \ = \ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \overset{(*)}{<} \ \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ = \ \frac{1}{n} a_n.$$

En ajoutant $a_{n+1} - \frac{1}{n} a_n$ aux deux extrémités, on trouve $a_n < a_{n+1}$ et la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est donc strictement croissante.

Les nombres $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n$, quant à eux, vérifient

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right) b_n - b_{n+1} \ &= \ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \\ &\overset{(*)}{>} \ \frac{n+2}{n(n+1)}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \ = \ \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) a_{n+1} \ = \ \frac{1}{n} b_{n+1}. \end{aligned}$$

En ajoutant b_{n+1} aux deux extrémités, on obtient $(1 + \frac{1}{n})b_n > (1 + \frac{1}{n})b_{n+1}$, donc $b_n > b_{n+1}$ et la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.

1. Leonhard Euler (1707 – 1783) contribua à de nombreux domaines des mathématiques (trigonométrie, géométrie, analyse, algèbre, théorie des nombres, théorie des graphes) et de la physique (mécanique, dynamique des fluides, optique).

Comme $b_n > a_n$, on a des intervalles emboîtés $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \cdots \supset [a_n; b_n]$ dont la longueur $b_n - a_n = \frac{1}{n} a_n < \frac{1}{n} b_n < \frac{1}{n} b_1 = \frac{4}{n}$ tend vers zéro. La première limite a donc un sens et définit le nombre d'Euler e.

Considérons maintenant $S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. En développant $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ avec la formule du binôme, on obtient

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n+1-k)}{n^k} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Le produit entre crochets est inférieur à 1, donc $a_n < S_n$. D'autre part, ce produit est supérieur à $\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^k = 1 - \left(1^k - \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^k\right) \overset{(*)}{>} 1 - \frac{(k-1)k}{n}$, donc

$$a_n \;>\; S_n - \frac{1}{n} S_{n-2} \;>\; S_n - \frac{1}{n} S_n \;=\; \left(1 - \frac{1}{n}\right) S_n \;>\; \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_n.$$

En prenant la limite lorsque $n \to \infty$ dans cette suite d'inégalités, on trouve alors $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = e$.

2 Fraction continue

Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et un nombre x, on note $M * x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ et on vérifie facilement que $M_1 * (M_2 * x) = (M_1 M_2) * x$. Par exemple, si on pose $\mathcal{M}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\mathcal{M}(\alpha) * x = \alpha + \dfrac{1}{x}$ et plus généralement

$$\mathcal{M}(\alpha_0)\mathcal{M}(\alpha_1)\cdots\mathcal{M}(\alpha_n) * x \;=\; \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\ddots \; \alpha_n + \cfrac{1}{x}}}$$

Cette structure de fractions imbriquées les unes dans les autres s'appelle une *fraction continue* et on la note $[\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n, x]$. Pour un nombre irrationnel θ, il existe de manière unique une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres entiers, strictement positifs sauf éventuellement α_0, et une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres supérieurs à 1 telles que $\theta = [\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n, x_n]$ pour tout $n \geqslant 0$. On a alors $\theta = \lim\limits_{n\to\infty} [\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et on note simplement $\theta = [\alpha_0; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots]$ lorsque la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ ne présente aucune ambiguïté.

Nous établissons ici la fraction continue $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \ldots] = [2; \overline{1, 2n, 1}]_{n\geqslant 1}$, où la partie surlignée se répète indéfiniment en incrémentant l'entier $n \geqslant 1$.

Preuve. L'expression $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ vérifie l'équation différentielle $4xy'' = y - 2y'$. Par induction, on a plus généralement $4xy^{(n+2)} = y^{(n)} - 2(2n+1)y^{(n+1)}$, autrement dit

$$\frac{y^{(n)}}{y^{(n+1)}} \;=\; 2(2n+1) + \frac{4x}{y^{(n+1)}/y^{(n+2)}} \;=\; \begin{pmatrix} 2(2n+1) & 4x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \frac{y^{(n+1)}}{y^{(n+2)}}.$$

En posant $x = \dfrac{1}{4}$, on obtient $\dfrac{y^{(n)}(1/4)}{y^{(n+1)}(1/4)} = \begin{pmatrix} 2(2n+1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \dfrac{y^{(n+1)}(1/4)}{y^{(n+2)}(1/4)}$ et, par itération,

$$\frac{y(1/4)}{y'(1/4)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 2(2n+1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \frac{y^{(n+1)}(1/4)}{y^{(n+2)}(1/4)}.$$

Appliquons la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ à cette relation. À gauche de l'égalité, on obtient

$$M * \frac{e^{1/2}+e^{-1/2}}{e^{1/2}-e^{-1/2}} = M * \frac{e+1}{e-1} = M^2 * e = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} * e = e.$$

A droite de l'égalité, on utilise la relation $M\mathcal{M}(2k) = \mathcal{M}(1)\mathcal{M}(k-1)\mathcal{M}(1)M$. On trouve alors

$$e = \underbrace{\mathcal{M}(1)\mathcal{M}(0)\mathcal{M}(1)}_{\mathcal{M}(2)}\underbrace{\mathcal{M}(1)\mathcal{M}(2)\mathcal{M}(1)}\cdots\underbrace{\mathcal{M}(1)\mathcal{M}(2n)\mathcal{M}(1)}M * \frac{y^{(n+1)}(1/4)}{y^{(n+2)}(1/4)},$$

autrement dit $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, \ldots, 1, 2n, 1, M * \zeta_{n+1}]$ avec $\zeta_{n+1} = \dfrac{y^{(n+1)}(1/4)}{y^{(n+2)}(1/4)}$.

On doit encore vérifier que $M * \zeta_{n+1} > 1$. À partir de la série de MacLaurin de y, on a

$$y^{(n)}(1/4) = 2\left[\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k\geqslant 0}\frac{x^k}{(2k)!}\right]_{x=1/4} = 2\sum_{k\geqslant 0}\frac{(n+k)!}{k!(2n+2k)!}\left(\frac{1}{4}\right)^k > 0.$$

Ceci étant valable pour tout entier $n \geqslant 0$, on en déduit que

$$y^{(n)}(1/4) = y^{(n+2)}(1/4) + 2(2n+1)y^{(n+1)}(1/4) > y^{(n+1)}(1/4).$$

En remplaçant n par $n+1$, il s'ensuit que $\zeta_{n+1} > 1$ et donc $M * \zeta_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{\zeta_{n+1}-1} > 1$ ce qui achève la démonstration. Remarquons que nous avons également montré au passage que $\dfrac{e+1}{e-1} = [\,\overline{2+4n}\,]_{n\geqslant 0}$.

3 Irrationalité

Avec une fraction continue infinie et non périodique, le nombre e n'est ni rationnel, ni irrationnel quadratique[2]. En fait, l'irrationalité du nombre e est facile à démontrer sans fraction continue. Nous présentons la preuve de Joseph Fourier $(1768-1830)$.

Preuve. Supposons que l'on puisse écrire $e = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ avec $n \geqslant 2$ et regardons l'égalité

$$n!\left(e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right) = n!\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots\right)$$

qui découle de la série établie dans le premier paragraphe. Le membre de gauche serait un nombre entier alors que le membre de droite est un nombre strictement positif inférieur à

$$\frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right) = \frac{1}{n} < 1,$$

ce qui est absurde !

2. Un nombre rationnel admet une fraction continue finie obtenue par des divisions euclidiennes successives alors qu'un irrationnel quadratique, c'est-à-dire un nombre de la forme $a + b\sqrt{n}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}^*$ et n entier positif non carré, admet une fraction continue infinie présentant un motif répétitif.

4 Transcendance

Charles Hermite ($1822-1901$) a démontré que le nombre d'Euler est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers. La preuve n'est pas véritablement difficile mais elle est d'une extraordinaire subtilité. Nous la présentons sous la forme d'une descente infinie sur le degré d'un hypothétique polynôme à coefficients entiers qui s'annulerait en $x = e$.

Preuve. Soit $f(x)$ un polynôme de degré d et $F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(d)}(x)$. On peut remarquer que $\big[-e^{-x}F(x)\big]' = e^{-x}F(x) - e^{-x}F'(x) = e^{-x}(F(x) - F'(x)) = e^{-x}f(x)$, donc

$$\int_0^k e^{-x}f(x)\,dx \;=\; \big[-e^{-x}F(x)\big]_0^k \;=\; F(0) - e^{-k}F(k).$$

Etant donnés des nombres entiers $a_0, a_1, \dots, a_n$, on a alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e^k \int_0^k e^{-x}f(x)\,dx \;=\; \left(\sum_{k=0}^{n} a_k e^k\right) F(0) - \sum_{k=0}^{n} a_k F(k).$$

Supposons que $x = e$ annule un polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ avec un degré minimal $n \geqslant 2$ (on sait déjà que e est irrationnel). L'égalité ci-dessus devient alors simplement

$$S \;:=\; \sum_{k=0}^{n} a_k e^k \int_0^k e^{-x}f(x)\,dx \;=\; -(a_0F(0) + a_1F(1) + \cdots + a_nF(n)).$$

Dévoilons maintenant l'expression du polynôme f. On considère un nombre premier p et on pose

$$f(x) \;=\; x^{p-1}\big((x-1)(x-2)\cdots(x-n)\big)^p.$$

Ce polynôme de degré $d = np + p - 1$ se factorise par x^{p-1} et peut être développé sous la forme $f(x) = c_{p-1}x^{p-1} + c_px^p + \cdots + c_dx^d$ avec des coefficients c_k entiers. La k-ième dérivée de f en $x = 0$ est $f^{(k)}(0) = c_k k!$, elle est nulle si $k \in \{0, 1, \dots, p-2\}$ et il s'agit d'un entier divisible par $p!$ si $k \geqslant p$. On a encore $f^{(p-1)}(0) = (-1)^{np}(n!)^p(p-1)!$. Ainsi, $F(0)$ est un nombre entier divisible par $(p-1)!$.

On peut également développer $f(x)$ avec des puissances de $(x-m)$ pour $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixé. Comme $f(x)$ se factorise par $(x-m)^p$, on a $f(x) = c_p(x-m)^p + c_{p+1}(x-m)^{p+1} + \cdots + c_d(x-m)^d$ où les coefficients c_k sont des nombres entiers qui dépendent de m. La k-ième dérivée de f en $x = m$ est $f^{(k)}(m) = c_k k!$, elle est nulle si $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ et il s'agit d'un entier divisible par $p!$ si $k \geqslant p$, donc $F(m)$ est un nombre entier divisible par $p!$.

Pour $x \in [0; n]$, on a la majoration $|f(x)| \leqslant n^{p-1}n^{np}$ et avec l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned}
|S| \;&=\; \left|\sum_{k=0}^{n} a_k e^k \int_0^k e^{-x}f(x)\,dx\right| \;\leqslant\; \sum_{k=0}^{n} |a_k| e^k \int_0^k |f(x)|\,dx \\
&\leqslant\; \sum_{k=0}^{n} |a_k| e^k \int_0^k n^{p-1}n^{np}\,dx \;=\; \underbrace{\Big(\sum |a_k| k e^k\Big) n^n}_{\text{constante } C>0} (n \cdot n^n)^{p-1} \;=\; C(n^{n+1})^{p-1}.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{(n^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!}$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, on a $\frac{(n^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!} < \frac{1}{C}$, donc $|S| < (p-1)!$, lorsque p est suffisamment grand. On en déduit que S est nul car il s'agit d'un entier divisible par $(p-1)!$. Comme $F(1), \dots, F(n)$ sont tous divisibles par $p!$, il en est de même pour $a_0F(0)$ et donc pour $a_0(-1)^{np}(n!)^p(p-1)!$. Ainsi p divise $a_0(n!)^p$ et comme p est arbitrairement grand, on a $a_0 = 0$. Il s'ensuit que $x = e$ annule le polynôme $\frac{P(x)}{x} \in \mathbb{Z}[x]$, ce qui contredit la minimalité supposée de n.