L'article ci-dessous a été publié dans sa version originale en allemand dans le Bulletin 141 de septembre dernier. Sa lecture étant à la portée d'élèves intéressés, j'ai incité à sa traduction de sorte que les jeunes Romands puissent suivre cette réflexion à la fois simple et surprenante. Je tiens à remercier mes collègues Ch. Jacob pour sa traduction et P. Turtschy pour la rédaction finale.

Hj. Stocker

Le théorème d'Eddy

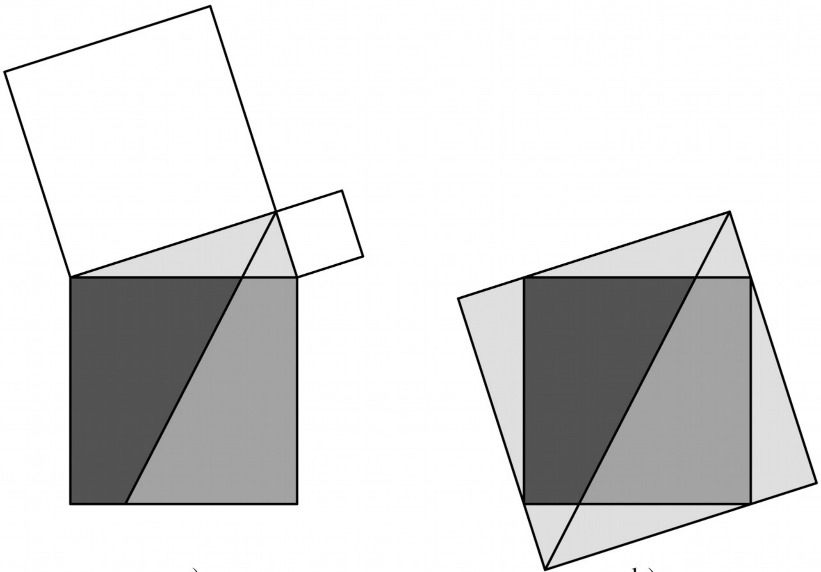
Hans Walser, hwalser@bluewin.ch, www.walser-h-m.ch/hans

De quoi s'agit-il?

Dans sa présentation de l'ouvrage de W. Zeuge (bulletin no 140), Hj. Stocker mentionne un théorème de géométrie élémentaire, le théorème d'Eddy, qui m'était jusque-là inconnu. La preuve permet un nouveau regard sur le théorème de Pythagore et l'invariance de la somme des carrés.

Le théorème d'Eddy

La bissectrice de l'angle droit dans le triangle rectangle divise le carré construit sur l'hypoténuse en deux parties égales (fig. 1a). La figure 1b) montre une élégante preuve sans mots.

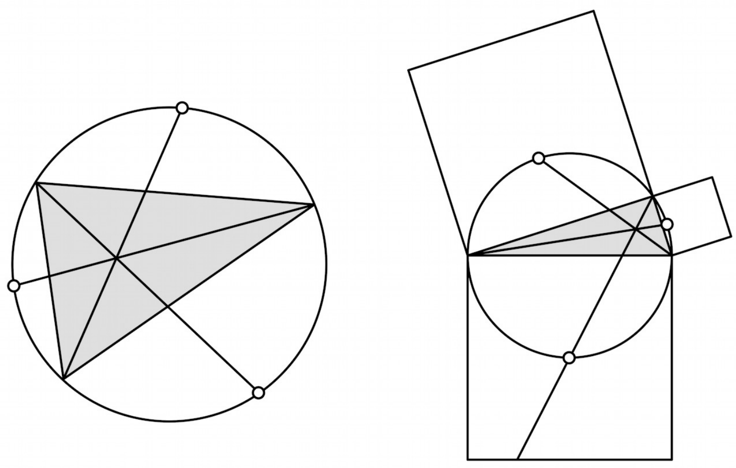


a) b)

Fig. 1: Le théorème d'Eddy. Preuve sans mots

Une preuve moins élégante

Rappelons tout d'abord les éléments suivants. Dans un triangle (quelconque), les bissectrices partagent en deux demi-arc égaux l'arc du cercle circonscrit délimité par le côté opposé (fig. 2a). Un demi-angle détermine un demi-arc de l'arc du cercle circonscrit délimité par le côté opposé.



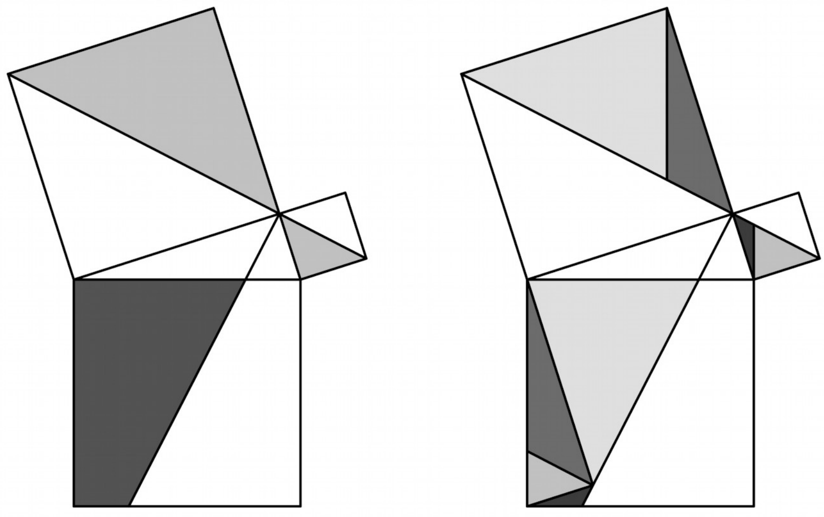
a) b)

Fig. 2: Les bissectrices divisent les arcs du cercle circonscrit en deux parties égales

Dans le cas particulier du triangle rectangle, le cercle circonscrit est le cercle de Thalès. Le milieu de l'arc délimité par l'hypoténuse (fig. 2b) (en considérant l'arc « sous » l'hypoténuse) est aussi le milieu du carré construit sur l'hypoténuse. Une droite passant par le milieu du carré divise le carré en deux parties égales. Le théorème d'Eddy est ainsi démontré.

La bissectrice extérieure

La bissectrice extérieure de l'angle droit divise les deux carrés construits sur les cathètes en parties égales. Il en résulte une «demi-» version du théorème de Pythagore (fig. 3a).



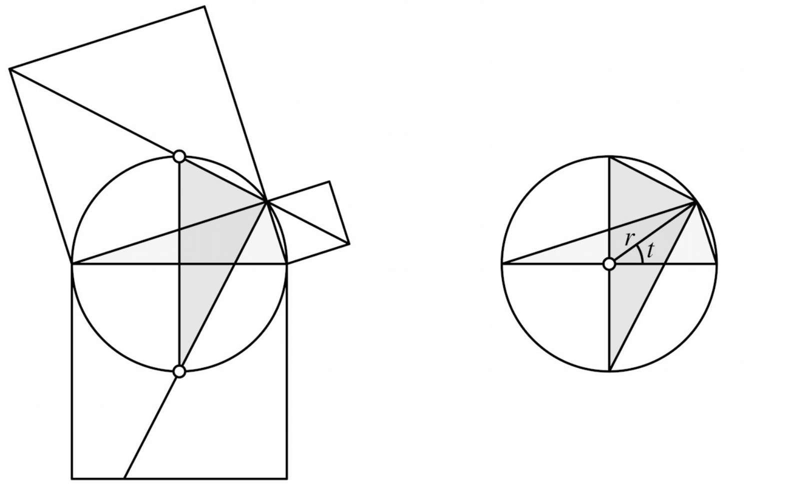
a) b)

Fig. 3: Gris foncé = gris clair. Preuve par découpage

La figure 3b) montre un découpage d'après Paul Epstein (1871-1939) et Jakob Nielsen (1890-1959). Ce découpage est fait en quatre morceaux. A ma connaissance, les découpages connus pour la «version complète» de Pythagore nécessitent cinq pièces ou plus.

Intersection avec le cercle de Thalès

La bissectrice extérieure de l'angle droit coupe le cercle de Thalès en un point situé à l'intérieur du carré construit sur la plus grande cathète. (fig. 4a). Ce point est situé sur la médiatrice de l'hypoténuse et détermine un deuxième triangle rectangle.



a) b)

Fig. 4: Intersection avec le cercle de Thalès. Deuxième triangle rectangle

Loi des aires

Soit r, le rayon du cercle de Thalès, A_1 et A_2 les aires des deux triangles rectangles. Nous établissons l'équation suivante:

$$A_1^2+A_2^2=r^4$$

Si cette formule rappelle le théorème de Pythagore, elle s'inscrit en dimension 4. La situation ne peut donc pas être illustrée de manière bidimensionnelle. Aucune preuve par découpage ne peut être établie.

Pour la démonstration de ce théorème de l'aire, nous travaillons avec l'angle t (voir fig. 4b). La longueur de l'hypoténuse du premier triangle est $2r$ et la hauteur verticale qui lui correspond est $r\sin(t)$. Donc, l'aire $A_1=r^2\sin(t)$. De manière analogue, nous obtenons $A_2=r^2\cos(t)$. Une élévation au carré et une addition permettent d'obtenir la formule de l'aire.

Bibliographie

Stocker, Hansjürg: Rezension: Wolfgang Zeuge: Nützliche und schöne Geometrie. Bulletin SSPMP/VSMP. Edition 140, mai 2019, 40.

Zeuge, Wolfgang: Nützliche und schöne Geometrie. Eine etwas andere Einführung in die Euklidische Geometrie. Springer Spektrum. 2018, ISBN 978-3-658-22832-3.

Liens

Hans Walser: Epstein-Nielsen-Zerlegungsbeweis für den Satz des Pythagoras:
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/E/Epstein-Nielsen/Epstein-Nielsen.htm