Gardons le cap

Alain Stucki, Lycée cantonal de Porrentruy

«Ce nom marin de Rhumbs *a intrigué quelques personnes,…. Comme l'aiguille du compas demeure assez constante, tandis que la route varie, ainsi peut-on regarder les caprices ou bien les applications successives de notre pensée,… comme des écarts définis par contraste avec je ne sais quelle constance dans l'intention profonde et essentielle de l'esprit,…»*

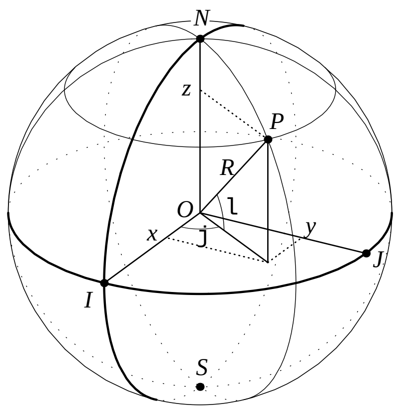
Paul Valéry, *Rhumbs*, p.9

I. Introduction

La courbe déterminée par un bateau qui suit une direction faisant un angle constant avec les méridiens s'appelle une *loxodromie* (ou rhumb). La trajectoire loxodromique reliant deux points du globe terrestre ne constitue en général pas le chemin le plus court entre ces deux points, celui-ci étant réalisé le long d'une courbe appelée *orthodromie* (un arc de grand cercle sur le globe).
Dans cet article, nous allons nous intéresser plus particulièrement à la *loxodromie*.

II. Coordonnées géographiques et géocentriques

Rappelons qu'un *méridien* est un grand cercle passant par les pôles *N* et *S* (le méridien de référence étant celui de *Greenwich*), et qu'un *parallèle* est un cercle du globe dont le plan est perpendiculaire à l'axe [*N S*] (le parallèle de référence étant l'*équateur*). L'angle φ est la *longitude, Est* ou *Ouest,* du point *P,* et l'angle λ est sa *latitude, Nord* ou *Sud.*



Coordonnées géographiques : $\boldsymbol{P(\varphi, \lambda)}$

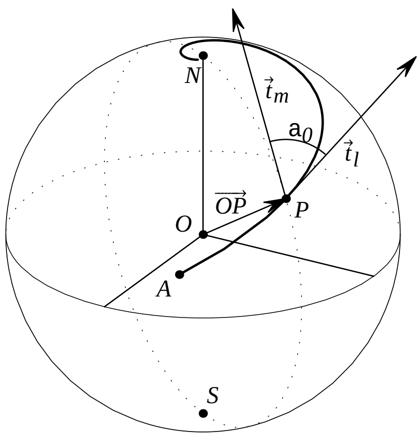
Coordonnées géocentriques : $\boldsymbol{P(x, y, z)} \iff \boldsymbol{P(R\cos(\lambda)\cos(\varphi), R\cos(\lambda)\sin(\varphi), R\sin(\lambda))}$

III. Détermination du cap

Partons d'un point A sur le globe et déplaçons-nous vers l'*Est* en maintenant le cap α_0, $0° < \alpha_0 < 90°$ (angle entre un méridien et notre direction). Sur la loxodromie ainsi définie, à chaque valeur de $\varphi \in [0, \infty[$, exprimée en radians, correspond une valeur de λ, $0 \leq \lambda = \lambda(\varphi) \leq \frac{\pi}{2}$. Le vecteur-position d'un point P de cette loxodromie s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} R\ \cos(\lambda)\cos(\varphi) \\ R\ \cos(\lambda)\sin(\varphi) \\ R\ \sin(\lambda) \end{pmatrix}$$

Appelons $\overrightarrow{t_m}$ le vecteur unitaire tangent au méridien, et $\overrightarrow{t_l}$ le vecteur unitaire tangent à la loxodromie, les sens étant définis comme le montre la figure ci-dessous



Constatons que le long d'un méridien caractérisé par φ = constante, $\overrightarrow{t_m} = \frac{1}{\|\overrightarrow{v_m}\|}\overrightarrow{v_m}$, où $\overrightarrow{v_m}$ est la vitesse le long du méridien si λ est considéré comme le *temps.* Calculons $\overrightarrow{v_m}$

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{d}{\mathrm{d}\lambda}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{d}{\mathrm{d}\lambda}\begin{pmatrix} R\ \cos(\lambda)\cos(\varphi) \\ R\ \cos(\lambda)\sin(\varphi) \\ R\ \sin(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\ \sin(\lambda)\cos(\varphi) \\ -R\ \sin(\lambda)\sin(\varphi) \\ R\ \cos(\lambda) \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} -\sin(\lambda)\cos(\varphi) \\ -\sin(\lambda)\sin(\varphi) \\ \cos(\lambda) \end{pmatrix}$$

et la norme au carré de ce vecteur

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{v_m}\|^2 &= R^2\left(\sin^2(\lambda)\cos^2(\varphi) + \sin^2(\lambda)\sin^2(\varphi) + \cos^2(\lambda)\right) \\ &= R^2\left(\sin^2(\lambda)[\cos^2(\lambda) + \sin^2(\lambda)] + \cos^2(\lambda)\right) \\ &= R^2\left(\sin^2(\lambda) + \cos^2(\lambda)\right) = R^2 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boldsymbol{\overrightarrow{t_m}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-\sin(\lambda)\cos(\varphi)} \\ \mathbf{-\sin(\lambda)\sin(\varphi)} \\ \mathbf{\cos(\lambda)} \end{pmatrix}$$

De manière analogue, $\overrightarrow{t_l} = \frac{1}{\|\overrightarrow{v_l}\|}\overrightarrow{v_l}$, où $\overrightarrow{v_l}$ est la vitesse le long de la loxodromie si φ représente le *temps*, et sans oublier que $\lambda = \lambda(\varphi)$. On a donc

$$\overrightarrow{v_l} = \frac{d}{d\varphi}\overrightarrow{OP} = \frac{d}{d\varphi}\begin{pmatrix} R\cos(\lambda)\cos(\varphi) \\ R\cos(\lambda)\sin(\varphi) \\ R\sin(\lambda) \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} -\lambda'\sin(\lambda)\cos(\varphi) - \cos(\lambda)\sin(\varphi) \\ -\lambda'\sin(\lambda)\sin(\varphi) + \cos(\lambda)\cos(\varphi) \\ \lambda'\cos(\lambda) \end{pmatrix}$$

Calculons la norme au carré de ce vecteur

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{v_l}\|^2 &= R^2\,(\lambda'^2\sin^2(\lambda)\cos^2(\varphi) + 2\lambda'\sin(\lambda)\sin(\varphi)\cos(\lambda)\cos(\varphi) + \cos^2(\lambda)\sin^2(\varphi) \\ &\quad + \lambda'^2\sin^2(\lambda)\sin^2(\varphi) - 2\lambda'\sin(\lambda)\sin(\varphi)\cos(\lambda)\cos(\varphi) + \cos^2(\lambda)\cos^2(\varphi) \\ &\quad + \lambda'^2\cos^2(\lambda)) \\ &= R^2\,(\lambda'^2\,(\sin^2(\lambda)\,[\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)] + \cos^2(\lambda)) + \cos^2(\lambda)\,[\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)]) \\ &= R^2\,(\lambda'^2 + \cos^2(\lambda))\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boldsymbol{\overrightarrow{t_l} = \frac{1}{\sqrt{\lambda'^2 + \cos^2(\lambda)}}\begin{pmatrix} -\lambda'\sin(\lambda)\cos(\varphi) - \cos(\lambda)\sin(\varphi) \\ -\lambda'\sin(\lambda)\sin(\varphi) + \cos(\lambda)\cos(\varphi) \\ \lambda'\cos(\lambda) \end{pmatrix}}$$

■ Ecrivons à présent les formes trigonométrique et analytique du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{t_l}$ et $\overrightarrow{t_m}$

1) $\overrightarrow{t_l}\cdot\overrightarrow{t_m} = \|\overrightarrow{t_l}\|\cdot\|\overrightarrow{t_m}\|\cdot\cos(\alpha_0) = \cos(\alpha_0)$, *car les vecteurs sont unitaires*

2) $$\begin{aligned}\overrightarrow{t_l}\cdot\overrightarrow{t_m} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda'^2 + \cos^2(\lambda)}}\begin{pmatrix} -\lambda'\sin(\lambda)\cos(\varphi) - \cos(\lambda)\sin(\varphi) \\ -\lambda'\sin(\lambda)\sin(\varphi) + \cos(\lambda)\cos(\varphi) \\ \lambda'\cos(\lambda) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sin(\lambda)\cos(\varphi) \\ -\sin(\lambda)\sin(\varphi) \\ \cos(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda'^2 + \cos^2(\lambda)}}\,(\lambda'\sin^2(\lambda)\cos^2(\varphi) + \cos(\lambda)\sin(\varphi)\sin(\lambda)\cos(\varphi) \\ &\qquad + \lambda'\sin^2(\lambda)\sin^2(\varphi) - \cos(\lambda)\cos(\varphi)\sin(\lambda)\sin(\varphi) \\ &\qquad + \lambda'\cos^2(\lambda)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda'^2 + \cos^2(\lambda)}}\,(\lambda'\,(\sin^2(\lambda)\,[\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)] + \cos^2(\lambda))) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda'^2 + \cos^2(\lambda)}}\cdot\lambda'\end{aligned}$$

On en déduit la relation

$$\boldsymbol{\cos(\alpha_0) = \frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda'^2 + \cos^2(\lambda)}}}$$

Exprimons ensuite $\sin(\alpha_0)$

$$\sin(\alpha_0) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha_0)} = \sqrt{1 - \frac{\lambda'^2}{\lambda'^2 + \cos^2(\lambda)}} = \sqrt{\frac{\lambda'^2 + \cos^2(\lambda) - \lambda'^2}{\lambda'^2 + \cos^2(\lambda)}} = \frac{\cos(\lambda)}{\sqrt{\lambda'^2 + \cos^2(\lambda)}}$$

et encore $\cot(\alpha_0)$

$$\cot(\alpha_0) = \frac{\cos(\alpha_0)}{\sin(\alpha_0)} = \frac{\frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda'^2 + \cos^2(\lambda)}}}{\frac{\cos(\lambda)}{\sqrt{\lambda'^2 + \cos^2(\lambda)}}} = \frac{\lambda'}{\cos(\lambda)}$$

■ L'équation $\mathbf{cot}(\boldsymbol{\alpha_0}) = \frac{\boldsymbol{\lambda'}}{\mathbf{cos}(\boldsymbol{\lambda})}$ établit un lien implicite entre α_0, φ et λ, mais la dérivée λ' est indésirable. Intégrons donc cette équation

$$\int \cot(\alpha_0)\, d\varphi = \int \frac{\lambda'}{\cos(\lambda)}\, d\varphi$$

$$\begin{aligned}
\varphi \cot(\alpha_0) &= \int \frac{\lambda'}{\cos(\lambda)}\, d\varphi = \int \frac{\lambda'}{\sin(\lambda+\frac{\pi}{2})}\, d\varphi = \int \frac{\lambda'}{2\sin\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\, d\varphi \\
&= \int \frac{\lambda'}{2\tan\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\, d\varphi \\
&= \int \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{\lambda'}{2}}{\tan\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\, d\varphi \qquad \textit{du type } \int \frac{u'}{u} = \ln|\,u\,| \\
&= \ln \left|\, \tan\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \right| + c
\end{aligned}$$

Comme $0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$, la valeur absolue est inutile, et l'égalité prend la forme

$$\boldsymbol{\varphi}\,\mathbf{cot}(\boldsymbol{\alpha_0}) = \mathbf{ln}\left(\mathbf{tan}\left(\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\right)\right) + \boldsymbol{c} \qquad (1)$$

La valeur de la constante c s'obtient en exprimant que la *loxodromi*e passe par un point $A(\varphi_A\,,\ \lambda_A)$. Par exemple, si $A(\varphi_A\,,\ \lambda_A) = I(0,\,0)$, alors $c = 0$, et le cap permettant de relier le point $I(0,\,0)$ au point $P(\varphi\,,\ \lambda)$ est donné par

$$\alpha_0 = \operatorname{arccot} \frac{\ln\left(\tan\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\varphi}$$

IV. Equation de la loxodromie

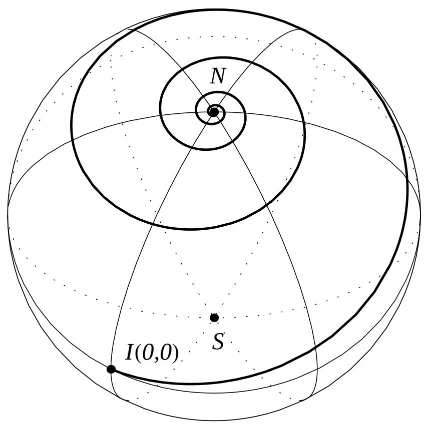
L'équation en coordonnées géographiques de la *loxodromi*e reliant A et P sur le globe s'obtient à partir de (1) en explicitant $\lambda = \lambda(\varphi)$. Nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
\varphi \cot(\alpha_0) - c &= \ln\left(\tan\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
e^{\varphi \cot(\alpha_0) - c} &= \tan\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \\
\arctan\left(e^{\varphi \cot(\alpha_0) - c}\right) &= \frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{4} \\
\arctan\left(e^{\varphi \cot(\alpha_0) - c}\right) - \frac{\pi}{4} &= \frac{\lambda}{2}
\end{aligned}$$

et finalement, l'équation de la *loxodromie*

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{2\,arctan}\left(e^{\boldsymbol{\varphi}\,\mathbf{cot}(\boldsymbol{\alpha_0}) - \mathbf{c}}\right) - \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$$

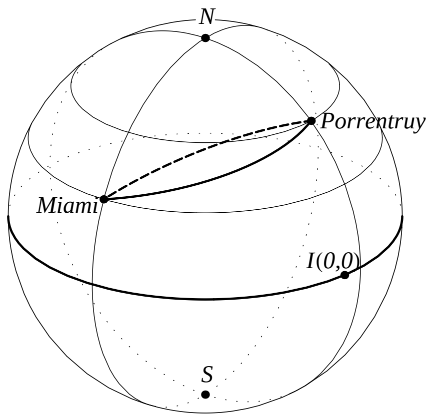
Observons que la fonction $\lambda(\varphi)$ est croissante, et que $\lim_{\varphi\to\infty} \lambda(\varphi) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour $0\,° < \alpha_0 < 90\,°$, les trajectoires loxodromiques sont des courbes qui s'enroulent sur le globe, tous les chemins menant au *pôle Nord.*



La projection *stéréographique* (de centre le *pôle Nord*) sur le plan de l'équateur d'une *loxodromie* est une *spirale logarithmique*, et sa projection *orthogonale* sur le plan de l'équateur est une *spirale de Poinsot*.

V. Un rapide coup d'oeil sur l'orthodromie

Contemplons sur un dessin la *loxodromie* (en trait plein) et l'*orthodromie* reliant la ville de Porrentruy ($7\,°\,E,\ 47\,°\,N$) à la ville de Miami ($80\,°\,O\,,\ 26\,°\,N$).



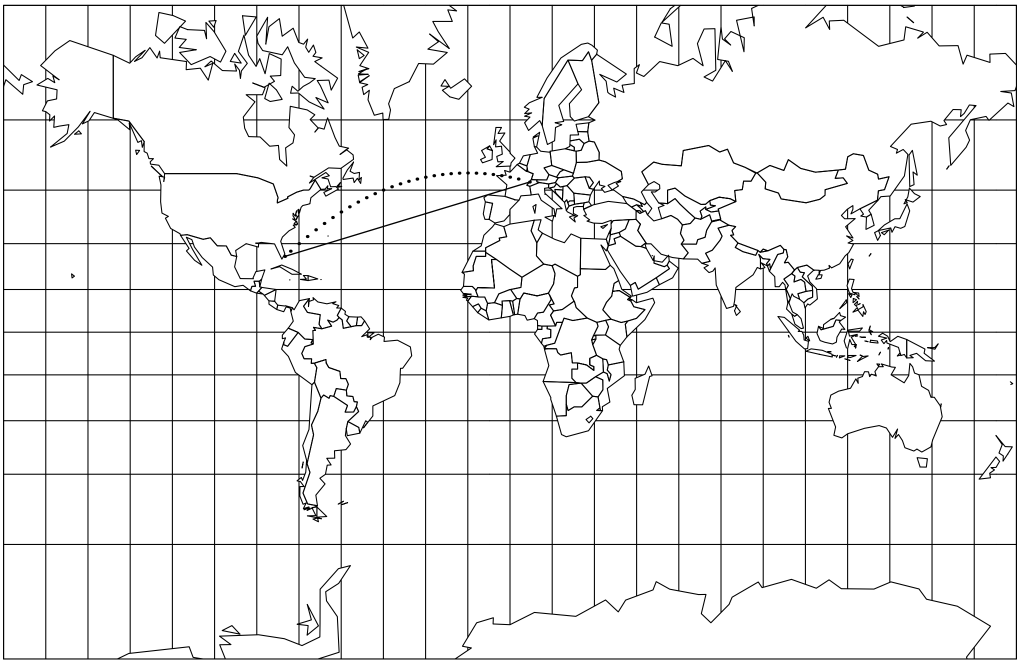
Au départ de Porrentruy, pour suivre la trajectoire loxodromique, il faut se déplacer vers des latitudes *Sud*, alors que pour suivre la trajectoire orthodromique, il faut d'abord se déplacer vers des latitudes *Nord* !

VI. Commentaires et conclusion

La Terre (modélisée simplement par une sphère) se prête bien aux mathématiques appliquées. Elle permet d'aborder, dans un cadre concret, des sujets variés de difficultés diverses.

Si l'objet traité ici fait appel à des notions d'analyse et de géométrie vectorielle dans $\boldsymbol{R}^3$, d'autres thèmes n'exigent pas de tels outils. Par exemple, il n'est pas difficile de calculer la longueur du plus court chemin entre Porrentruy et Miami. Cependant, pour réaliser ce petit projet, il faut introduire les systèmes de coordonnées géographiques et géocentriques, utiliser le théorème de Pythagore, faire de la trigonométrie et encore savoir calculer la longueur d'un arc de cercle.

De nombreuses autres pistes sont exploitables, notamment celles qui consistent à représenter la Terre sur un plan. En effet, la cartographie suscite beaucoup de problèmes intéressants, dont voici une illustration : une carte de Mercator sur laquelle sont représentées la *loxodromie* (en trait plein) et l'*orthodromie* qui relient Porrentruy à Miami. A méditer.



Références

[1] *Une approche mathématique de la cartographie*, Publication du **GEM**, Chemin du Cyclotron 2, B-1348 Louvain-La-Neuve, 2001

[2] *Géodésie générale*, Tomes 1 et 2, **J.-J. Levallois**, Ed. Eyrolles, 1970

[3] *Vermessungskunde*, **Prof. F. Chaperon**, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETHZ, 1985

[4] http://www.mathcurve.com/courbes3D/loxodromie/sphereloxodromie.shtml