Etait-ce un vendredi 13?

Alain Stucki, Lycée cantonal de Porrentruy

Préambule

Nous vous proposons le tout premier projet de mathématiques appliquées réalisé dans une classe du Lycée cantonal de Porrentruy au début de cette année scolaire.

I. Problème

Mon professeur de mathématiques est né le 13 mai 1960 (c'est vrai). Etait-ce un vendredi ?

II. Arithmétique modulo les 7 jours de la semaine

Nous sommes le vendredi 22 août 2003. Le $22+1\cdot 7=29$ août sera un vendredi, comme le $22-1\cdot 7=15$ août l'était, ainsi que le $22-2\cdot 7=8$ août et encore le $22-3\cdot 7=1$ août. En généralisant, tous les $22+k\cdot 7$ (août!), $k\in \boldsymbol{Z}$, sont des vendredis.

En mathématique, on dit que les entiers 22 et 1 sont *congrus modulo* 7, et l'on note $22\equiv 1 \pmod 7$.

On rassemble dans des *classes* tous les entiers *congrus* entre eux. Par exemple, la classe du vendredi est $\{\ldots,\ -13,\ -6,\ 1,\ 8,\ 15,\ 22,\ \ldots\}$. Dans notre exemple, il existe exactement 7 *classes* (qui correspondent aux 7 jours de la semaine) que l'on peut noter $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \text{ et } 6$, du nom du représentant positif le plus petit. La classe notée 1 est celle du vendredi, celle notée 2 est celle du samedi, etc.

L'addition de deux *classes* donne une *classe*, par exemple $6+3=2 \pmod 7$.

III. Remontons le temps

Pour résoudre notre problème nous allons calculer modulo 7 le nombre de jours qui se sont écoulés entre le 31 décembre 1899 et le 13 mai 1960 (en fait le nombre de jours de décalage).

Première étape

Le 13 mai 1960 tombe le même jour que le 6 mai car $13\equiv 6 \pmod 7$.

Retenons $\boldsymbol{D_1=6}$.

Deuxième étape

Etablissons un tableau donnant le décalage entre le j^e jour d'un mois quelconque et le j^e jour de janvier.

Sans restreindre la généralité, fixons-nous au 1er janvier. Ce mois compte 31 jours et $31 \equiv 3 \pmod 7$. Ce résultat peut être interprété comme le fait que janvier compte 4 semaines et 3 jours, et par conséquent le 1er février sera décalé de **3 jours** de la semaine par rapport au 1er janvier.
Prenons un mois de février à 28 jours. Comme $28 \equiv 0 \pmod 7$, le mois de février n'induit pas de décalage supplémentaire. Le 1er mars est donc décalé de **3 jours** par rapport au 1er janvier.
Mars a 31 jours et $31 \equiv 3 \pmod 7$. En ajoutant les décalages précédents, on obtient le 1er avril décalé de **6 jours** par rapport au 1er janvier.
Avril est un mois de 30 jours et $30 \equiv 2 \pmod 7$. Décalage pour le 1er mai : $2 + 6 = 8 \equiv \mathbf{1} \pmod 7$.

Le tableau des décalages est le suivant (à compléter)

Janv	Fév	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil	Août	Sept	Oct	Nov	Déc
0	3	3	6	1							

Retenons $\boldsymbol{D_2 = 1}$ pour le mois de mai.

Troisième étape

Chaque année (en la supposant non bissextile) le calendrier avance d'un jour puisque
$365 \equiv 1 \pmod 7$.

Retenons $\boldsymbol{D_3 = 4}$ car $60 \equiv 4 \pmod 7$.

Quatrième étape

Lors des années bissextiles, le calendrier avance d'un jour supplémentaire car $366 \equiv 2 \pmod 7$. Toutes les années multiples de 4, à l'exception de 1900, furent bissextiles.

Retenons $\boldsymbol{D_4 = 1}$ car $60 \div 4 = 15 \equiv 1 \pmod 7$.

Remarque : lorsque le quotient $\mathrm{AA} \div 4$ est un code à virgule, il faut continuer avec la partie entière.

Cinquième étape

Il faut examiner de plus près les mois de janvier et de février des années bissextiles. En effet, en effectuant l'opération $60 \div 4 = 15 \equiv 1 \pmod 7$, nous prenons en compte 15 décalages dus aux années bissextiles. Mais si la date traitée est en janvier ou février, le dernier décalage ne s'est pas encore produit, et il faut par conséquent soustraire 1 jour.

Retenons $\boldsymbol{D_5 = 0}$ car il ne s'agit pas de janvier ou février d'une année bissextile, sinon $\boldsymbol{D_5 = -1}$.

Dernière étape

La somme $S = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 \pmod 7$ fournit le décalage du 13 mai 1960 par rapport au 31 décembre 1899. Sachant que ce jour fut un dimanche, compléter le tableau de concordance ci-dessous qui donne le jour de la semaine correspondant à S.

S = 1	S = 2	S = 3	S = 4	S = 5	S = 6	S = 0

Calculons $S = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 = 6 + 1 + 4 + 1 + 0 = 12 \equiv 5 \pmod 7$.

Conclusion :

Exercices

1) Vérifier le jour de votre naissance à l'aide du schéma précédent.

2) Ecrire un *algorithme* (suite d'opérations menant à un résultat) pour déterminer le jour correspondant à une date donnée sous la forme JJ MM 19AA.

3) Ecrire *l'algorithme* précédent sous forme de module à l'aide du logiciel *Mathematica*®.

4) Calculer à l'aide de votre programme le jour de la semaine du 31 décembre 1999.

5) Trouver la correction à apporter pour généraliser aux années 20AA.

6) Modifier votre module pour qu'il fonctionne également avec les années 20AA .

Réponses à quelques questions

1) Tableau des décalages

Janv	Fév	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil	Août	Sept	Oct	Nov	Déc
0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

En apprenant par coeur la liste 033 614 625 035, il est tout à fait possible de déterminer de tête le jour correspondant à une date.

2) Tableau de concordance

S = 1	S = 2	S = 3	S = 4	S = 5	S = 6	S = 0
Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche

3) Module pour les années 19AA

```
jour[JJ_, MM_, a_] :=
  Module[{AA, S, D1, D2, D3, D4, D5},
   AA = Mod[a, 100];
   D1 = Mod[JJ, 7];
   decalage = {0, 3, 3, 6, 1, 4, 6, 2, 5, 0, 3, 5};
   D2 = decalage[[MM]];
   D3 = Mod[AA, 7];
   D4 = Mod[Quotient[AA, 4], 7];
   If[(Mod[AA, 4] == 0 && a ≠ 1900 && (MM == 1 || MM == 2)), D5 = -1, D5 = 0];
   S = Mod[D1 + D2 + D3 + D4 + D5, 7];
   semaine = {"dimanche", "lundi",
     "mardi", "mercredi", "jeudi", "vendredi", "samedi"};
    mois = {"janvier", "février", "mars", "avril", "mai", "juin",
     "juillet", "août", "septembre", "octobre", "novembre", "décembre"};
    Print["Le ", JJ, " ", mois[[MM]], " ", a, " était un ", semaine[[S + 1]]]
  ];
```

Exemple d'utilisation

```
jour[31, 12, 1999]

Le 31 décembre 1999 était un vendredi
```

4) Correction pour les années 20AA

Nous venons de déterminer que le 31 décembre 1999 était un vendredi, alors que le 31 décembre 1899 était un dimanche. Il faut donc tenir compte d'un décalage de 2 jours par rapport à la date de référence. Cependant, la commande `jour[1,1,2000]` retourne dimanche au lieu de samedi, donc 1 seul jour de décalage. L'explication est que, dans notre module, le calcul de D_4 ne tient pas compte du fait que 2000 est une année bissextile (1900 ne l'était pas). Le jour de décalage qui aurait dû être ajouté n'a pas été comptabilisé. Par conséquent, en soustrayant 1 à la somme S, l'algorithme est ajusté pour les années 20AA.