Courbure d'un arc de Bézier

Entrées dans mon enseignement des mathématiques appliquées il y a une quinzaine d'années, les cubiques de Bézier d'abord envisagées comme courbes d'interpolation ont pris une coloration plus géométrique grâce à De Casteljau. Dans cette ligne d'évolution, je présente ci-dessous une construction géométrique donnant centre et rayon de courbure d'un arc de Bézier.
Partant de la recherche du centre de courbure d'une courbe paramétrée, je décris une construction géométrique du cercle osculateur, puis je termine par un algorithme réalisé avec le logiciel Cabri.

Marcel-Yves Bachmann

Courbe paramétrée

Lorsque le temps t varie d'une valeur initiale à une valeur finale, un point mobile P se déplace dans le plan. Relativement à un repère orthonormé, la position de P est donnée à chaque instant par ses deux coordonnées x et y qui sont des fonctions plusieurs fois dérivables du temps.

La donnée des fonctions x et y et l'égalité $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ décrivent ainsi la trajectoire de P.

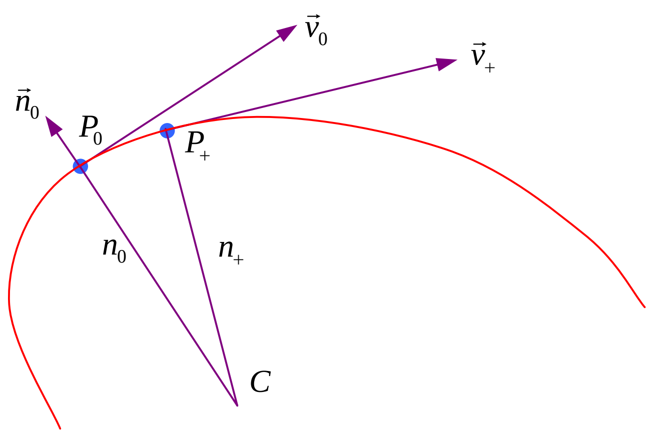
Vitesse et accélération

Par dérivation, on obtient deux vecteurs, la vitesse $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$ et l'accélération $\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}$.

Il est facile de donner une interprétation du vecteur $\vec{v}$. Sa longueur est la notion habituelle de la vitesse, sa direction est celle de la tangente à la trajectoire et son sens indique la future position de P. L'interprétation du vecteur $\vec{a}$ est plus délicate. Elle passe par une décomposition en une composante parallèle à $\vec{v}$, l'accélération tangentielle, et une composante perpendiculaire à $\vec{v}$, l'accélération normale. L'accélération tangentielle porte la notion usuelle d'accélération positive ou négative. L'accélération normale est liée à la manière dont la trajectoire est courbée. Pour préciser cette interprétation, on calcule le centre et le rayon du cercle qui *épouse* le mieux possible la courbe en un de ses points. Ce cercle est dit osculateur.

Détermination du cercle osculateur

Notons P_0, $\vec{v}_0$ et $\vec{a}_0$ la position, la vitesse et l'accélération du point mobile au temps t_0. De manière analogue, notons P_+, $\vec{v}_+$ et $\vec{a}_+$ les mêmes caractéristiques au temps $t_+ = t_0 + \Delta t$.



Si l'arc de P_0 à P_+ était un arc de cercle, le centre se trouverait à l'intersection des deux normales n_0 et n_+ indiquées sur le dessin.

En notant $\vec{n}_0$ un vecteur-unité perpendiculaire à $\vec{v}_0$, les points P de la normale n_0 respectent la condition $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + m\,\vec{n}_0$.

De leur côté les points P de la normale n_+ sont caractérisés par l'égalité $\overrightarrow{P_+P} \cdot \vec{v}_+ = 0$.
En calculant l'intersection de ces normales, on trouve la valeur du paramètre m qui permet d'atteindre le point C ; elle vaut $m = \dfrac{\overrightarrow{P_0P_+} \cdot \vec{v}_+}{\vec{n}_0 \cdot \vec{v}_+}$.

En passant à la limite lorsque Δt tend vers zéro, le point C devient le centre du cercle osculateur et le nombre m devient au signe près le rayon de ce cercle.

Comme $\overrightarrow{P_0P_+} \cong \Delta t\,\vec{v}_0$ et $\vec{v}_+ \cong \vec{v}_0 + \Delta t\,\vec{a}_0$,

on a $\overrightarrow{P_0P_+} \cdot \vec{v}_+ \cong \Delta t\,(\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0) + (\Delta t)^2 (\vec{v}_0 \cdot \vec{a}_0)$, puis $\vec{n}_0 \cdot \vec{v}_+ \cong \Delta t\,(\vec{n}_0 \cdot \vec{a}_0)$ et enfin

$m = \dfrac{\overrightarrow{P_0P_+} \cdot \vec{v}_+}{\vec{n}_0 \cdot \vec{v}_+} \cong \dfrac{(\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0) + \Delta t(\vec{v}_0 \cdot \vec{a}_0)}{\vec{n}_0 \cdot \vec{a}_0}$ dont la limite est $m_0 = \dfrac{\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0}{\vec{n}_0 \cdot \vec{a}_0}$

On a obtenu ainsi le centre C_0 et le rayon r_0 du cercle osculateur

$$\boxed{\overrightarrow{OC_0} = \overrightarrow{OP_0} + \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0}{\vec{n}_0 \cdot \vec{a}_0}\,\vec{n}_0 \qquad \text{et} \qquad r_0 = \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0}{\left|\vec{n}_0 \cdot \vec{a}_0\right|}}$$

Le produit scalaire $\vec{n}_0 \cdot \vec{a}_0$ donne au signe près l'accélération normale, tandis que $\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0$ donne le carré de la vitesse. Le rayon du cercle osculateur s'obtient donc en divisant le carré de la vitesse par la grandeur de l'accélération normale. Ce calcul permet encore d'interpréter la grandeur de l'accélération normale comme le rapport entre le carré de la vitesse et le rayon de courbure.

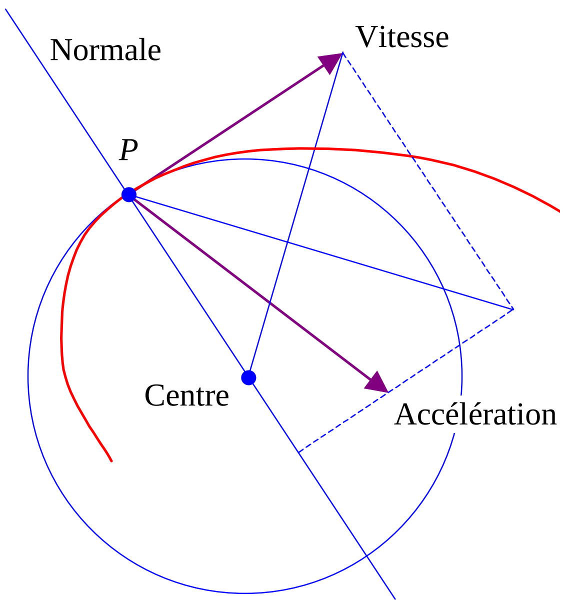
Construction du cercle osculateur

On vient de le voir, le rayon de courbure r se calcule à partir de la vitesse v et de l'accélération normale a_n en utilisant l'égalité $\dfrac{r}{v} = \dfrac{v}{a_n}$. Cette égalité de rapports fournit une construction du cercle osculateur basée sur une similitude.

A partir des vecteurs vitesse et accélération attachés en un point P de la courbe, on trace

- la normale à la courbe,
- la projection de l'accélération sur cette normale,
- un rectangle construit sur vitesse et accélération normale,
- la diagonale issue de P dans ce rectangle,
- la perpendiculaire à cette diagonale passant par la pointe de la vitesse.

Cette dernière droite coupe la normale au centre du cercle osculateur.

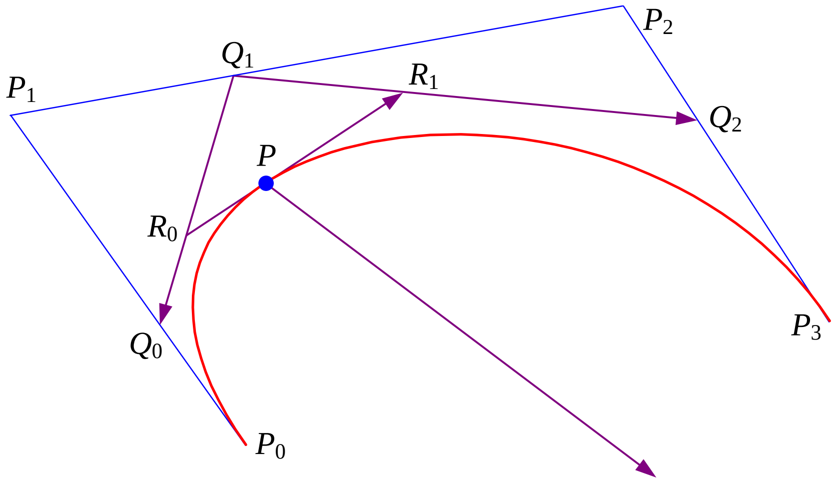


Courbure d'un arc de Bézier

Par définition analytique, l'arc de Bézier contrôlé par 4 points P_0, P_1, P_2, P_3 du plan est la trajectoire des points P donnés par l'expression

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)^3\overrightarrow{OP_0} + 3(1-t)^2 t\,\overrightarrow{OP_1} + 3(1-t)t^2\overrightarrow{OP_2} + t^3\overrightarrow{OP_3}\ ,\ t \text{ variant entre 0 et 1 .}$$

Par dérivation de polynômes, il est facile de calculer les vecteurs vitesses et accélération en P. L'ingénieur De Casteljau a proposé une construction géométrique qui permet d'obtenir graphiquement le point P ainsi que les vecteurs vitesse et accélération. Un nombre t étant donné entre 0 et 1, on partage des segments successifs toujours dans le même rapport t.



On a par exemple placé Q_0 de sorte que $\overrightarrow{P_0Q_0} = t\,\overrightarrow{P_0P_1}$ et R_0 de sorte que $\overrightarrow{Q_0R_0} = t\,\overrightarrow{Q_0Q_1}$.
Des calculs élémentaires permettent de vérifier que

- le point P ainsi construit est celui donné par la formule analytique,
- le vecteur $\overrightarrow{R_0R_1}$ est le tiers du vecteur vitesse : $\overrightarrow{R_0R_1} = \frac{1}{3}\vec{v}$
- le vecteur $\overrightarrow{Q_1Q_0} + \overrightarrow{Q_1Q_2}$ est le sixième du vecteur accélération : $\overrightarrow{Q_1Q_0} + \overrightarrow{Q_1Q_2} = \frac{1}{6}\vec{a}$

La construction du cercle osculateur recourt à la vitesse et à l'accélération; elle repose sur l'égalité $r = v^2/a_n$. Si l'on remplace v par son tiers, on doit remplacer a_n par son neuvième ou par les deux tiers de son sixième. La construction décrite précédemment peut donc se faire directement à partir des vecteurs $\overrightarrow{R_0R_1}$ et $\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{Q_1Q_0} + \overrightarrow{Q_1Q_2}\right)$. Elle a été réalisée avec le logiciel Cabri. La figure dynamique qui en résulte peut être téléchargée depuis le site de la CRM ; elle fournit notamment l'image ci-dessous.