Equation complexe d'une affinité

Jean Piquerez

Collège et Ecole de commerce Madame de Staël

Il est manifeste que certains problèmes proposés notamment dans les livres français de Terminale S sont générés par une théorie générale que seul le lecteur curieux, tenace et compétent sera à même de retrouver de lui-même, tant il est vrai que certains sujets sont trop ardus pour être abordés par les lycéens et trop banals pour figurer dans la littérature universitaire. Avec un peu de chance, ils feront l'objet d'un thème choisi ou d'un exercice guidé dans un ouvrage à destination des élèves des classes préparatoires aux grandes écoles, et encore ! En voici un exemple typique :

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$$

Préciser l'application $f \circ f$ et déterminer les ensembles
$I_f = \{z \in \mathbb{C} | f(z) = z\}$ et $N_f = \{z \in \mathbb{C} | f(z) = 0\}$
Suivent quelques questions concernant la nature géométrique de l'application F du plan dans lui-même associée à f.

Une question saute aux yeux du mathématicien (enfin, je l'espère !) : quelles conditions faut-il sur a et sur b pour que $f(z) = az + b\bar{z}$ se trouve correspondre à une projection (dans le cas présent) ou, plus généralement, à une affinité linéaire d'axe, de direction et de rapport donnés ? C'est à cette dernière question que je vais m'intéresser.

Avant toute chose, il s'agit déjà d'exprimer le lien existant entre les matrices $(2,2)$ des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ et les fonctions $f : z \to az + b\bar{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

$$az + b\bar{z} = \underbrace{(\alpha+\gamma)x + (\delta-\beta)y}_{x'} + i \cdot \underbrace{[(\beta+\delta)x + (\alpha-\gamma)y]}_{y'}$$

en ayant posé $a = \alpha + i\beta$, $b = \gamma + i\delta$ et $z = x + iy$.
Matriciellement, on a donc :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \delta-\beta \\ \beta+\delta & \alpha-\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(a+b) & -\Im(a-b) \\ \Im(a+b) & \Re(a-b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ainsi la matrice associée à f est $\begin{pmatrix} \Re(a+b) & -\Im(a-b) \\ \Im(a+b) & \Re(a-b) \end{pmatrix}$

Inversement, soit $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Alors la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée est définie par :

$$f(z) = (\alpha + i\beta)z + (\gamma + i\delta)\bar{z}, \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ccc} \alpha = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} & , & \beta = \frac{a_{21}-a_{12}}{2} \\ \gamma = \frac{a_{11}-a_{22}}{2} & , & \delta = \frac{a_{21}+a_{12}}{2} \end{array}$$

Envisageons maintenant une affinité F d'axe OA, de direction OB et de rapport k ($OB \nparallel OA$). Dans la base $(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b})$ sa matrice est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

On observe que $\det(F) = k$ et $Tr(F) = k + 1 = \det(F) + 1$.

Inversément, comme la trace et le déterminant sont des invariants, toute matrice possédant les caractéristiques précédentes et distincte de l'identité sera soit celle d'une affinité, dans le cas de 2 valeurs propres distinctes, c'est-à-dire lorsque $k \neq 1$, soit celle d'une transvection (affinité de direction parallèle à l'axe), dans le cas d'une valeur propre double, c'est-à-dire lorsque $k = 1$.

Supposons par la suite que $k \neq 1$.

On est dès lors en mesure de déterminer les conditions sur a et b pour que $f(z) = az + b\bar{z}$ soit l'équation complexe d'une affinité linéaire classique (de direction non parallèle à l'axe). En effet, il suffit dans la matrice $\begin{pmatrix} \Re(a+b) & -\Im(a-b) \\ \Im(a+b) & \Re(a-b) \end{pmatrix}$ de poser $\det(f)+1 = Tr(f) \neq 2$.

Il vient donc :

$$\Re(a+b)\Re(a-b) + \Im(a+b)\Im(a-b) + 1 = \Re(a+b) + \Re(a-b) = 2\Re(a) = a + \bar{a} \neq 2$$

Or, $\Re(a+b)\Re(a-b) + \Im(a+b)\Im(a-b) \; =$

$$\begin{aligned} &= \frac{(a+b+\bar{a}+\bar{b})(a-b+\bar{a}-\bar{b})}{4} + \frac{(a+b-\bar{a}-\bar{b})(a-b-\bar{a}+\bar{b})}{4i^2} \\ &= \frac{(a+\bar{a})^2 - (b+\bar{b})^2 - (a-\bar{a})^2 + (b-\bar{b})^2}{4} \\ &= a\bar{a} - b\bar{b} = |a|^2 - |b|^2 \end{aligned}$$

D'où les conditions suivantes :

$$\left.\begin{array}{c} a\bar{a} - a - \bar{a} + 1 = b\bar{b} \\ \Re(a) \neq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} |a-1| = |b| \\ \Re(a) \neq 1 \end{array}\right\}$$

Ainsi, toute fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$f(z) = az + b\bar{z}$ avec $\Re(a) \neq 1$ et $|1-a| = b$ est une affinité :

- de rapport $k = |a|^2 - |b|^2 = a + \bar{a} - 1$
- d'axe $\{z \in \mathbb{C} | f(z) = z\}$
- de direction $\{z \in \mathbb{C} | f(z) = kz = (|a|^2 - |b|^2)z\}$.

Ainsi, si $f(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$, alors $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{i}{2}$ et on vérifie que

$$k = |\frac{1}{2}|^2 - |\frac{i}{2}|^2 = 0, \quad a + \bar{a} - 1 = 0 \text{ et } \Re(a) \neq 1$$

Il s'agit donc bien d'une projection.
L'axe se détermine de la manière suivante :

$$f(z) = z \Leftrightarrow az + b\bar{z} = z \Leftrightarrow (1-a)z = b\bar{z}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\arg(1-a) + \arg(z) &= \arg(b) - \arg(z) \quad \mod 2\pi \\
2\arg(z) &= \arg\left(\frac{b}{1-a}\right) \quad \mod 2\pi \\
\arg(z) &= \frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{1-a}\right) \quad \mod \pi
\end{aligned}$$

Dans l'exemple initial, on a donc :

$$\arg(z) = \frac{1}{2}\arg(i) = \frac{\pi}{4} \quad \mod \pi$$

Pour déterminer la direction on procède de même :

$$f(z) = kz \Leftrightarrow az + b\bar{z} = kz = (a + \bar{a} - 1)z \Leftrightarrow b\bar{z} = (\bar{a} - 1)z$$

Donc

$$\begin{aligned}
\arg(b) - \arg(z) &= \arg(\overline{a-1}) + \arg(z) \quad \mod 2\pi \\
2\arg(z) &= \arg(b) - \arg(\overline{a-1}) \quad \mod 2\pi \\
2\arg(z) &= \arg(b) + \arg(a-1) = \arg(b\cdot(a-1)) \quad \mod 2\pi \\
\arg(z) &= \frac{1}{2}\arg(b(a-1)) \quad \mod \pi
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{i}{2}$, il vient : $\arg(z) = \frac{1}{2}\arg(\frac{-i}{4}) = \frac{-\pi}{4} \quad \mod \pi$

On en conclut que $f : z \to az + b\bar{z}$ est une projection orthogonale sur la bissectrice du premier quadrant.