Oral de maturité et ... effectifs de classe

Jean Piquerez

Collège et Ecole de commerce Madame de Staël

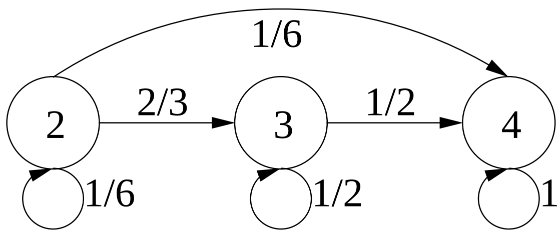
Dans mon établissement scolaire il est courant que l'Oral s'étale sur deux journées, la classe étant partagée en deux demi-groupes d'effectifs à peu près égaux. Il va de soi que, par souci d'équité, toutes les questions tirées le premier jour sont reconduites le lendemain. Quel professeur n'a pas secrètement souhaité que toutes les questions qu'il propose aient été tirées au moins une fois.

Avec 24 élèves et autant de questions, deux groupes de 12 élèves auront évidemment une probabilité infime de tirer chaque question exactement une fois, si l'on remet en jeu pour le second groupe les 12 questions tirées par le premier groupe.
Avec 36 élèves et toujours 24 questions, en considérant trois groupes de 12 élèves et en adoptant la même stratégie, cette probabilité augmente évidemment.

Je m'intéresse alors à la question suivante :
$2n$ questions sont proposées lors d'un Oral. Après le passage de n élèves, on remet les n questions tirées avec les n questions non tirées. Combien de groupes de n élèves doivent en moyenne passer pour que les $2n$ questions aient toutes été tirées au moins une fois ?

C'est typiquement un problème de chaînes de Markov avec élément absorbant .

Raisonnons d'abord avec $n = 2$: on a donc 4 questions ; on fait passer des élèves par groupes de 2, en remettant les 2 questions tirées après le passage de chaque groupe. Combien faut-il en moyenne de groupes de 2 élèves pour que les 4 questions aient été tirées au moins une fois ?
On peut alors faire le schéma suivant :



En effet, les états, notés i, sont définis comme suit : "$2 + i$" questions ont déjà été tirées ($i = 0, 1, 2$).
Ainsi p_{ik} représente la probabilité conditionnelle que $2 + k$ questions soient tirées après le passage d'un nouveau groupe de 2 élèves, sachant que $2 + i$ questions ont déjà été tirées jusqu'alors.
Ainsi $p_{00} = \frac{1}{6}$, probabilité que, parmi 4 questions, on tire à nouveau les 2 questions déjà tirées.
De même, $p_{01} = \frac{2}{3}$, car elle indique le passage de l'état ② à l'état ③ ; et ainsi de suite.

A l'évidence $p_{22} = 1$, car 4 est un état absorbant.

Notons encore M_i la durée de parcours de l'état 1 à l'état absorbant 4, c'est-à-dire le nombre de transitions jusqu'à l'absorption en partant de l'état 1.
On note $E(M_i) = m_i$
Naturellement $m_4 = 0$.
On s'intéresse ici à m_2 , car le nombre moyen N de groupes de deux élèves devant passer pour que les 4 questions soient tirées est donnée par : $N = 1 + m_2$.
On applique alors le théorème suivant :

Théorème :

Les quantités m_i sont les solutions du système d'équations
$m_i = 1 + \sum\limits_{k \in S'} p_{ik} m_k$
où i est un état non absorbant et S' l'ensemble de tous les états non absorbants.

(Pour une démonstration de ce théorème, voir Alain Ruegg, Presses Polytechniques Romandes, *Chaînes de Markov* , p. 32)

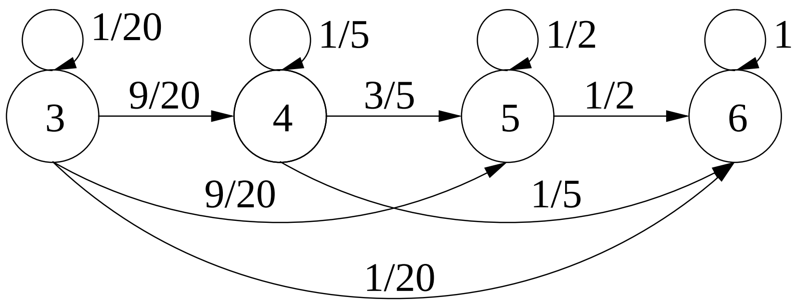
Dans le cas présent, on a donc :

$m_2 = 1 + \frac{1}{6} m_2 + \frac{2}{3} m_3$

$m_3 = 1 + \frac{1}{2} m_3$

On trouve : $m_2 = 2,8$ donc $N = 1 + m_2 = 3,8$.

Pour le cas $n = 3$, on a :



En appliquant à nouveau le théorème on a :

$$\left.\begin{array}{l} m_5 = \frac{1}{2} m_5 + 1 \\ m_4 = \frac{1}{5} m_4 + \frac{3}{5} m_5 + 1 \\ m_3 = \frac{1}{20} m_3 + \frac{9}{20} m_4 + \frac{9}{20} m_5 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow m_3 = \frac{251}{76}$$

Donc l'espérance cherchée est : $N = 1 + m_3 = 4 + \frac{23}{76} \approx 4,3$

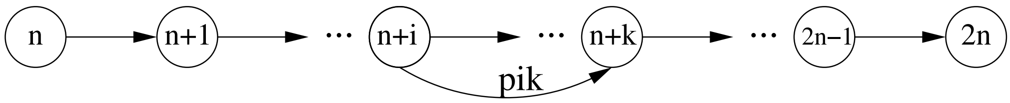
Avec $n = 4$: $N \approx 4,66$
$n = 5$: $N \approx 4,93$
$n = 20$: $N \approx 6,76$
$n = 50$: $N \approx 8,03$

Je subodore que

$$\lim_{n \to +\infty} N = +\infty$$

sans toutefois arriver à le prouver.

<u>Généralisation</u>



p_{ik} est la probabilité de passer de l'état ⓘ ($n+i$ questions déjà tirées) à l'état ⓚ ($n+k$ questions tirées,$k \geq i$).
Cette probabilité est donnée par : $\frac{\binom{n-i}{k-i}\binom{n+i}{n+i-k}}{\binom{2n}{n}} = p_{ik}$
On a alors à résoudre le système :

$$\begin{array}{lr}
m_n = & 1 + p_{00}m_n + p_{01}m_{n+1} + p_{02}m_{n+2} + ... + p_{0(n-1)}m_{2n-1} \\
m_{n+1} = & 1 + p_{11}m_{n+1} + p_{12}m_{n+2} + ... + p_{1(n-1)}m_{2n-1} \\
.... & \\
m_{2n-2} = & 1 + p_{n-2,n-2}m_{2n-2} + p_{n-2,n-1}m_{2n-1} \\
m_{2n-1} = & 1 + p_{n-1,n-1}m_{2n-1}
\end{array}$$

Matriciellement on a :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_n \\ m_{n+1} \\ \vdots \\ m_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $a_{ii} = 1 - \frac{\binom{n+i-1}{n}}{\binom{2n}{n}}$,
$a_{ij} = -\frac{\binom{n-i+1}{j-i}\binom{n+i-1}{n+i-j}}{\binom{2n}{n}}$, $(i < j)$
et $a_{ij} = 0$ avec $i > j$

$$\begin{pmatrix} m_n \\ m_{n+1} \\ \vdots \\ m_{2n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a_{ii}} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a_{ii}} \sum_{j=1}^{n} b_{1j}$$

$$\boxed{\Rightarrow N = 1 + \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{1j}}{\prod_{i=1}^{n} a_{ii}}}$$

Pour $n = 12$, l'ordinateur livre $\approx 6,07$.
Ainsi, il faudrait en moyenne $12 \cdot 6,07 \approx 73$ (en nombre entier d'élèves) élèves pour que chacune des 24 questions proposées soit tirée au moins une fois en admettant qu'on fasse

passer les élèves par groupes de 12 et qu'à la fin de chaque groupe on remette les 12 questions tirées.
Comme quoi les caprices d'un matheux pourraient vite provoquer la foudre des syndicats.
On pourrait plutôt proposer que les élèves passent environ 6 fois l'examen pour que toutes les questions soient tirées. On provoquerait alors l'ire des élèves et celle des syndicats aussi, vu l'allongement des temps d'examen.