MATHÉMATIQUES STANDARD

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrages et matériels autorisés :	• calculatrice
	• formulaire
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Problème 1 (15 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{4x-10}{4-x^2}$$

1.1 Etudier cette fonction sans calculer la dérivée seconde et représenter sa courbe dans un repère orthonormé (unité : 2 carrés).

1.2 Vérifier qu'on peut aussi écrire f comme suit:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{9}{x+2}\right)$$

1.3 Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de f et l'axe des x sur l'intervalle $[\,-1\,;1\,]$.

Problème 2 (8 points)

On considère le graphe de la fonction f définie par

$$f(x) = e^x$$

et la tangente t à ce graphe au point d'abscisse a, avec $a \in [\,0\,;1\,]$.

2.1 Représenter la situation graphiquement.

2.2 Déterminer l'équation de t.

2.3 Montrer que l'aire S du domaine limité par le graphe de f, la tangente t et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est donnée en fonction de a par

$$S(a) = e^a\left(a - \frac{3}{2}\right) + e - 1$$

2.4 Calculer la valeur de a pour laquelle $S(a)$ est minimale.

Problème 3 (15 points)

- Le problème doit être résolu analytiquement et non pas graphiquement. Tous les calculs doivent figurer sur la feuille !
- Les divers élements doivent être représentés dans un repère orthonormé (unité : 2 carrés).

On considère le cercle Γ de centre $C(-2\,;-3)$ et de rayon $r = 5$ et le point $A(8\,;2)$. Du point A, on mène les tangentes t_1 et t_2 à Γ et on note T_1 et T_2 les points de tangence respectifs.

3.1 Déterminer les équations des tangentes t_1 et t_2.

3.2 Déterminer le rayon et le centre du cercle circonscrit au triangle AT_1T_2.

3.3 On considère un point M de coordonnées positives et situé sur le cercle Γ. L'aire du triangle T_1T_2M vaut 10. Calculer les coordonnées de M.

Problème 4 (15 points)

Trois élèves X, Y et Z reçoivent chacun une urne :

- X reçoit l'urne U_X qui contient 7 boules vertes et 3 boules rouges
- Y reçoit l'urne U_Y qui contient 8 boules vertes et 2 boules rouges
- Z reçoit l'urne U_Z qui contient 9 boules vertes et 1 boule rouge

Les trois parties du problème sont indépendantes l'une de l'autre !

4.1 X tire, successivement et avec remise, 8 boules de U_X.

4.1.1 Quelle est la probabilité que la première et la dernière boule tirée soient de la même couleur?

4.1.2 Quelle est la probabilité qu'il y ait autant de boules rouges que de vertes?

4.2 X tire simultanément 2 boules de U_X et Y fait de même avec U_Y. Quelle est la probabilité qu'un seul des deux élèves ait obtenu 2 boules de couleurs différentes?

4.3 X, Y et Z jouent au jeu suivant: chacun extrait 1 boule de son urne; si l'un des trois a tiré une boule de couleur différente de celle des deux autres, il est déclaré vainqueur.

4.3.1 Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas de vainqueur?

4.3.2 Sachant qu'il y a un vainqueur, quelle est la probabilité que ce soit X?