LYCÉE DENIS-DE-ROUGEMONT
Neuchâtel et Fleurier

EXAMEN DE MATURITÉ
Mathématiques de niveau I
Session 2008

Problème 1 (poids 2)

Première partie

On considère la fonction $f : x \mapsto y = \dfrac{ax^2+bx+c}{(x+d)^2}$ où a, b, c et d sont des nombres réels.

a) Le graphe de f présente une asymptote verticale d'équation $x=-1$ et une asymptote horizontale d'équation $y=3$; de plus, f s'annule en $x=-4$ et son graphe passe par l'origine. Trouver a, b, c et d en justifiant chaque réponse.

On considère maintenant la fonction

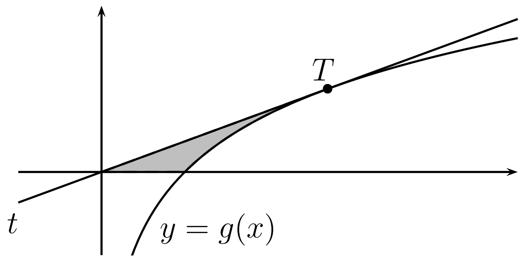
$$f : x \longmapsto y = \frac{3x^2+12x}{(x+1)^2}.$$

b) Montrer que la derivée de f est $f'(x) = \dfrac{6(2-x)}{(x+1)^3}$.

c) Etudier complètement la fonction f sans oublier de calculer les coordonnées des éventuels points d'intersection du graphe et de son asymptote horizontale.

Deuxième partie

Sur le graphique ci-dessous sont représentés le graphe de la fonction $g : x \mapsto y = \ln(x)$ et sa tangente t au point T d'abscisse e.



d) Trouver l'équation de la tangente t et vérifier que t passe par l'origine.

e) Calculer l'aire du domaine gris.

Problème 2 (poids 2)

On considère le triangle de sommets $A(2; 3; 2)$, $B(-2; 3; 6)$ et $C(6; -5; 2)$, ainsi que le plan $\pi : 2x + y + 2z - 7 = 0$.

a) Calculer l'aire du triangle ABC.

b) Trouver une équation cartésienne du plan μ contenant le triangle ABC.

c) Expliquer pourquoi les plans μ et π sont strictement parallèles, puis calculer la plus courte distance qui les sépare.

d) Calculer l'angle aigu formé par l'axe des x et le plan π.

e) Avec deux couleurs différentes, représenter sur le quadrillage donné en annexe

- le plan π
- la droite d constituée des points de π dont la cote (hauteur) vaut 2.

f) Trouver des équations paramétriques de la droite d.

g) Vérifier par calcul que la droite d passe par les points $D(20; -37; 2)$ et $E(-10; 23; 2)$.

Si des équations paramétriques de d n'ont pas pu être trouvées au point f), considérer pour la suite la droite d qui passe par les points D et E donnés ci-dessus.

h) Trouver l'équation d'une sphère $\mathcal{S}$ centrée sur la droite d et qui est tangente à la fois au mur et à la paroi. Combien y a-t-il de sphères possibles ?

Problème 3 (poids 1)

Les billets d'une certaine loterie coûtent 5 francs. Pour chaque billet, les probabilités de gain sont données ci-dessous :

- la probabilité de gagner 5 francs vaut 10%,
- la probabilité de gagner 10 francs vaut 5%,
- la probabilité de gagner 300 francs vaut 1%.

Il y a donc trois types de billets gagnants mais quand on gagne 5 francs, on ne fait pas de bénéfice puisque on doit d'abord acheter le billet.

a) Calculer la probabilité qu'un billet soit perdant.

b) Blondie fait le raisonnement suivant : "Si j'ai une chance sur cent de gagner le gros lot avec un billet, je vais acheter 100 billets, ainsi je gagnerai à coup sûr". Ce raisonnement est évidemment faux, mais, parmi 100 billets, quelle est la probabilité d'en trouver exactement un faisant gagner 300 francs ?

c) Jules achète 6 billets. Quelle est la probabilité que la moitié de ses billets soient gagnants ?

d) Caroline achète 2 billets. Quelle est la probabilité qu'elle perde de l'argent ?

e) Sara décide d'acheter des billets jusqu'à ce qu'elle obtienne un billet gagnant. Quelle est la probabilité qu'elle doive acheter 5 billets ?

f) Calculer le montant minimal que David doit dépenser, s'il veut que la probabilité de gagner au moins une fois le gros lot de 300 francs soit supérieure à 80%.

g) Sophie achète un billet et découvre qu'il est gagnant. Quelle est la probabilité qu'elle empoche le gros lot ?

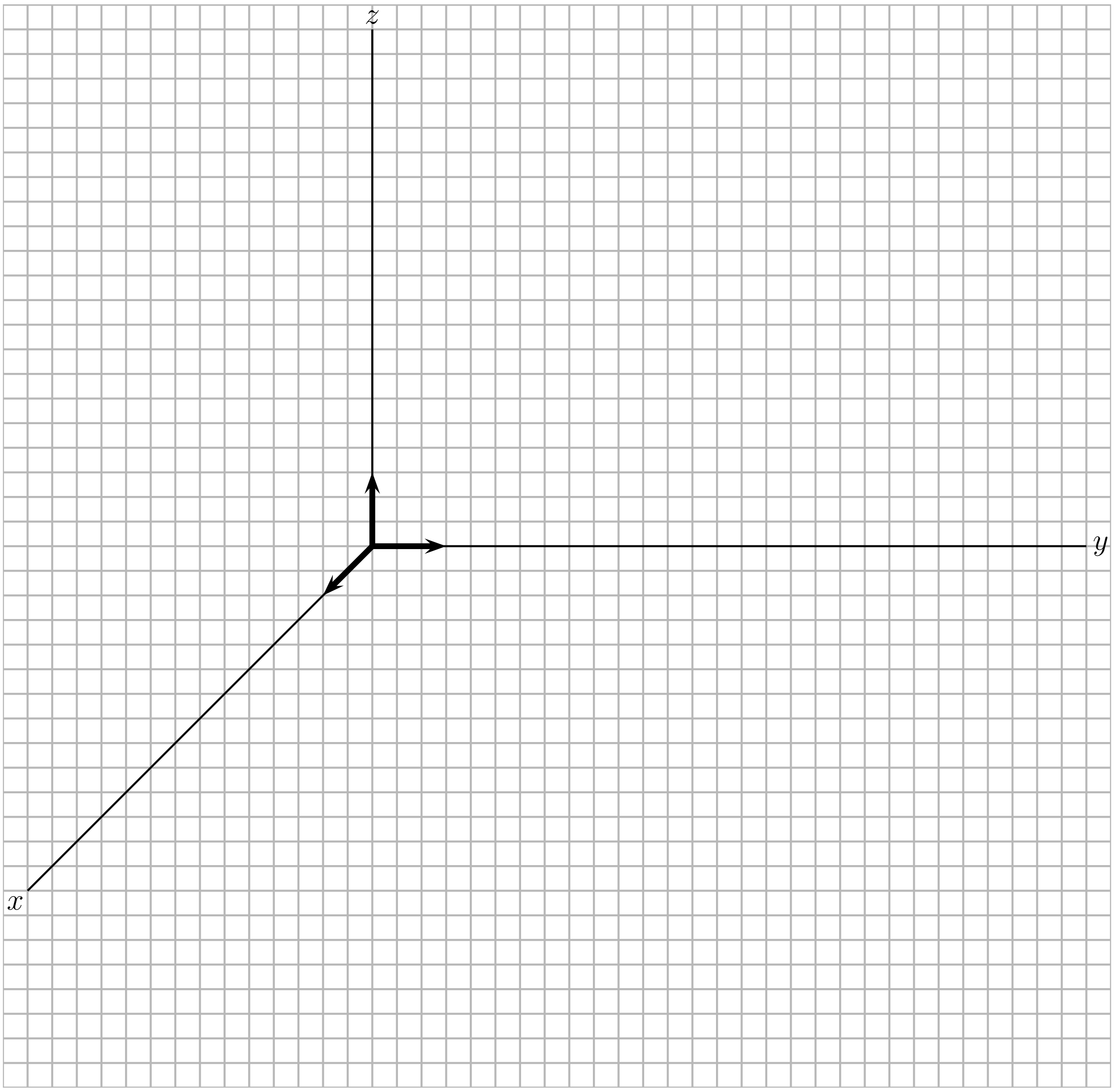
LYCÉE DENIS-DE-ROUGEMONT
Neuchâtel et Fleurier

EXAMEN DE MATURITÉ
Mathématiques de niveau I
Session 2008

Annexe pour le problème 2

Classe : . . . .

Nom et prénom : . . . .



CORRIGÉ

Problème 1

Première partie

a) $d = 1$ (car asymptote verticale $x = -1$), $a = 3$ (car asymptote horizontale $y = 3$), $c = 0$ (car $f(0) = 0$) et $b = 12$ (car $f(-4) = 0$).

b) la dérivée de f est donnée par

$$\begin{aligned}\left[\frac{3x^2+12x}{(x+1)^2}\right]' &= \frac{(6x+12)(x+1)^2-(3x^2+12x)2(x+1)}{(x+1)^4}\\ &= \frac{(6x+12)(x+1)-2(3x^2+12x)}{(x+1)^3} = \frac{6x^2+18x+12-(6x^2+24x)}{(x+1)^3}\\ &= \frac{-6x+12}{(x+1)^3} = \frac{6(-x+2)}{(x+1)^3} = \frac{6(2-x)}{(x+1)^3}\end{aligned}$$

c) ▷ Domaine de définition : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

▷ Asymptote verticale $x = -1$ car $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \text{“}\frac{-9}{0}\text{”} = \pm\infty$

▷ Le numérateur $3x(x+4)$ s'annule pour $x = 0$ et $x = -4$. Le graphe de f coupe donc les axes aux points $(0; 0)$ et $(-4; 0)$.

▷ Tableau de signes : voir à côté du graphe

▷ Propriétés : fonction ni paire ni impaire (domaine de définition non symétrique) et non périodique (un seul exclu...).

▷ Division euclidienne $\rightsquigarrow$ asymptote horizontale $y = 3$

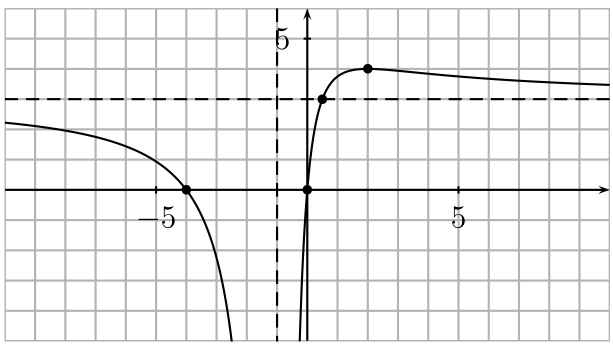
$$\begin{array}{r|l} 3x^2+12x & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2} -\ (3x^3+6x+3) & 3 \\ \cline{1-1} 6x-3 & \end{array}$$

x		-1		0.5	
$f(x) - 3 = \frac{6x-3}{(x+1)^2}$	$-$	↯	$-$	0	$+$
$f(x)$	< 3	↯	< 3	$= 3$	> 3

Le graphe de f coupe son asymptote horizontale ($y = 3$) au point $(0.5; 3)$.

▷ Tableau de signes :

x		-4		-1		0	
$f(x)$	$+$	0	$-$	↯	$-$	0	$+$



▷ Tableau de variations :

x		-1		2	
$f'(x)$	$-$	↯	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	↯	↗	max	↘

P.t.h. en $T(2; 4)$ (maximum).

Deuxième partie

d) tangente de pente $g'(e) = 1/e$, passant par le point $T(e; 1)$ $\rightsquigarrow y = \frac{1}{e}x$

e) Aire $= \dfrac{e}{2} - \displaystyle\int_1^e \ln(x)dx = \dfrac{e}{2} - \big[x(\ln(x) - 1)\big]_1^e = \dfrac{e}{2} - 1$

Problème 2

a) On a $\overrightarrow{AB} = 4\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = 4\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, de sorte que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 16\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = 16\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\left\|16\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\| = 8\left\|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\| = 8 \cdot 3 = 24$

b) Le plan μ admet un vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ (proportionnel à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$) et on aboutit à $\mu : 2x + y + 2z - 11 = 0$.

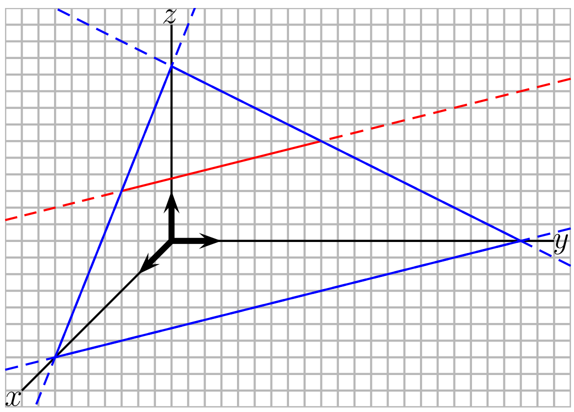
c) Les deux plans ont des équations comparables (même nombre de x, y ou z) qui ne diffèrent que par la constante, donc ils sont strictement parallèles. On a alors $\text{dist}(\mu, \pi) = \text{dist}(A, \pi) = \frac{4}{3}$.

d) $\sphericalangle_a\left(\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3 \cdot 1}\right) \cong 48.19°$ donc $\sphericalangle_a(\pi, O_x) \cong 90° - 48.19° = 41.81°$

e) Traces de π sur les axes :

$I_x(3.5; 0; 0),\ I_y(0; 7; 0),\ I_z(0; 0; 3.5)$

Traces de d dans les plans de référence : $T_m(0; 3; 2)$, $T_p(1.5; 0; 2)$ et T_s inexistante.



f) $d : \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = 2 \end{cases}$

g) Le point D correspond à $\lambda = 20$, le point E correspond à $\lambda = -10$.

h) Les centres des sphères possibles sont des points $P(\lambda, 3 - 2\lambda; 2)$ qui vérifient $\text{dist}(P, \text{paroi}) = \text{dist}(P, \text{mur})$, c'est-à-dire

$$|3 - 2\lambda| = |\lambda| \iff 3 - 2\lambda = \pm\lambda \iff 3 = 2\lambda \pm \lambda \iff \lambda \in \{1; 3\}.$$

On trouve ainsi $P_1(1; 1; 2)$ (avec $\lambda = 1$) et $P_2(3; -3; 2)$ (avec $\lambda = 3$). Il y a deux sphères possibles d'équation $\mathcal{S}_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$, respectivement $\mathcal{S}_2 : (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 9$.

Problème 3

a) $1 - \mathbb{P}(\text{billet gagnant}) = 1 - (0.1 + 0.05 + 0.01) = 1 - 0.16 = 84\%$

b) $\binom{100}{1}(0.01)^1(0.99)^{99} \cong 36.97\%$

c) $\binom{6}{3}(0.16)^3(0.84)^3 \cong 4.86\%$

d) $\mathbb{P}(0\text{Fr ou } 5\text{Frs}) = \mathbb{P}(\langle 0, 0\rangle, \langle 5, 0\rangle, \langle 0, 5\rangle) = (0.84)^2 + 2 \cdot (0.1 \cdot 0.84) = 87.36\%$

e) $(0.84)^4(0.16) \cong 7.97\%$

f) Soit n le nombre minimal de billets que David doit acheter. On a

$$1 - (0.99)^n \geqslant 0.8 \iff 0.2 \geqslant (0.99)^n \iff n \geqslant \log_{0.99}(0.2) \cong 160.14$$

donc $n = 161$ et David doit dépenser $5n = 805$ francs.

g) $\mathbb{P}(300\text{Frs}|G) = \mathbb{P}(300\text{Frs})/\mathbb{P}(G) = 0.01/0.16 = 6.25\%$