

Mathématiques renforcées

Durée de l'épreuve : 180 minutes

Ouvrages et matériels autorisés : Formulaires et Tables (fournies par le collège)
Calculatrice non programmable
Règle, compas, etc.

Barème : 50 points correspondent à la note 6

Algèbre linéaire - Première partie (6 points)

Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne la droite vectorielle \mathcal{D} engendrée par le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et le plan vectoriel \mathcal{P} orthogonal à \mathcal{D} . On considère alors la symétrie vectorielle orthogonale s d'axe \mathcal{D} et la projection vectorielle orthogonale p sur \mathcal{P} .

Déterminez la matrice de $p \circ s$.

Algèbre linéaire - Seconde partie (6 points)

Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne la matrice de l'application linéaire f :

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrez que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie.
- 2) Déterminez l'axe et l'angle de la rotation.

Géométrie (11 points)

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les plans :

$$(p_1) : 4y + 3z = 12 \quad \text{et} \quad (p_2) : 2x + y + 2z = 12$$

- 1) Dessinez ces deux plans (avec leurs traces) ainsi que leur droite d'intersection (d) .
Rappel : les traces d'un plan sont les intersections de ce plan avec les plans de base (xOy) , (xOz) et (yOz) .
- 2) Donnez les équations paramétriques de (d) .
- 3) Déterminez le point de l'axe des z le plus proche de (d) .
- 4) Soit la sphère $(s) : x^2 + y^2 + z^2 = 36$ qui coupe le plan (p_2) selon le cercle (c) .
Déterminez le centre et le rayon de ce cercle.

Analyse - Première partie (12 points)

On donne la fonction réelle f définie par $f(x) = \frac{30e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2}$.

- 1) Déterminez l'ensemble de définition de f , son comportement asymptotique, sa dérivée et son sens de variation.
- 2) Montrez que le graphe de f admet un axe de symétrie.
- 3) Tracez le graphe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (2 carrés pour l'unité).
- 4) Calculez l'aire de la région comprise entre le graphe de f et l'axe des x .

Analyse - Seconde partie (8 points)

Deux mobiles se déplacent sur une même droite et dans la même direction.
Leur vitesse est donnée en mètres par seconde, respectivement par

$$v_1(t) = 10 + 2t \quad \text{et} \quad v_2(t) = \frac{1}{3}t^2 + t \quad t \text{ étant exprimé en secondes, } t \in [0; 15].$$

A l'instant initial $t = 0$, les deux mobiles sont au même endroit.

- 1) Calculez la date t de l'éventuelle rencontre des deux mobiles.
- 2) Calculez le retard maximal (en mètres) que prend le second mobile sur le premier.
- 3) Calculez l'avance maximale (en mètres) que prend le second mobile sur le premier.

Probabilités (12 points)

Voici les règles d'un jeu :

*Vous lancez 3 pièces de monnaie et vous comptez le nombre n de pièces tombées sur pile.
Dans un jeu de 36 cartes, vous tirez alors n cartes sans remise.
Si vous n'avez pas tiré de cœur (ou si $n = 0$), vous perdez 50 francs.
Sinon, vous gagnez 100 francs par cœur tiré.*

- 1) Ce jeu est-il avantageux ?
- 2) Calculez la probabilité de gagner 100 francs si 2 pièces sont tombées sur pile.
- 3) Calculez la probabilité que 2 pièces soient tombées sur pile si on a gagné 100 francs.
- 4) En jouant 100 fois de suite à ce jeu, estimez la probabilité de gagner quelque chose.