

Session 2009

**EXAMEN DE MATHÉMATIQUES - Discipline fondamentale**

- 
- temps à disposition : 4 heures
  - note maximale (6) pour 4 problèmes justes
  - extrait des "Formulaires et Tables" à disposition
  - machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée
- 

**Problème 1**On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = 5x e^{-x^2}$$

1. Réaliser l'étude complète de  $f$ . Durant l'étude, on montrera que la dérivée première est la suivante :

$$f'(x) = -5(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

2. Calculer la pente de la tangente au graphe de  $f$  en chacun des points d'inflexion.
3. Représenter graphiquement cette fonction (unité : 2 cm).

**Problème 2**

Un spécialiste en rongeurs possède dans son magasin une très grande quantité de cochons d'Inde. Il en vend de trois sortes : à rosette, à poil lisse et péruvien. Dans ce magasin, la répartition des cochons d'Inde selon la sorte est toujours proposée comme suit :

à rosette	à poil lisse	péruvien
60 %	30 %	10 %

De plus, pour chacune des sortes, 60% des individus sont des femelles.

1. Pierre achète un cochon d'Inde au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :
  - $A$  : le cochon d'Inde est un mâle.
  - $B$  : le cochon d'Inde est à poil lisse, sachant que c'est une femelle.
2. Chaque jour ouvrable d'une semaine (du lundi au samedi inclus), Pierre achète 1 cochon d'Inde au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :
  - $C$  : Pierre achète exactement deux mâles, le lundi et le samedi.
  - $D$  : Pierre achète un mâle le samedi, sachant qu'il achète exactement trois mâles.
  - $E$  : Pierre achète exactement trois femelles à rosette.
  - $F$  : Pierre achète exactement deux femelles à rosette et trois femelles à poil lisse.
  - $G$  : Pierre achète au moins un cochon d'Inde de chaque sexe.
3. Pierre reçoit une femelle à poil lisse. Combien de cochons d'Inde doit-il encore acheter pour être certain à plus de 99% de posséder un couple de cochons d'Inde à poil lisse ?
4. Lors d'un achat, Pierre demande à un apprenti vendeur le sexe du cochon d'Inde qu'il va emporter. Or, cet apprenti n'est capable de déterminer le sexe d'un cochon d'Inde que 9 fois sur 10.  
Sachant que l'apprenti lui affirme que c'est un mâle, calculer la probabilité que Pierre ramène chez lui effectivement un mâle.

(suite au verso)

### Problème 3

On donne les deux points  $A(4; 3; 0)$  et  $B(6; 11; -2)$ , ainsi que la droite  $d : \begin{cases} x = -1 + k \\ y = 13 - 2k \\ z = -10 + 2k \end{cases}$ .

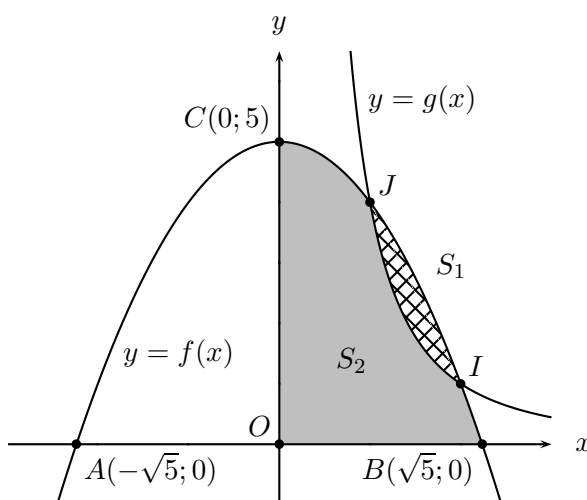
1. Vérifier que le point  $A$  appartient à la droite  $d$ .
2. Déterminer l'équation cartésienne du plan  $\pi$  contenant la droite  $d$  et le point  $B$ .
3. Calculer l'angle aigu d'intersection entre la droite  $d$  et la droite  $(AB)$ .
4. Déterminer le point  $C$  de la droite  $d$  tel que le triangle  $ABC$  soit isocèle en  $C$ .
5. Montrer que l'aire du triangle  $ABC$  est égale à 18.

On donne encore le point  $S(-4; 7; 8)$ .

6. Calculer le volume du tétraèdre  $SABC$ .
7. Écrire une représentation paramétrique de la droite  $n$  passant par  $S$  et orthogonale au plan  $\pi$ .
8. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la droite  $d$  et de la droite  $n$ .
9. Établir l'équation cartésienne de la sphère tangente au plan  $\pi$  en  $A$  et passant par le point  $S$ .
10. Déterminer le point  $T$ , de la droite  $n$  et de troisième coordonnée négative, tel que le volume du tétraèdre  $TABC$  soit égal à 36.

### Problème 4

Sur le dessin ci-dessous, on donne la parabole représentant la fonction  $f$  ainsi que le graphe de  $g$  déterminée par l'expression fonctionnelle  $g(x) = \frac{4}{x^2}$ , avec  $x > 0$ .



1. Montrer que l'expression fonctionnelle de  $f$  est  $f(x) = 5 - x^2$ .
2. Calculer les coordonnées des points  $I$  et  $J$ .
3. Établir l'équation de la tangente au graphe de  $g$  en  $I$ .
4. Calculer l'angle aigu d'intersection entre les graphes de  $f$  et de  $g$  au point  $I$ .
5. Calculer l'aire du domaine quadrillé  $S_1$  délimité par les graphes de  $f$  et  $g$ .
6. Déterminer la longueur du plus grand segment vertical contenu dans le domaine  $S_1$ .
7. Calculer le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe  $Ox$  du domaine grisé  $OBIJC$ , noté  $S_2$ , où le bord  $IJ$  est un arc de  $g$ .