

# Discipline fondamentale

## MATHÉMATIQUES

Classe 1U

4 heures

L'usage d'une calculatrice non programmable et sans écran graphique est autorisé.

Le Formulaire et Table de la CRM est également autorisé.

---

**Exercice 1**

(14 points)

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 2}$ .

- 1.1 Étudier cette fonction et représenter son graphe dans le plan muni d'un système d'axes pourvus d'unités appropriées.
  - 1.2 Trouver l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  si cette tangente passe par le point  $P(-2;8)$ .
  - 1.3 Déterminer l'aire du domaine compris entre l'axe  $Ox$ , la courbe représentative de la fonction  $f$  et les droites verticales d'équations  $x = 0$  et  $x = 8$ .
- 

**Exercice 2**

(14 points)

Une urne  $A$  contient 17 boules rouges et 58 blanches.

Une urne  $B$  contient 6 boules rouges et 9 blanches.

Une urne  $C$  contient 4 boules rouges, 5 blanches et 3 bleues.

- 2.1 On choisit une urne au hasard et ensuite on tire une boule de cette urne : elle est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne  $C$  ?
- 2.2 On tire simultanément 5 boules de l'urne  $C$ . Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux boules rouges, une blanche et deux bleues.
- 2.3 Un joueur tire simultanément 2 boules de l'urne  $B$ . Il gagne 4.- s'il obtient 2 boules rouges et 1.- s'il en obtient une. Il perd 3.- sinon. Ce jeu est-il équilibré ? Si non, en faveur de qui ?
- 2.4 On effectue un tirage à la fois avec remise d'une boule de l'urne  $A$ .
  - a) Après 5 tirages, calculer la probabilité d'avoir exactement une boule rouge.
  - b) Déterminer le nombre de tirages nécessaires pour être certain à 97% d'avoir sorti au moins une fois une boule rouge de l'urne.
  - c) On effectue 3000 tirages. Calculer la probabilité d'avoir obtenu entre 650 et 700 (y compris) fois une boule rouge.

Tournez la page svp.

**Exercice 3**

(12 points)

On considère les points  $A(6; -2; 0)$ ,  $B(-3; 2; 5)$ ,  $C(9; 8; 4)$ ,  $D(0; 0; 6)$  et  $E(-6; 2; 1)$ .

On note  $\alpha$  le plan passant par les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

3.1 Trouver l'équation du plan  $\alpha$ .

3.2 Trouver l'angle aigu entre le plan  $\alpha$  et la droite  $DE$ .

3.3 Trouver les coordonnées du (ou des) point(s)  $S$  de sorte que le tétraèdre  $ABCS$  ait un volume de 85. On sait de plus que le(s) point(s)  $S$  se situe(nt) sur la droite  $DE$ .

3.4 On considère la sphère  $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 6 = 0$ . Le plan  $\alpha$  coupe la sphère  $\sigma$ . Trouver le centre et le rayon du cercle d'intersection.

**Exercice 4** Questions diverses

(10 points)

4.1 Une plaque de métal rectangulaire possède une longueur de 4 m et une largeur de 80 cm. On la «plie» pour en faire une gouttière en forme de «U» avec «couvercle» (voir la figure 1 ci-dessous). La partie courbe a la forme d'un demi-cercle de rayon  $r$ . Trouver le rayon  $r$  de cette gouttière pour que son volume soit maximal.

4.2 On considère la fonction  $f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + 9e^{-2x})$  (voir la figure 2 ci-dessous).

- Trouver (par un calcul complet) l'abscisse des points d'intersection entre la courbe de la fonction  $f$  et la droite d'équation  $y = 5$ .
- On considère le domaine  $D$  limité par la courbe représentative de la fonction  $f$  et la droite d'équation  $y = 5$ . Calculer le volume engendré par la rotation de  $D$  autour de l'axe  $Ox$ .  
Remarque : si vous n'avez pas trouvé la réponse au point a), prenez  $x_1 = 0$  et  $x_2 = \ln(3)$ .

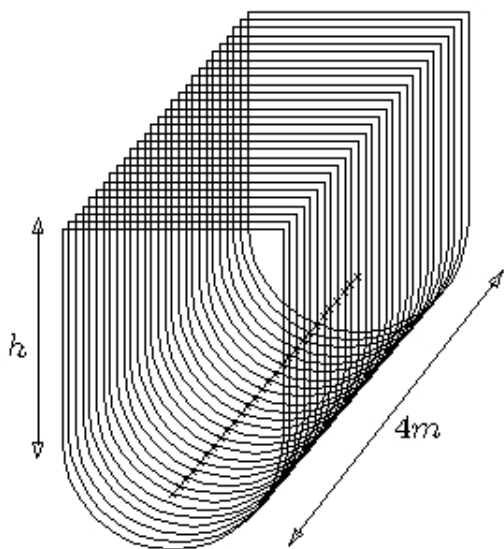


figure 1

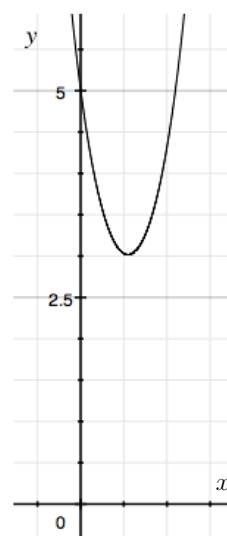


figure 2