Mathématiques renforcées

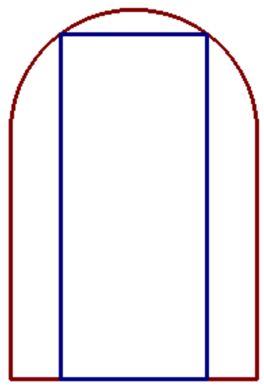
Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrages et matériels autorisés :	Formulaires et Tables (fournies par le collège) Calculatrice non programmable Règle, compas, etc.
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Analyse 1 (12 points)

On considère la fonction réelle $f : x \mapsto 4x^2 \exp(x^3)$.

1) Déterminer les éventuels minimum et maximum de la fonction *f*.
2) Calculer l'aire du triangle curviligne délimité par la courbe de *f* , l'axe des y et la tangente à la courbe de *f* au point d'abscisse –1.
3) Déterminer tous les points d'intersection de la courbe de *f* avec celle de la fonction $g : x \mapsto 4x^2 \exp(3x+2)$.
   Les deux courbes sont-elles tangentes en l'un ou l'autre de ces points? Justifier.

Analyse 2 (7 points)



Une porte de grange est constituée d'un panneau de bois carré de 2m de côté surmonté d'un demi-disque.

Un citadin voudrait percer dans cette porte une ouverture rectangulaire d'aire la plus grande possible.

Quelle serait sa hauteur ?

Algèbre linéaire (9 points)

On considère P₂, l'ensemble des polynômes de la forme $a x^2 + b x + c$, où *a*, *b* et *c* sont des nombres réels. Muni de l'addition des polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un réel, P_2 est un espace vectoriel.

1) Les polynômes $p(x) = x^2 + x$, $q(x) = x + 1$ et $r(x) = 1$ forment-ils une base de P_2 ? Justifier.

On considère l'endomorphisme *f* de P_2 défini par $f(a x^2 + b x + c) = (a-b)x^2 + (b-a)x - 2c$.

2) Déterminer le noyau et l'image de *f*.
3) Le polynôme $3x^2 - 2x + 1$ fait-il partie de l'image de *f* ?
4) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de *f*.

Géométrie (11 points)

Dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne 3 points $A\left(-1;2;2\right)$, $B\left(2;-1;2\right)$, $C\left(2;2;-1\right)$.

1) Montrer que le triangle *ABC* est équilatéral.
2) Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ circonscrit au triangle *ABC*.
3) Donner un système de 2 équations cartésiennes qui définit le cercle Γ.
4) Démontrer que le cercle Γ coupe les axes de coordonnées.
5) Donner l'équation d'une sphère Σ de rayon 9 qui passe par les 3 points *A*, *B* et *C*.

Probabilités 1 (8 points)

Dans une usine de pâtes alimentaires, une machine verse un certain nombre de penne dans des paquets de 500g. Une observation statistique a montré que le nombre de penne par paquet suit une loi normale de moyenne 850 et d'écart-type 6,3.

1) En achetant un tel paquet de penne, quelle est la probabilité d'en avoir plus de 855 ?
2) Soit *k* un nombre naturel ; pour quelle valeur minimale de *k* la probabilité d'avoir entre $850-k$ et $850+k$ penne est-elle supérieure à 95% ?

Le fabricant de ces pâtes propose 2 sortes de penne : des normales et des extras.
Les chiffres des dernières années montrent qu'on vend les variétés extra ou normale avec les probabilités respectives de 0,2 et 0,8.

3) Quelle est la probabilité que sur les 10'000 prochains paquets vendus, moins de 1'950 soient ceux de qualité extra ?

Probabilités 2 (8 points)

On considère une pyramide ABCDE à base carrée ABCD.

Une coccinelle se promène le long des arêtes de cette pyramide, en partant du sommet E, sans jamais passer deux fois par la même arête. A chaque sommet, elle choisit au hasard une arête disponible, c'est-à-dire une arête qu'elle n'a pas encore parcourue.
La coccinelle stoppe ses déplacements dès qu'elle se retrouve en E ou bien lorsque plus aucune arête disponible ne s'offre à elle.

1) Lorsque la coccinelle retourne en E, combien d'arêtes peut-elle avoir parcouru ?
   Examiner toutes les possibilités et donner leur probabilité.
2) Quelle est la probabilité qu'elle revienne en E sachant qu'elle a parcouru au moins 4 arêtes ?

Un jeu consiste à payer 1 franc par arête parcourue si la coccinelle revient en E ou à recevoir x francs si la coccinelle ne rejoint pas le sommet.

3) A combien fixer x pour que le jeu soit équitable ?