Mathématiques niveau II

Exercice 1 (poids 3)

On considère la fonction $f : x \mapsto y = (x^2 - 4)e^{-0.5x}$.

a) Etudier la fonction f, sans la parité mais avec la deuxième dérivée, puis dessiner son graphe.

b) On considère la fonction g définie par $g(x) = me^{-0.5x}$. Trouver le nombre m de sorte que les graphes de f et g n'aient qu'un seul point commun. Trouver l'équation de leur tangente commune en ce point.

On choisit $m = -4$, donc $g(x) = -4e^{-0.5x}$.

c) Esquisser le graphe de g dans le même repère que le graphe de f.

d) Déterminer l'aire $A(k)$ de la surface comprise entre les graphes de f et g pour $x \in [0; k]$ avec $k > 0$. Calculer la limite de $A(k)$ lorsque k tend vers l'infini.

On considère $h(x) = \ln(f(x))$.

e) Esquisser le graphe de h dans le même système d'axes que précédemment.

f) Pour $x > 2$, on peut écrire $h(x)$ sous la forme

$$h(x) = a \cdot x + \ln(x + b) + \ln(x - b) \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

Déterminer les valeurs de a et b. La fonction h admet-elle une asymptote oblique lorsque $x \to +\infty$? Justifier la réponse.

g) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$y' = y \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2}\right) \qquad (x \neq 0)$$

Exercice 2 (poids 3)

Une transformation linéaire f des vecteurs de l'espace est donnée par sa matrice

$$F = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

relativement à la base orthonormée standard $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_3})$.

a) Pour quelle valeur de m le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de f ? Préciser la valeur propre correspondante.

b) Sachant que $\det(F - \lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$, trouver les valeurs et vecteurs propres de f.

c) Interpréter géométriquement la transformation f.

On donne les vecteurs $\overrightarrow{a} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ n \end{pmatrix}$

d) Trouver n et un vecteur $\overrightarrow{c}$ de sorte que $(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}; \overrightarrow{c})$ soit une base orthonormée.

e) Trouver la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}; \overrightarrow{c})$.

Dans l'ensemble des vecteurs de l'espace, on appelle g la transformation linéaire dont la matrice relativement à la base standard $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_3})$ est

$$G = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \\ -8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

f) L'application g décrit une rotation autour d'une droite passant par l'origine parallèlement au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Calculer l'angle de cette rotation.

g) Trouver la matrice de la composition $g \circ f$ relativement à la base $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_3})$.

h) La composition $g \circ f$ est-elle identique à la transformation linéaire $h : \overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{v}$, où $\wedge$ désigne le produit vectoriel et $\overrightarrow{a} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$? Justifier la réponse.

Exercice 3 (poids 2)

L'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est définie par $f(z) = z^2 - 9z + 22 + 4i$.

a) Les nombres complexes $z_1 = f(i)$ et $z_2 = f(2+3i)$ sont représentés dans le plan de Gauss par deux points P_1 et P_2. Calculer l'angle à l'origine dans le triangle OP_1P_2.

b) Calculer les points fixes de l'application f.

c) On pose $f(x+iy) = u + iv$ (où x, y, u et v sont des nombres réels).
Exprimer u et v en fonction de x et y.

d) Montrer que l'application f envoie la droite d'équation $y = x - 5$ sur une parabole.
Donner l'équation de cette parabole.

On considère l'application $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est définie par $g(z) = f(z+i) - z^2$.

e) Décrire précisément la transformation géométrique associée à g dans le plan de Gauss, sans utiliser de translation.

Exercice 4 (poids 2)

Paul est percussionniste dans un orchestre. La probabilité qu'il joue un morceau complètement est de $\frac{2}{5}$, la probabilité qu'il ne joue un morceau que partiellement est de $\frac{1}{2}$, et il arrive, pour certains morceaux, qu'il ne joue pas du tout.

Calculer la probabilité que, lors des neuf prochains morceaux, Paul joue...

a) quatre morceaux partiellement.

b) au moins deux morceaux complets.

L'orchestre décide de jouer les morceaux de son répertoire au hasard, le même morceau pouvant être joué plusieurs fois. Le concert se termine après le premier morceau que Paul ne joue pas du tout. Appelons X le nombre de morceaux joués par l'orchestre.

c) Calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et trouver une formule pour $P(X = n)$.

d) Quelle est la probabilité que X soit impair ?

Pour la suite du problème, l'orchestre n'interprète que des morceaux que Paul joue.

e) Quelle est alors la probabilité que Paul joue un morceau...
1) complètement ? 2) partiellement ?

La probabilité que Paul commette une erreur lors d'un morceau est de $\frac{4}{13}$ s'il le joue complètement et de $\frac{2}{13}$ s'il ne le joue que partiellement. Paul ne commet jamais plus d'une erreur par morceau.

f) A l'aide des résultats trouvés au point e), vérifier que la probabilité que Paul commette une erreur lors d'un morceau est $p = \frac{2}{9}$.

g) Combien de morceaux au minimum l'orchestre doit-il jouer pour que la probabilité que Paul commette au moins une erreur soit supérieure à 0.989 ?

h) Un musicien de l'orchestre propose le jeu suivant : si Paul commet une erreur lors d'un morceau, Paul doit payer 14 francs ; sinon, chaque autre membre paie 50 centimes. Sachant que le jeu est équitable, combien de personnes constituent l'orchestre ?

Exercice 1

a) $D = \mathbb{R}$, $I_{x1}(-2;0)$, $I_{x2}(2;0)$

x		-2		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \text{“}\infty\cdot\infty\text{”} = \infty$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \text{“}\infty\cdot 0\text{”} = 0$ (car l'exponentielle gagne), donc asymptote horizontale $y = 0$.

$f'(x) = -0.5(x^2 - 4x - 4)e^{-0.5x}$

x		$2-\sqrt{8}$		$2+\sqrt{8}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$H_1(-0.83;-5.01)$ $\quad H_2(4.83;1.73)$

$f''(x) = 0.25(x^2 - 8x + 4)e^{-0.5x}$

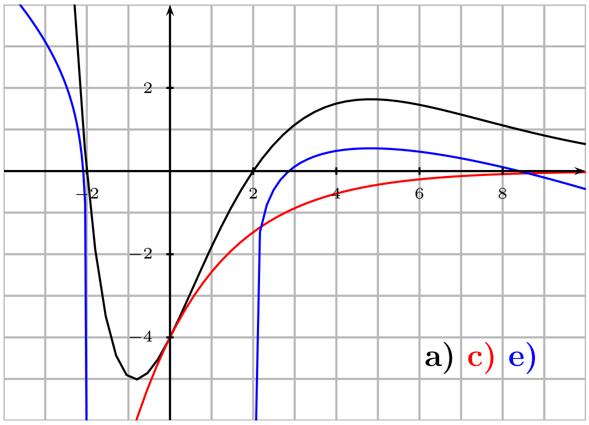
x		$4-\sqrt{12}$		$4+\sqrt{12}$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\smile$	infl.	$\frown$	infl.	$\smile$

$C_1(0.54;-2.84)$ $\quad C_2(7.46;1.24)$

b) L'équation $(x^2-4)e^{-0.5x} = me^{-0.5x}$, c'est-à-dire $(x^2 - m - 4)e^{-0.5x} = 0$, ne doit avoir qu'une seule solution, donc $\Delta(1;0;-m-4) = 0$,

$$-4(-m-4) = 0\,;\quad m = -4.$$

On a alors $g(x) = -4e^{-0.5x}$ donc $g'(x) = 2e^{-0.5x}$. Les graphes de f et g se coupent en $(0;-4)$ et comme $f'(0) = g'(0) = 2$, on a une tangente commune d'équation $y = 2x - 4$.



d) $A(k) = \int_0^k f(x) - g(x)dx = \int_0^k x^2e^{-0.5x}dx$. Après intégration par parties ou par identification, on trouve

$$A(k) = \Big[(-2x^2 - 8x - 16)e^{-0.5x}\Big]_0^k = (-2k^2 - 8k - 16)e^{-0.5k} + 16,$$

ce qui s'approche de 16 lorsque k tend vers l'infini.

f) $h(x) = \ln\big((x+2)(x-2)e^{-0.5x}\big) = \ln(x+2) + \ln(x-2) - 0.5x$, donc $a = -0.5$ et $b = 2$. Si $h(x)$ admettait une asymptote oblique $y = mx + h$ à l'infini, on aurait

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} = -0.5$$

et $\;h = \lim\limits_{x\to\infty}(h(x) + 0.5x) = \lim\limits_{x\to\infty}(\ln(x+2) + \ln(x-2)) = \infty \quad ↯$

g) $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x} - \frac{1}{2}dx\,;\quad \ln|y| = 2\ln|x| - 0.5x + c\,;\quad y = Cx^2e^{-0.5x}$

Exercice 2

a) La relation $F\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$ conduit au système d'équations $\begin{cases} 14+2m &= 18\lambda \\ 1+4m &= 9\lambda \\ 8+5m &= 9\lambda m \end{cases}$

En soustrayant à la première ligne le double de la deuxième, on trouve $12-6m=0$, donc $m=2$. Avec cette valeur, les trois équations deviennent simplement $18=18\lambda$, $9=9\lambda$ et $18=18\lambda$. Elles sont compatibles avec $\lambda=1$.

b) $\det(M-\lambda I) = -\lambda^3+2\lambda^2-\lambda = -\lambda(\lambda-1)^2$ s'annule lorsque $\lambda=0$ ou $\lambda=1$.

- Sous-espace 0-propre :

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left.\begin{cases} 4x-y+z=0 \\ -2x+5y+4z=0 \\ 2x+4y+5z=0 \end{cases}\right\} \xrightarrow{\cdots} y+z=0$$

En choisissant $z=1$, on trouve alors $y=-1$ et $x=-1/2$.
Le sous-espace 0-propre est constitué des multiples non nuls de $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Sous-espace 1-propre :

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x+2y-2z=0 \\ \quad ” \quad ” \quad ” \\ \quad ” \quad ” \quad ” \end{cases}$$

Le sous espace 1-propre est le plan d'équation $x+2y-2z=0$.

c) Projection orthogonale sur le plan d'équation $x+2y-2z=0$.

d) $n=1$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) L'angle de rotation α vérifie $1+2\cos\alpha = \mathrm{Tr}(G) = 1$, donc $\cos\alpha = 0$, $\alpha = 90°$.

Variante : On choisit un vecteur normal à l'axe de rotation, disons $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on calcule son image $f(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$. L'angle entre ces deux vecteurs est de 90° car leur produit scalaire est nul.

g) $GF = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

h) Oui car pour $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on a $h(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2b+2c \\ -2a-c \\ -2a+b \end{pmatrix} = (GF)(\overrightarrow{v})$

Exercice 3

a) $f(i) = 21 - 5i$ et $f(2+3i) = -1 - 11i$, donc $P_1(21; -5)$ et $P_2(-1; -11)$
$\alpha = |\arg(f(i)) - \arg(f(2+3i))| \cong |346.608° - 264.806°| = 81.802°$
Variante avec produit scalaire : $\alpha = \sphericalangle\left(\binom{21}{-5}, \binom{-1}{-11}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{34}{\sqrt{466}\sqrt{122}}\right) \cong 81.802°$

b) $f(z) = z \iff z^2 - 10z + 22 + 4i = 0$, discriminant $\Delta = 12 - 16i = (a+bi)^2$ avec comparaison des modules, des parties réelles et imaginaires :

$$\underbrace{a^2 + b^2 = 20, \qquad a^2 - b^2 = 12}_{2a^2=32,\ a^2=16,\ a=\pm 4}, \qquad \underbrace{2ab = -16}_{b=-8/a}$$

On a ainsi $\Delta = (\pm(4-2i))^2$ et donc $z_{1,2} = \dfrac{10 \pm (4-2i)}{2} = 5 \pm (2-i) = \begin{cases} 7 - i \\ 3 + i \end{cases}$

c) $u = x^2 - y^2 - 9x + 22, \qquad v = 2xy - 9y + 4$

d) Si $y = x - 5$, on a $u = x^2 - (x-5)^2 - 9x + 22 = x - 3$, donc $x = u + 3$ et

$$\begin{aligned} v &= 2x(x-5) - 9(x-5) + 4 = 2x^2 - 19x + 49 \\ &= 2(u+3)^2 - 19(u+3) + 49 = 2u^2 - 7u + 10 \end{aligned}$$

e) $g(z) = f(z+i) - z^2 = (z+i)^2 - 9(z+i) + 22 + 4i - z^2 = (2i - 9)z + 21 - 5i$
Centre de rotation : $g(z) = z \iff z = \dfrac{-21+5i}{-10+2i} \cdot \dfrac{-10-2i}{-10-2i} = \dfrac{220-8i}{104} = \dfrac{55}{26} - \dfrac{1}{13}i$
Angle de rotation : $\alpha = \arg(-9+2i) \cong 167.471°$
Rapport d'homothétie : $\lambda = |-9+2i| = \sqrt{85}$

Exercice 4

a) $\binom{9}{4}(0.5)^4(0.5)^5 = 126 \cdot (0.5)^9 \cong 0.246$

b) $1 - (0.6)^9 - 9(0.6)^8(0.4) \cong 0.93$

c) $P(X=1) = 0.1$; $P(X=2) = 0.09$; $P(X=3) = 0.081$; $P(X=n) = (0.9)^{n-1}(0.1)$

d) $P(X \text{ impair}) = 0.1\big(1 + (0.81) + (0.81)^2 + (0.81)^3 + \cdots\big) = \dfrac{0.1}{1-0.81} = \dfrac{1/10}{19/100} = \dfrac{10}{19}$

e) Sachant que Paul joue (proba $= \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$), la probabilité qu'il joue complètement vaut $\dfrac{2/5}{9/10} = \dfrac{4}{9}$, alors que celle qu'il ne joue que partiellement est $1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$.

f) $p = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{4}{13} + \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{2}{13} = \dfrac{26}{9 \cdot 13} = \dfrac{2}{9}$

g) On cherche l'entier n minimal de sorte que $1 - \left(\dfrac{7}{9}\right)^n \geqslant 0.989$; $\left(\dfrac{7}{9}\right)^n \leqslant 0.011$;
$n \ln\left(\dfrac{7}{9}\right) \leqslant \ln(0.011)$; $n \geqslant \dfrac{\ln(0.011)}{\ln(7/9)} \cong 17.95$, donc $n = 18$

h) Soit n le nombre de personnes constituant l'orchestre. On a alors
$14 \cdot \dfrac{2}{9} - 0.5 \cdot \dfrac{7}{9}(n-1) = 0$; $28 = 3.5(n-1)$; $n - 1 = 8$; $n = 9$