CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy
t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Examen de Maturité 2009 — OS Physique – Applications des mathématiques

MATHÉMATIQUES

- temps à disposition : 4 heures
- note maximale (6) pour 5 problèmes justes
- extrait des « Formulaires et Tables » à disposition
- machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1

Étudier, puis représenter graphiquement (unité : 1 cm) la courbe d'équations paramétriques :

$$x(t)=\frac{e^t}{t} \qquad y(t)=\frac{3t+1}{t^2-t}$$

Problème 2

On donne les quatre points $A(1;\ 1;\ 4)$, $B(9;\ 5;\ 12)$, $C(5;\ 6;\ 2)$ et $T(3;\ 2;\ 6)$.

1. Écrire une représentation paramétrique de la droite $d = (AB)$.
2. Calculer l'aire du triangle ABC.
3. Établir une équation cartésienne de la sphère Σ de centre C et passant par le point T.
4. Montrer que la droite d est tangente à la sphère Σ au point T.
5. Écrire une représentation paramétrique de la droite t tangente à la sphère Σ et coupant la droite d à angle droit en T.

L'ensemble des droites parallèles à la droite d et tangentes à la sphère Σ forment un cylindre κ.

6. On donne le point $D(5;\ 0;\ -4)$ appartenant au cylindre κ.
   Établir l'équation cartésienne du plan tangent au cylindre κ en D.
7. On considère une partie du cylindre κ délimitée par deux cercles et de volume 540π. Un des cercles a pour centre le point C ; l'autre cercle a pour centre le point C' dont toutes les coordonnées sont positives. Déterminer le point C'.

Problème 3

a) Soit l'application linéaire h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur a, non nul, ayant pour image le vecteur nul.
2. Déterminer les valeurs propres de h et les vecteurs propres associés.
3. Écrire la matrice H' de h dans une base de vecteurs propres.
4. Déterminer la nature géométrique de l'application linéaire h.

b) Dans $\mathbb{C}$, on considère la fonction $f(z)=z+\frac{i}{z}$ et le nombre complexe $w = 1 + i$.

1. Calculer w^6 et représenter ce nombre dans le plan de Gauss.
2. Calculer le plus petit entier positif n tel que w^n soit un nombre réel supérieur à 2009.
3. Déterminer, sous forme cartésienne, l'image par f du nombre w.
4. Déterminer tous les nombres complexes qui ont pour image 2 par f.
5. Déterminer et représenter graphiquement dans le plan de Gauss l'image de l'axe imaginaire par f.

(suite au verso)

Problème 4

Chez l'homme, il existe quatre groupes sanguins : *O*, *A*, *B* et *AB*.

a) A un repas d'anniversaire, 10 personnes sont réunies dans un chalet : 3 du groupe sanguin *O*, 4 du groupe sanguin *A*, 2 du groupe sanguin *B* et 1 du groupe sanguin *AB*. Après le repas, par tirage au sort, on désigne successivement 3 personnes pour faire la vaisselle.
Calculer la probabilité des événements suivants :
E_1 : exactement deux personnes du groupe sanguin *A* sont désignées
E_2 : la deuxième personne choisie est du groupe sanguin *B*
E_3 : les 3 personnes désignées ont le même groupe sanguin
E_4 : les 3 personnes désignées ont des groupes sanguins différents.

b) Dans chaque groupe, il y a deux facteurs Rhésus : + et –. En Suisse, la répartition de la population selon les divers groupes sanguins et facteurs Rhésus est donnée par ce tableau :

	O	*A*	*B*	*AB*
Rhésus +	35%	40%	7%	3%
Rhésus –	6%	7%	1%	1%

1. On rencontre au hasard une personne de nationalité suisse.
Calculer la probabilité des événements suivants :
E_5 : cette personne est du groupe sanguin *A*
E_6 : cette personne est du groupe sanguin *A* sachant qu'elle a un facteur Rhésus -.

2. Dans un lycée, une classe compte 20 élèves de nationalité suisse. Calculer la probabilité des événements suivants :
E_7 : exactement sept élèves de cette classe sont du groupe sanguin A
E_8 : dans cette classe, on recense cinq élèves de chaque groupe sanguin.

3. Cent personnes de nationalité suisse participent à un congrès.
Calculer une approximation de la probabilité que, parmi les personnes présentes, il y a entre 38 et 50 (bornes comprises) individus du groupe sanguin *A*.

Problème 5 (les 7 questions sont indépendantes les unes des autres)

1. Combien de fois se coupent les graphes des fonctions $f(x) = e^x + 1$ et $g(x) = \cos(2x)$?
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{\sin(2x-2)}$.
3. Combien de points d'inflexion compte la fonction $f(x) = \dfrac{x^4}{12}+\dfrac{2}{3}x^3+2x^2-3x+9$?
4. Résoudre $e^{x^3+3x^2-4}=1$.
5. Résoudre $\log(3x) + 2\log(x) = 1$.
6. Résoudre l'équation différentielle $y'+\dfrac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)}=0$.

   Aide : $\dfrac{1}{x(1+x^2)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{(1+x^2)}$

7. Soit la courbe de la fonction $f(x) = 9-x^2$ dans l'intervalle [0 ; 3].
On dessine un carré de côté $f(x)$ comme sur le dessin ci-contre.
Calculer l'abscisse *t* pour que l'aire *A* soit maximale.