MATHÉMATIQUES STANDARD

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrages et matériels autorisés :	• calculatrice • formulaire
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Problème 1 (16 points)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = 2\sqrt{x} \cdot e^{-x^2}$$

1.1 Montrer que

$$f'(x) = \frac{1 - 4x^2}{\sqrt{x} \cdot e^{x^2}}$$

et calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.

1.2 Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1.

1.3 Etudier la fonction f (sans calculer la dérivée seconde) et représenter sa courbe dans un repère orthonormé (unité : 4 carrés).

1.4 On considère la région du plan délimitée par la courbe $y = f(x)$, la verticale d'équation $x = 3$ et l'axe O_x. Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de cette région autour de l'axe O_x.

Problème 2 (15 points)

Les questions doivent être résolues analytiquement et non pas graphiquement. Tous les calculs doivent figurer sur la feuille.

Sur l'esquisse donnée ci-dessous, les cercles Γ_1 et Γ_2 sont tangents extérieurement et de même rayon. Les droites t, d_1 et d_2 sont les tangentes communes à ces deux cercles. Les coordonnées du centre C_1 de Γ_1 et l'équation de la tangente t sont données :

$$C_1(3; -2) \qquad \text{et} \qquad t : \; 3x + 4y - 51 = 0$$

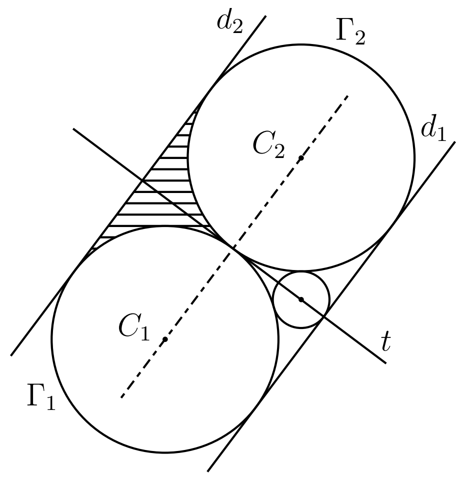
2.1 Déterminer l'équation du cercle Γ_1.

2.2 Calculer les coordonnées du centre C_2 de Γ_2.

2.3 Déterminer les équations des tangentes d_1 et d_2.

2.4 Calculer l'aire de la région hachurée.

2.5 Le troisième cercle représenté sur l'esquisse est tangent à la droite d_1 et aux cercles Γ_1 et Γ_2. Calculer le rayon de ce cercle.



Problème 3 **(9 points)**

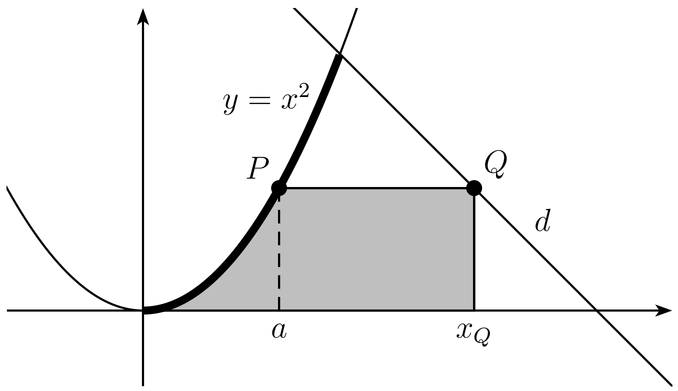
La parabole d'équation $y = x^2$ et la droite d d'équation $y = 3 - x$ sont représentées sur la figure ci-dessous. On considère un point mobile $P(a; a^2)$, appartenant à l'arc de parabole représenté en gras sur la figure, et le point Q, de même ordonnée que P et situé sur d.

3.1 Exprimer x_Q, l'abscisse de Q, en fonction de a.

3.2 Montrer que l'aire S du domaine grisé sur la figure est donnée, en fonction de a, par

$$S(a) = -a^4 - \frac{2a^3}{3} + 3a^2$$

3.3 Calculer la valeur de a pour laquelle $S(a)$ est maximale.



Problème 4 **(12 points)**

Un nouvel opérateur téléphonique cherche à prendre des parts de marché à l'opérateur en place. Pour ce faire, un vendeur appelle des gens sur leur ligne fixe pour tenter de les convaincre de changer d'opérateur. Lorsque le vendeur compose un numéro, la personne appelée décroche dans 80% des cas. Le vendeur réussit à convaincre 25% des gens qui décrochent.

4.1 Parmi les personnes qui ne décrochent pas, il y a 10% des gens qui décident d'eux-mêmes de changer d'opérateur. Le vendeur compose le numéro d'une personne.

4.1.1 Calculer la probabilité que la personne ne décroche pas et change quand même d'opérateur.

4.1.2 Calculer la probabilité que la personne change d'opérateur.

4.1.3 Sachant que la personne va changer d'opérateur, quelle est la probabilité qu'elle ait décroché ?

4.2 Combien de numéros le vendeur doit-il composer au minimum pour que la probabilité qu'une personne au moins décroche soit supérieure à 99,9% ?

4.3 Le vendeur a composé 20 numéros différents.

4.3.1 Calculer la probabilité qu'au moins 18 personnes aient décroché.

4.3.2 En supposant que les 20 personnes appelées aient décroché, quelle est la probabilité qu'exactement 5 de ces personnes changent d'opérateur ?

Problème 1 (16 points)

1.1

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-x^2} + 2\sqrt{x} \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = \frac{1-4x^2}{\sqrt{x} \cdot e^{x^2}}$$

et $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$

1.2 L'équation est

$$y - \frac{2}{e} = -\frac{3}{e}(x-1)$$

1.3 (a) $D_f = \mathbb{R}_+$

(b) Signe de f :

x		0	
$f(x)$	||||	0	$+$

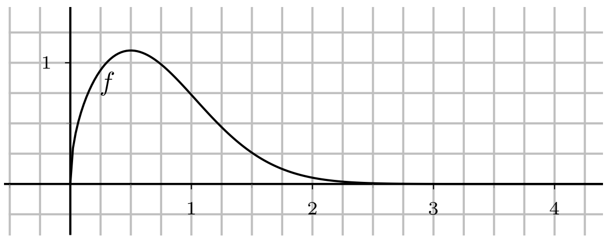
(c) Il y a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ vers $+\infty$ car

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{e^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x\sqrt{x} \cdot e^{x^2}} = 0$$

(d) Croissance de f :

x		0		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	||||	||||	$+$	0	$-$
$f(x)$	||||	Demi tan. vert.	$\nearrow$	Max ≈ 1.1	$\searrow$

(e) Représentation graphique de f :



1.4 Le volume est

$$\int_0^3 \pi \left(2\sqrt{x} \cdot e^{-x^2}\right)^2 dx = \pi \int_0^3 4x \cdot e^{-2x^2} dx$$

$$= \pi \left(-e^{-2x^2} \Big|_0^3 \right) = \pi(-e^{-18} + 1) \approx \pi$$

Problème 2 (15 points)

2.1 On appelle r le rayon de Γ_1. Nous avons

$$r = \delta(C_1, t) = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) - 51|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 10$$

L'équation de Γ_1 est donc

$$\Gamma_1 : (x-3)^2 + (y+2)^2 = 100$$

2.2 Le vecteur $\overrightarrow{C_1C_2}$ est un vecteur de longeur $2r$, colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ qui est normal à t. Donc

$$\begin{pmatrix} x_{C_2} - 3 \\ y_{C_2} + 2 \end{pmatrix} = 20 \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C_2(15; 14)$$

2.3 Le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur des droites d_1 et d_2. Les tangentes à Γ_1 de pente $\frac{4}{3}$ sont les droites

$$y + 2 = \frac{4}{3}(x - 3) \pm 10\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}$$

Finalement,

$$d_1 : 4x - 3y - 68 = 0 \qquad \text{et} \qquad d_2 : 4x - 3y + 32 = 0$$

2.4 La surface vaut

$$2 \cdot \left(10^2 - \frac{\pi \cdot 10^2}{4}\right) = 50(4 - \pi) \approx 42.92$$

2.5 On appelle x le rayon de ce cercle. Par le théorème de Pythagore,

$$10^2 + (10 - x)^2 = (10 + x)^2$$

On trouve ainsi que $x = 2.5$.

Problème 3 **(9 points)**

3.1 Comme $y_Q = a^2$, $x_Q = 3 - a^2$.

3.2 L'aire est

$$S(a) = \int_0^a x^2 dx + (x_Q - a) \cdot a^2 = \frac{a^3}{3} + (3 - a^2 - a) \cdot a^2 = -a^4 - \frac{2a^3}{3} + 3a^2$$

3.3 Les calculs suivants montrent que l'aire maximale est atteinte pour $a = 1$.

$$S'(a) = -4a^3 - 2a^2 + 6a = -2a(a - 1)\left(a + \frac{3}{2}\right)$$

a	0		1		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$
$S'(a)$	0	+	0	−	
$S(a)$	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	≈ 0.737

Problème 4 **(12 points)**

4.1 4.1.1 $0.2 \cdot 0.1 = 0.02$

4.1.2 $0.8 \cdot 0.25 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.22$

4.1.3 $\frac{0.8 \cdot 0.25}{0.22} = \frac{10}{11}$

4.2 La résolution de l'inéquation

$$1 - (0.2)^n > 0.999$$

permet de trouver

$$n > \frac{-3}{\log(0.2)} \approx 4.292$$

Il doit donc composer 5 numéros au minimum.

4.3 4.3.1

$$C_2^{20}(0.8)^{18}(0.2)^2 + C_1^{20}(0.8)^{19}(0.2)^1 + (0.8)^{20} \approx 0.206$$

4.3.2

$$\underbrace{\frac{C_5^{20}(0.8 \cdot 0.25)^5(0.8 \cdot 0.75)^{15}}{(0.8)^{20}}}_{\text{facultatif}} = C_5^{20}(0.25)^5(0.75)^{15} \approx 0.202$$