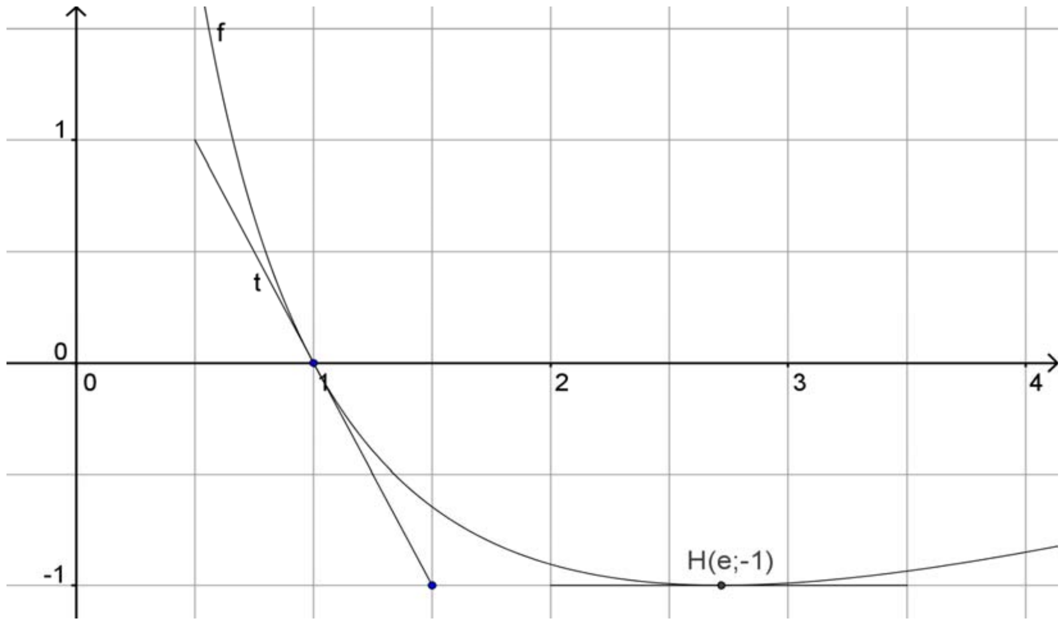
Problème 1 (poids 2)

On a représenté ci-dessous une partie du graphe de la fonction $f(x) = a\ln(x)\cdot(\ln(x)+b)$ avec a, $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, ainsi que la tangente t au graphe de f en son point d'abscisse $x = 1$.



a) Lire sur le graphe les valeurs de $f(1)$, $f'(\mathrm{e})$ et $f'(1)$.

b) Calculer, en fonction de a et b, la dérivée de $f(x)$.

c) En utilisant ce qui précède, déterminer les valeurs de a et b.

Pour la suite du problème, on choisit $a = 1$ et $b = -2$, donc $f(x) = \ln(x)\cdot(\ln(x)-2)$.

d) Étudier la fonction f, dessiner soigneusement son graphe dans un repère orthonormé.

e) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse $x = 1$, ainsi que l'angle aigu entre cette tangente et l'axe des abscisses.

f) Montrer que la fonction $F(x) = x\cdot(\ln^2(x) - 4\ln(x) + 4)$ est une primitive de la fonction f.

g) Hachurer la surface fermée délimitée par le graphe de f et l'axe des abscisses, puis calculer son aire.

h) Résoudre l'équation $f(x) = 2$.

Problème 2 (poids 2)

Remarque : *Pour tous les dessins de ce problème, utiliser la feuille annexée (page 4). Employer différentes couleurs.*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne le plan $\pi : 2x + 2y - z - 9 = 0$, le point $A(-16;0;4)$ et la droite $d : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 6 - 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$.

a) Vérifier que le point d'intersection de la droite d et du plan π est $I(5;0;1)$.

b) Calculer l'angle aigu entre π et d.

c) Dessiner les traces du plan π, la droite d ainsi que sa projection orthogonale dans le mur.

d) Montrer que le point $B(-6;10;-1)$ est la projection orthogonale du point $A(-16;0;4)$ sur le plan π.

e) Le triangle ABI est-il rectangle ? isocèle ? équilatéral ?
Justifier chaque réponse par un raisonnement ou un calcul.

f) Le point $P(11;0;z)$ appartient au plan π.
Trouver z et calculer le volume du tétraèdre $ABIP$.

g) On considère la sphère s centrée en $A(-16;0;4)$ et de rayon 10. Cette sphère et le plan π sont disjoints. Déterminer le point de la sphère s le plus proche du plan π.

h) Trouver les équations de α et β, qui sont les plans parallèles au plan π et dont l'intersection avec la sphère s est un cercle de rayon 8.

Problème 3 (poids 1)

En sortant d'une certaine chaîne de montage, 15% des voitures sont défectueuses. Toutes les voitures sortant de cette chaîne de montage sont acheminées vers le service du contrôle final, où travaillent deux techniciens, A et B. Ensuite, chaque voiture est contrôlée une seule fois.

Le technicien A détecte 90% des voitures défectueuses, alors que le technicien B ne détecte que 80% de ces dernières.

a) Quelle est la probabilité que parmi 10 voitures sortant de la chaîne de montage, la moitié soit défectueuse ?

b) Le technicien A contrôle une voiture. Quelle est la probabilité que cette voiture soit défectueuse et que la défectuosité soit détectée ?

c) Arrivant bientôt à la fin de sa journée de travail, le technicien A décide de contrôler encore des voitures jusqu'à ce qu'il en détecte une qui soit défectueuse. Quelle est la probabilité qu'il doive contrôler encore 5 voitures ?

d) Combien de voitures au minimum le technicien A doit-il contrôler pour que la probabilité qu'il détecte au moins une voiture défectueuse dépasse 95% ?

e) Les techniciens A et B contrôlent chacun une voiture différente. Quelle est la probabilité qu'ils ne détectent aucune défectuosité ?

On admet pour la suite du problème que chaque voiture a la même probabilité d'être contrôlée par le technicien A que par le technicien B.

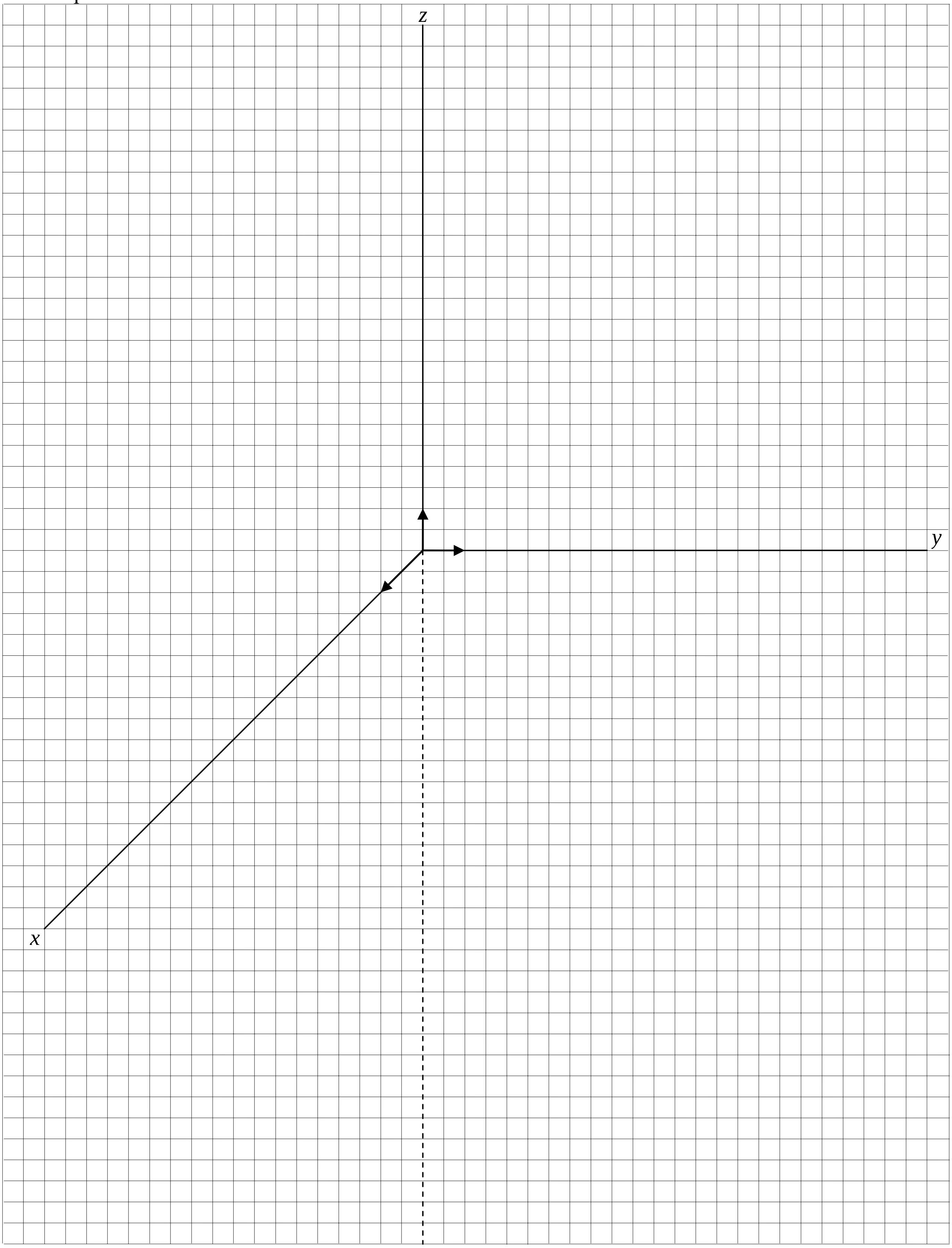
f) Quelle est la probabilité qu'une voiture qui est défectueuse ne soit pas détectée lors d'un contrôle ?

g) Sachant qu'une certaine voiture est défectueuse et qu'elle n'a pas été détectée, calculer la probabilité que la voiture en question ait été contrôlée par le technicien B.

h) Une voiture sort de la chaîne de montage et est acheminée vers le service du contrôle final. Quelle est la probabilité qu'aucune défectuosité ne soit détectée ?

i) Sachant que sur une certaine voiture aucune défectuosité n'a été détectée, calculer la probabilité que la voiture en question soit défectueuse.

Nom et prénom : Classe :



Problème 1 (solution)

a) $f(1)=0$, $f'(\mathrm{e})=0$, $f'(1)=-2$ (pente de la tangente)

b) $f(x)=a\ln(x)\cdot(\ln(x)+b) \Rightarrow f'(x)=a\ln(x)\cdot\frac{1}{x}+(\ln(x)+b)\cdot\frac{a}{x}=\frac{2a\ln(x)+ab}{x}$

c) $f'(\mathrm{e})=0 \Rightarrow 2a+ab=0$, $f'(1)=-2 \Rightarrow ab=-2$, d'où $a=1$ et $b=-2$.
On peut également employer $f(\mathrm{e})=-1 \Rightarrow a+ab=-1$

d) $f(x)=\ln(x)\cdot(\ln(x)-2)$

x	0		1		e^2	
y	///	+	0	–	0	+

$D=\mathbb{R}_+^*$, $I_1(1;0)$, $I_2(\mathrm{e}^2;0)$

$x \xrightarrow{>} 0 \Rightarrow y \to +\infty$ donc la droite $x=0$ est une asymptote verticale.

$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$, il n'y a pas d'asymptote horizontale ou oblique.

$f'(x)=\frac{2\ln(x)-2}{x}$

x	0		e	
y'	///	–	0	+
y	asv	↘	min	↗

d'où le point à tangente horizontale $H(\mathrm{e};-1)$

e) $f'(1)=-2$, la tangente passe par $I_1(1;0)$ d'où $t: y=-2x+2$ et $\alpha=|\arctan(-2)|=63.43^{\circ}$

f) $F(x)=x\cdot(\ln^2(x)-4\ln(x)+4)$,

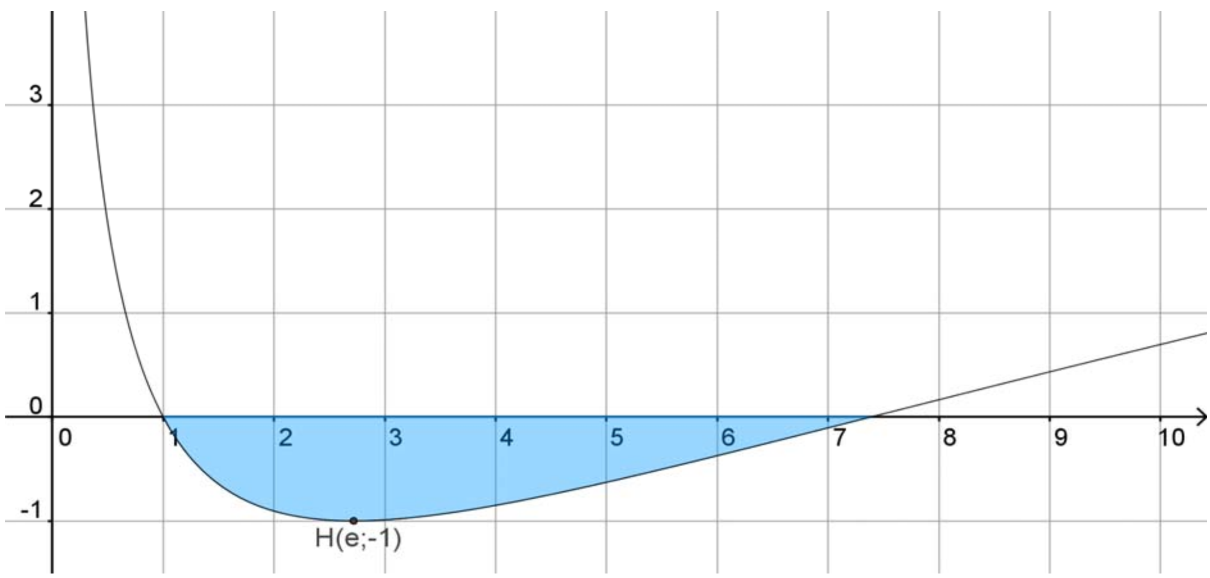
$F'(x)=x\cdot\left(\frac{2\ln(x)}{x}-\frac{4}{x}\right)+\ln^2(x)-4\ln(x)+4=2\ln(x)-4+\ln^2(x)-4\ln(x)+4$

$F'(x)=\ln^2(x)-2\ln(x)=\ln(x)\cdot(\ln(x)-2)$, donc $F'(x)=f(x)$

g) L'aire vaut $-\int_1^{\mathrm{e}^2} f(x)\mathrm{d}x=F(1)-F(\mathrm{e}^2)=4$, car $F(1)=4$ et $F(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^2\cdot(4-8+4)=0$

h) $\ln(x)\cdot(\ln(x)-2)=2 \Leftrightarrow \ln^2(x)-2\ln(x)-2=0$, donc $\ln(x)=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=1\pm\sqrt{3}$

et les solutions sont $x_1=\mathrm{e}^{1+\sqrt{3}}\cong 15.36$, $x_2=\mathrm{e}^{1-\sqrt{3}}\cong 0.481$



Problème 2 (solution)

$\pi: 2x+2y-z-9=0$, $A(-16;0;4)$, $d:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=6-3\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$

a) $d\cap\pi \Rightarrow -3\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda=2$ d'où $I(5;0;1)$.

b) $\pi \perp \vec{n}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $d \,/\!/\, \vec{t}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\cos(\varphi)=\dfrac{|-3|}{3\sqrt{14}} \cong 0.267 \Rightarrow \varphi \cong 74.5^\circ$, φ est l'angle entre $\vec{n}$ et $\vec{t}$, donc l'angle cherché vaut $90^\circ-\varphi \cong 15.5^\circ$.

c) Le plan π coupe les axes en $I_x\left(\frac{9}{2};0;0\right)$, $I_y\left(0;\frac{9}{2};0\right)$ et $I_z(0;0;-9)$.

Les traces de la droite d sont $T_m\left(0;\frac{15}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $T_p(5;0;1)$ et $T_s(3;3;0)$.

La projection de d, d', passe par $T_m\left(0;\frac{15}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $T_p'(0;0;1)$ et $T_s'(0;3;0)$.

d) La droite $p:\begin{cases} x=-16+2\lambda \\ y=0+2\lambda \\ z=4-\lambda \end{cases}$ est perpendiculaire à π et passe par $A(-16;0;4)$,

$p\cap\pi \Rightarrow 9\lambda-45=0 \Rightarrow \lambda=5$ d'où $B(-6;10;-1)$

e) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}=\begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BI}=0 \Rightarrow$ Le triangle est rectangle, donc pas équilatéral.

De plus, $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{BI}\|=15 \Rightarrow$ Le triangle ABI est isocèle.

f) $P(11;0;z)\in\pi \Rightarrow z=13$ donc $P(11;0;13)$.
Si on considère le tétraèdre $ABIP$ comme une pyramide de base BIP et de sommet A, on a:
$\overrightarrow{BI}=\begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BP}=\begin{pmatrix} 17 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\times\overrightarrow{BP}=\begin{pmatrix} -120 \\ -120 \\ 60 \end{pmatrix}$, l'aire du triangle BIP vaut $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{BI}\times\overrightarrow{BP}\|=90$

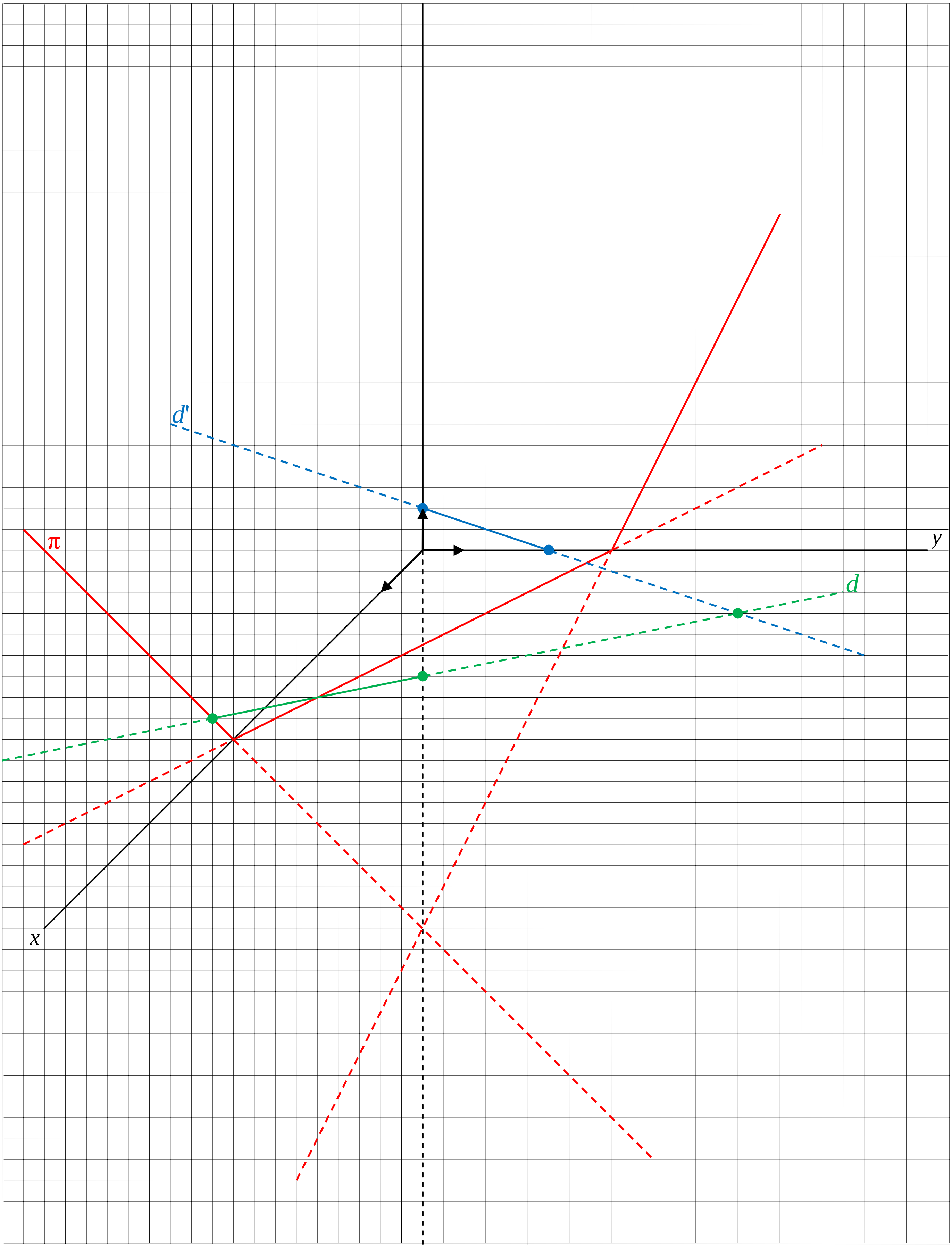
la hauteur de la pyramide vaut $\|\overrightarrow{AB}\|=15$ et son volume est égal à $\frac{1}{3}\cdot 90\cdot 15=450$.

g) $s:(x+16)^2+y^2+(z-4)^2=100$, on reprend la droite $p:\begin{cases} x=-16+2\lambda \\ y=0+2\lambda \\ z=4-\lambda \end{cases}$ de la question d),

$p\cap s \Rightarrow 9\lambda^2=100 \Rightarrow \lambda=\pm\frac{10}{3}$, d'où $P_1\left(-\frac{28}{3};\frac{20}{3};\frac{2}{3}\right)$ (pour $\lambda=\frac{10}{3}$) et $P_2\left(-\frac{68}{3};-\frac{20}{3};\frac{22}{3}\right)$ (pour $\lambda=-\frac{10}{3}$). $\Delta(\pi;P_1)=5$, $\Delta(\pi;P_2)=25$ et le point cherché est $P_1\left(-\frac{28}{3};\frac{20}{3};\frac{2}{3}\right)$.

h) Les plans cherchés ont pour équation $2x+2y-z+d=0$. Par Pythagore, ils sont à distance 6 du centre A de la sphère, car $10^2-8^2=6^2$.
On en tire $\dfrac{|-36+d|}{3}=6 \Rightarrow -36+d=\pm 18$ d'où $d_1=54$ et $d_2=18$.
On a donc, $\alpha: 2x+2y-z+54=0$ et $\beta: 2x+2y-z+18=0$

Problème 2 (solution)



Problème 3 (solution)

a) $\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{15}{100}\right)^5\cdot\left(\frac{85}{100}\right)^5 = 0.849\%$, ($\binom{10}{5} = 252$)

b) $0.15\cdot 0.9 = 13.5\%$

c) $(0.865)^4\cdot 0.135 = 7.56\%$

d) $(0.865)^n < 0.05 \Rightarrow n > \frac{\log(0.05)}{\log(0.865)} = 20.66$, donc 21 voitures

e) $(0.15\cdot 0.1 + 0.85)\cdot(0.15\cdot 0.2 + 0.85) = 0.865\cdot 0.88 = 76.12\%$

f) $0.5\cdot 0.1 + 0.5\cdot 0.2 = 15\%$

g) $\frac{0.5\cdot 0.2}{0.15} = \frac{2}{3} = 66.67\%$

h) $0.15\cdot 0.5\cdot 0.1 + 0.15\cdot 0.5\cdot 0.2 + 0.85 = 87.25\%$

i) $\frac{0.15\cdot 0.5\cdot 0.1 + 0.15\cdot 0.5\cdot 0.2}{0.8725} = \frac{0.0225}{0.8725} = 2.58\%$