Département de l'éducation, de la culture et du sport
Service de l'enseignement
Lycée - Collège des Creusets, Sion

CANTON DU VALAIS
KANTON WALLIS

Departement für Erziehung, Kultur und Sport
Dienststelle für Unterrichtswesen
Kollegium Creusets, Sitten

Lycée Collège Creusets

EXAMENS DE MATURITÉ 2010

| BRANCHE : MATHÉMATIQUES FORTES DF | Version A |
|---|---|

**1.** Soit la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{\ln(x^2)}{x^3}$ .

a) Etudier et représenter graphiquement la fonction $f$ (unité sur $Ox$ : 4 carrés, unité sur $Oy$ : 8 carrés).

b) Calculer $I_p = \int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ où $p \geq 1$.

c) Démontrer que la série $\sum_{k=5}^{+\infty} \dfrac{\ln(k^2)}{k^3}$ converge et encadrer sa somme.

**2.** Dans l'espace affine muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $d$ passant par les points $P(-6;-4;0)$ et $Q(0;-1;3)$ , ainsi que la sphère $\Sigma_m$ de centre $C_m(-2;-m;-1)$ et de rayon 3 .

a) On pose $m=2$ .
Déterminer les points d'intersection $T_1$ et $T_2$ de la droite $d$ avec la sphère $\Sigma_2$ .
Déterminer les équations des plans tangents à $\Sigma_2$ en ces deux points.
Donner les équations paramétriques de la droite d'intersection de ces plans et calculer l'angle aigu que forment ces deux plans.

b) Montrer que le plan $\alpha : 2x+y-5z+16=0$ coupe la sphère $\Sigma_2$ . Donner le centre et le rayon du cercle $\alpha \cap \Sigma_2$ .

c) Déterminer les sphères $\Sigma_m$ qui admettent le plan $\beta : 2x+2y+z=0$ comme plan tangent.

d) Pour quelle valeur de $m$ le point $C_m$ est-il le plus proche du point $M(-4;6;-8)$ ?





**3.** Un endomorphisme $h$ de $\mathbf{R}^3$ est donné par sa matrice A relativement à la base canonique.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 1 & 2 & 1 \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} \quad \text{où } m \in \mathbf{R}.$$

a) Pour quelles valeurs du paramètre réel $m$ , l'application $h$ est-elle bijective ?

b) Pour la suite du problème, on pose $m=1$ .

(1) Donner la dimension et une base du noyau et de l'image de l'application linéaire $h$ .

(2) Déterminer les valeurs propres de $h$ et les sous-espaces propres associés.

(3) Ecrire la matrice $P$ d'un changement de base permettant de diagonaliser la matrice $A$ . En déduire la formule $A^n = 2^{n-1}A$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ .

**4.** Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes.

a) $x\,y' + y = \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$

b) $y'' + 4y' + 5y = 4\cos(3x)$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$

Fin